

# Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil

**J. BLEYER<sup>a</sup>**

Ecole des Ponts ParisTech, Laboratoire Navier (ENPC-IFSTTAR-CNRS UMR 8205)  
Université Paris-Est, Cité Descartes, 6-8 av. Blaise Pascal, 77455 Champs-sur-Marne, FRANCE  
jeremy.bleyer@enpc.fr

## Résumé :

*Ce travail tente de développer des outils numériques efficaces pour une approche plus rationnelle et moins empirique du dimensionnement à la ruine des ouvrages de génie civil à travers l'utilisation de la théorie du calcul à la rupture. Grâce au développement, relativement récent, de solveurs de programmation conique, les approches statiques et cinématiques du calcul à la rupture peuvent être formulées comme un problème d'optimisation convexe et résolues de manière très efficace. La discrétisation des deux approches du calcul à la rupture nécessite le développement d'éléments finis dédiés permettant de conserver leur statut de borne inférieure et supérieure afin d'encadrer la charge limite de la structure. Dans cet article, nous discutons du cas des structures de coques minces et, en particulier, de la formulation d'un critère de résistance exprimé en termes d'efforts généralisés. Les potentialités de l'approche par le calcul à la rupture sont illustrées sur un exemple complexe d'ingénierie civile : la marquise de la gare d'Austerlitz. En couplant les éléments finis développés à une procédure d'homogénéisation, la marge de sécurité de cette structure vis-à-vis d'un dimensionnement réglementaire est quantifiée.*

## Abstract :

*This work aims at developing efficient numerical tools for a more rational and less empirical assessment of civil engineering structure collapse relying on the use of the yield design theory. Static and kinematic approaches of the yield design theory can be formulated as convex optimization problems and efficiently solved using recently developed conic programming solvers. The discretization of both approaches requires dedicated finite-elements ensuring their lower and upper bound status, enabling to bracket the structure limit load. In this paper, we discuss the case of thin shell structures and, in particular, the formulation of their strength criterion expressed in terms of generalized forces. The potentialities of the yield design approach are then illustrated on a complex civil engineering problem : the Paris-Austerlitz railway station canopy. By coupling the previously mentioned finite-elements to a homogenization procedure, this structure margin of safety with respect to design norms is quantified.*

**analyse limite ; calcul à la rupture ; éléments finis ; optimisation ; plaques et coques ; homogénéisation périodique**

# 1 Introduction

La justification de la sécurité d'un ouvrage par les bureaux d'étude de génie civil repose aujourd'hui sur la vérification d'un ensemble de normes et de réglementations, rédigées à l'échelle européenne (Eurocodes), qui consistent en des analyses simplifiées combinant des calculs élastiques à l'échelle de la structure à des vérifications manuelles de la résistance des éléments les plus sollicités. Différents coefficients de sécurité, relatifs à la variabilité des caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs, à l'amplitude du chargement mais aussi aux approximations de la méthode de calcul, sont pris en compte afin de se placer du côté de la sécurité. Cette approche semi-empirique trouve aujourd'hui ses limites du fait de la complexité géométrique des ouvrages modernes (cas de la fondation Louis Vuitton par exemple), de l'utilisation de nouveaux matériaux ou encore de la problématique de la réparation des ouvrages anciens.

Les calculs prenant en compte des non-linéarités matérielles telles qu'un comportement élasto-plastique ou endommageable sont très rarement utilisés par les ingénieurs du fait de leur complexité de mise en œuvre. La théorie du calcul à la rupture [Salençon, 1983, Salençon, 2013] (ou analyse limite dans le cas d'un comportement élastique-parfaitement plastique) offre, quant à elle, une alternative intéressante pour analyser le comportement d'un ouvrage aux Etats Limites Ultimes puisqu'elle permet de déterminer directement la charge ultime potentiellement supportable par une structure. En considérant uniquement la compatibilité de l'équilibre et d'un critère de résistance à vérifier en tout point de celle-ci, les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur permettent d'encadrer, de manière rigoureuse, cette charge ultime par une borne inférieure et supérieure respectivement.

L'approche par le calcul à la rupture se généralise également très bien au cas des milieux continus généralisés, qu'il s'agisse de poutres, plaques ou coques [Save et al., 1997], pourvu que l'on dispose d'un critère de résistance formulé en termes d'efforts intérieurs généralisés. La méthode des lignes de rupture [Johansen, 1962] utilisée par les ingénieurs pour le dimensionnement des dalles en flexion est un exemple d'application de l'approche cinématique du calcul à la rupture.

Néanmoins, pour répondre aux besoins des ingénieurs de génie civil, l'utilisation d'une telle approche nécessite de développer des outils numériques afin de rendre automatique sa mise en œuvre. La résolution des problèmes d'optimisation correspondants s'est initialement heurtée à l'absence de solveurs efficaces jusqu'au développement relativement récent de solveurs d'optimisation convexe reposant sur des algorithmes de points intérieurs tel que MOSEK [Mosek, 2014].

D'autre part, des éléments finis spécifiques aux deux approches du calcul à la rupture, i.e. de type "équilibre" pour l'approche statique et de type "déplacement", offrant éventuellement la possibilité d'inclure des discontinuités des vitesses virtuelles entre les éléments pour l'approche cinématique, doivent également être développés tout en conservant le statut de borne des deux approches.

Nous proposons ici d'illustrer ces différents aspects sur le cas de structures de coque mince (section 2), pour lesquelles la formulation d'un critère de résistance en efforts généralisés (de dimension 6) apparaît comme une difficulté supplémentaire (section 3). L'étude de la résistance à la flexion d'un profilé métallique courbe (section 4) servira d'exemple de validation. L'application des outils développés sur une structure aussi complexe que la marquise de la gare d'Austerlitz a pour objet de souligner l'efficacité mais également la simplicité de l'approche par le calcul à la rupture (section 5).

## 2 Formulation et discrétisation des deux approches du calcul à la rupture

Dans cette section, on présente succinctement la formulation des deux approches du calcul à la rupture dans le cas des coques minces ainsi que leur discrétisation par éléments finis. Le lecteur est invité à se référer à [Bleyer and de Buhan, 2016] pour plus de détails.

### 2.1 Approche statique

Nous adoptons un point de vue en termes de milieu continu généralisé pour lequel les efforts intérieurs du modèle de coque sont décrits par le tenseur des efforts membranaires  $\underline{\underline{N}}$ , le tenseur des moments de flexion  $\underline{\underline{M}}$  et le vecteur des efforts tranchants  $\underline{V}$ , tandis que le critère de résistance en un point, noté  $\mathcal{G} = \{(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \text{ tels que } f(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \leq 0\}$ , est supposé ne faire intervenir que l'effort membranaire et le moment de flexion. On suppose donc une résistance infinie vis-à-vis de l'effort tranchant (hypothèse de coque mince). Un chargement  $\underline{Q}$  est potentiellement supportable au sens du calcul à la rupture si [Salençon, 1983, Salençon, 2013] :

$$\exists(\underline{\underline{N}}(\underline{x}), \underline{\underline{M}}(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x})) \text{ statiquement admissibles avec } \underline{Q} \text{ et } (\underline{\underline{N}}(\underline{x}), \underline{\underline{M}}(\underline{x})) \in \mathcal{G} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1)$$

L'approche statique du calcul à la rupture correspond tout simplement en la mise en œuvre de la définition précédente. Plus précisément, dans le cas d'un mode de chargement à un seul paramètre  $Q$ , la charge limite  $Q^+$  de la structure s'obtient en maximisant le chargement  $Q$  sur l'ensemble des champs vérifiant (1). En se limitant à un sous-espace des champs vérifiant (1), on construit alors un minorant  $Q_{inf} \leq Q^+$  de la charge limite.

### 2.2 Approche cinématique

L'approche cinématique n'est rien d'autre que la dualisation de la définition (1) par le principe des puissances virtuelles. Considérant une cinématique virtuelle définie par un champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  et un champ de vitesse de rotation  $\underline{\theta}$  appartenant au plan tangent de la coque, l'hypothèse de résistance infinie à l'effort tranchant impose de considérer une cinématique de Love-Kirchhoff dans laquelle la vitesse de rotation est reliée au gradient du champ de vitesse transversale [Bleyer and de Buhan, 2013b].

L'écriture du principe des puissances virtuelles appliqué à (1) conduit alors à écrire qu'un chargement  $\underline{Q}$  est potentiellement supportable si et seulement si :

$$\forall(\underline{u}, \underline{\theta}) \text{ cinématiquement admissibles avec } \underline{q} \quad P_{ext}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \underline{Q} \cdot \underline{q} \leq P_{rm}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{\delta}}, \underline{\underline{\chi}}) d\Omega \quad (2)$$

où  $\underline{q}$  est le vecteur des paramètres cinématiques associé au mode de chargement  $\underline{Q}$ ,  $\underline{\underline{\delta}}$  est le tenseur des taux de déformations membranaires et  $\underline{\underline{\chi}}$  le tenseur de taux de courbure associés au champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  et  $\pi(\underline{\underline{\delta}}, \underline{\underline{\chi}}) = \sup_{(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G}} \{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}}\}$  est la fonction d'appui du critère de résistance.

Dans le cas où les champs de vitesse virtuels admettent des discontinuités à travers une ligne de discontinuité, l'expression de la puissance résistante maximale doit être complétée par la contribution de ces discontinuités.

Dans le cas d'un mode de chargement à un paramètre, la définition (2) pour un champ de vitesse virtuel particulier  $(\underline{u}^*, \underline{\theta}^*)$  cinématiquement admissible avec la valeur  $q^*$  conduit à une majoration de la charge limite  $Q^+$  par la valeur  $Q_{sup}$  :

$$Q^+ \leq Q_{sup} = P_{rm}(\underline{u}^*, \underline{\theta}^*)/q^* \quad (3)$$

## 2.3 Discrétisation et optimisation : approche statique

La coque est discrétisée en facettes triangulaires dans lesquelles on considère une interpolation linéaire de l'effort membranaire et quadratique pour le moment de flexion, les champs étant *a priori* discontinus d'un élément à l'autre.

L'écriture de l'équilibre local à l'intérieur de chaque facette, des conditions de continuité en efforts et en moments entre deux facettes adjacentes et des conditions aux limites, conduisent à une relation matricielle de la forme  $\mathbf{H}\Sigma + \mathbf{F} = \mathbf{0}$  où  $\Sigma = \{N_{ij}^k, M_{ij}^k, V_i^k\}^T$  est le vecteur généralisé des inconnues statiques et  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts extérieurs associé au paramètre de chargement  $Q$ . La relation précédente définit ainsi un sous-espace affine des champs  $\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}$  statiquement admissibles.

En considérant un chargement de la forme  $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{F}_0$  où  $\mathbf{F}_0$  est un chargement de référence associé au chargement  $Q_0$ , la charge limite  $Q^+$  est alors minorée pour une discrétisation donnée par la solution du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} Q^+ \geq Q_{inf} = \max_{\Sigma} \lambda Q_0 \\ \text{t.q. } \mathbf{H}\Sigma + \lambda\mathbf{F}_0 = \mathbf{0} \\ (\underline{N}^k, \underline{M}^k) \in \mathcal{G} \quad \forall k \end{aligned} \quad (4)$$

où  $k$  représente l'ensemble des points de vérification du critère de résistance.

## 2.4 Discrétisation par éléments finis : approche cinématique

On considère une interpolation quadratique du champ de vitesse  $\underline{u}$  et une interpolation linéaire du champ de rotation  $\underline{\theta}$  dans chaque élément. Les champs sont *a priori* discontinus entre les éléments et la contribution des discontinuités est prise en compte dans le calcul de la puissance résistante maximale. L'utilisation de telles discontinuités comporte deux intérêts majeurs : premièrement, elles permettent d'améliorer la précision de la borne supérieure obtenue puisque l'on explore un espace plus vaste de vitesses virtuelles [Bleyer and de Buhan, 2013b] ; deuxièmement, elles permettent de s'affranchir des problèmes de verrouillage en cisaillement pour les plaques épaisses ou d'avoir à construire des champs  $C^1$  pour les plaques minces [Bleyer et al., 2015a].

Les relations de compatibilité vitesse-taux de déformation s'écrivent sous la forme :  $\delta = \{\delta_{ij}^k\} = \mathbf{B}_\delta \mathbf{U}$  et  $\chi = \{\chi_{ij}^k\} = \mathbf{B}_\chi \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  collecte toutes les inconnues cinématiques. La puissance des efforts extérieurs s'écrit alors  $P_{ext} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{U}$ . Enfin, la puissance résistante maximale est approximée à l'aide d'une formule d'intégration numérique sur chaque triangle et chaque arête du maillage. On se réfère à [Bleyer and de Buhan, 2016] pour les détails concernant la prise en compte des discontinuités de vitesse entre les éléments.

Toujours en considérant un chargement de la forme  $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0$ , la charge limite  $Q^+$  est alors majorée par la solution du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} Q^+ \leq Q_{sup} = \min_{\mathbf{U}} \quad & Q_0 \sum_k \omega_k \pi(\boldsymbol{\delta}^k, \boldsymbol{\chi}^k) \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{U} = 1 \\ & \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}_\delta \mathbf{U} \\ & \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_\chi \mathbf{U} \end{aligned} \quad (5)$$

où les  $\omega_k$  sont des poids d'intégration (le terme de discontinuité n'a pas été écrit ici dans un souci de concision).

### 3 Critère de résistance en efforts généralisés pour une coque mince

Le critère de résistance  $\mathcal{G}$  présente, *a priori* une interaction complexe entre efforts membranaires et moments de flexion dans un espace à 6 dimensions. La difficulté majeure pour les coques minces est que l'on ne connaît pas explicitement l'expression de ce critère, sauf à effectuer de grossières approximations dans des cas simples [Hodge, 1954, Ilyushin, 1956, Hodge, 1959, Prager, 1961, Owen and Figueiras, 1983]. On propose ici une démarche permettant d'approximer le critère de résistance  $\mathcal{G}$  avec autant de précision qu'on le souhaite, par l'intérieur et par l'extérieur, à partir du critère de résistance local du matériau constitutif. Puisque la majorité des critères de résistance usuels peuvent se formuler à l'aide de contraintes coniques [Makrodimopoulos, 2010], rendant possible l'utilisation des solveurs d'optimisation évoqués précédemment, il en sera de même pour les approximations de  $\mathcal{G}$  que l'on propose.

Pour une coque homogène dans son plan et d'épaisseur  $h$  (éventuellement hétérogène par morceaux dans l'épaisseur), le critère de résistance généralisé  $\mathcal{G}$  peut s'obtenir à partir du critère de résistance local  $\mathcal{C}$  dans l'épaisseur  $z$  pour des états de contrainte plane :

$$\begin{aligned} (\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \quad & \exists \underline{\sigma}(z) \text{ avec } \sigma_{iz} = 0, \quad i = x, y, z \\ & \underline{\sigma}(z) \in \mathcal{C}(z) \quad z \in [-h/2; h/2] \\ & \underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}(z) dz \text{ et } \underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \underline{\sigma}(z) dz \end{aligned} \quad (6)$$

On propose alors de discrétiser implicitement l'épaisseur en  $n$  couches dans lesquelles on considère des états de contraintes planes uniformes  $\underline{\sigma}^k$ . La restriction de (6) à ce type de champs fournit donc une approximation par l'intérieur du critère généralisé  $\mathcal{G}_{int}^n \subset \mathcal{G}$  où :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_{int}^n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma}^k \text{ t.q. } \sigma_{i3} = 0 \quad \forall i = x, y, z \\ \underline{\sigma}^k \in \mathcal{C}^k \quad \forall k = 1, \dots, n \\ \underline{N} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \underline{\sigma}^k \\ \underline{M} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{h_{k-1}^2 - h_k^2}{2} \right) \underline{\sigma}^k \end{array} \right. \quad (7)$$

qui peut alors remplacer  $\mathcal{G}$  dans le problème d'optimisation (4) relatif à l'approche statique (afin de pré-

server le statut de borne inférieure du résultat).

De la même manière, l'utilisation de (6) dans l'expression de la fonction d'appui  $\pi(\underline{\delta}, \underline{\chi})$  permet de montrer que celle-ci s'obtient de la façon suivante :

$$\pi(\underline{\delta}, \underline{\chi}) = \int_{-h/2}^{h/2} \Pi(\underline{\delta} - z\underline{\chi}; z) dz \quad (8)$$

où  $\Pi(\underline{d}; z) = \sup\{\underline{\sigma} : \underline{d}; \underline{\sigma} \in \mathcal{C}(z)\}$  est la fonction d'appui associée au critère local en contraintes planes  $\mathcal{C}(z)$ .

Le calcul exact étant impossible en général, on approxime cette expression par excès par une formule des trapèzes à  $n$  points, conduisant donc à une majoration de l'expression de la puissance résistante maximale et donc de la charge ultime :

$$\pi(\underline{\delta}, \underline{\chi}) \leq \pi^{ext}(\underline{\delta}, \underline{\chi}) = \sum_{k=1}^n \omega_k \Pi(\underline{\delta} - z^k \underline{\chi}; z^k) \quad (9)$$

où les  $z^k, \omega^k$  sont les points et poids d'intégration associés à la formule des trapèzes. De même qu'avant, l'expression approchée  $\pi^{ext}$  peut remplacer  $\pi$  dans le problème d'optimisation (5) associé à l'approche cinématique. À nouveau, si  $\mathcal{C}$  est un critère classique en contraintes planes, sa fonction d'appui  $\Pi$  peut se réexprimer à l'aide de contraintes coniques du second-ordre et le problème peut être résolu efficacement.

## 4 Résistance à la flexion d'un profilé métallique courbe

Nous validons les éléments de coque développés sur le problème d'une portion courbe, de rayon de courbure  $R$ , d'un profilé métallique de section en I et soumis à ses deux extrémités à un moment de flexion  $M$  (Fig. 1-gauche). Du fait de la courbure, les efforts axiaux présents dans les deux semelles génèrent des moments transversaux qui induisent une déflexion hors-plan des deux semelles. Ce problème présente donc un couplage intéressant entre effets de membrane et de flexion et a été étudié analytiquement ainsi qu'expérimentalement [Massonnet and Save, 1964] (Fig. 1-droite).

Les encadrements du moment ultime que peut supporter cette poutre courbe obtenus en modélisant le tronçon à l'aide d'éléments de coque sont représentés sur la Figure 2 et confrontés aux encadrements analytiques proposés dans [Massonnet and Save, 1964] pour différentes valeurs du paramètre sans dimension  $b/\sqrt{Rt}$  pour le cas  $h/t = 50$  et  $R/h = 10$ . On constate un très bon accord entre les bornes analytiques et numériques, ces dernières permettant d'obtenir une estimation beaucoup plus précise du moment ultime. On constate également que les mécanismes de ruine obtenus sont en très bon accord avec les observations expérimentales (Fig. 1-droite et 2).

## 5 Dimensionnement à la rupture de la marquise de la gare d'Austerlitz

Nous nous proposons d'appliquer les outils développés précédemment au calcul à la rupture de la marquise de la gare de Paris-Austerlitz, une coque courbe en béton armé actuellement en cours de construction dans le cadre du projet de réaménagement de la gare. Le projet architectural initial, que nous considérons ici, comportait également un réseau périodique de pavés de verre permettant le passage de la

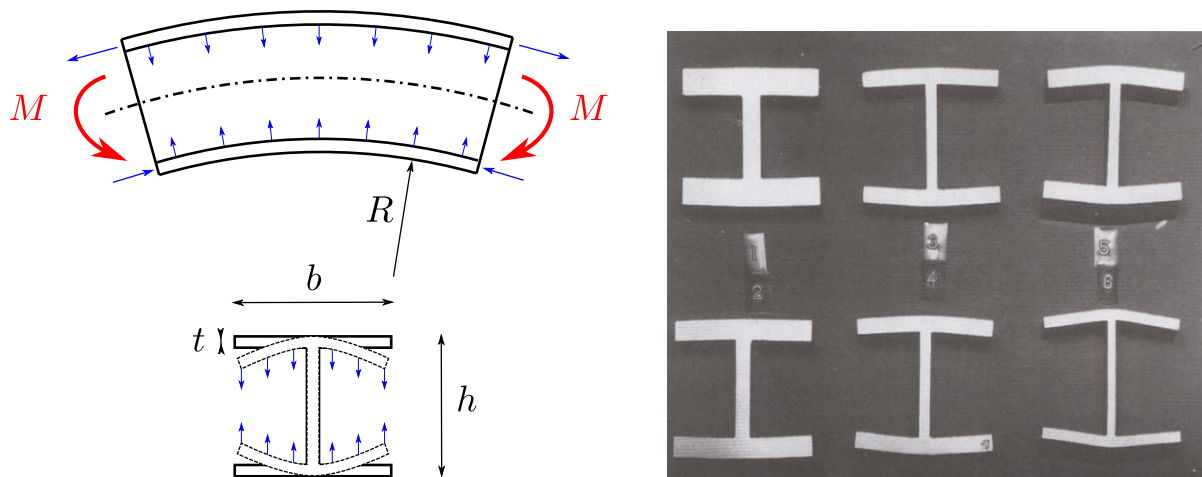


FIGURE 1 – Gauche : problème de flexion d'un profilé métallique courbe et flexion transversale induite par la courbure. Droite : déformations résiduelles obtenues à la ruine plastique pour différentes géométries [Massonnet and Save, 1964]

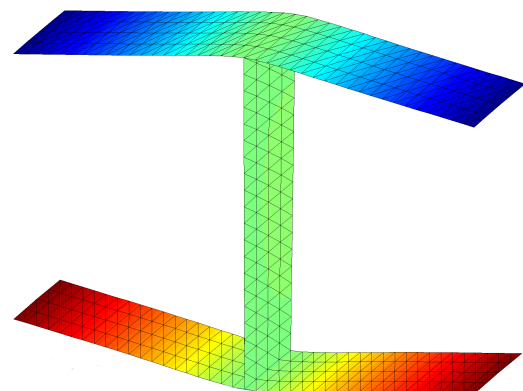
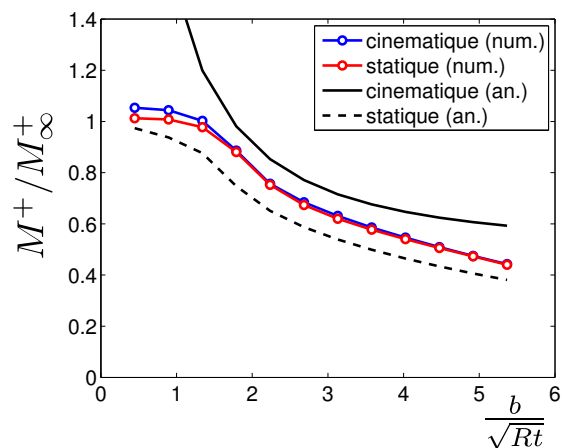


FIGURE 2 – Gauche : Encadrement du moment ultime  $M^+$  pour une poutre courbe ( $R/b = 10$ ) rapporté au moment ultime  $M_\infty^+$  de la poutre droite. Droite : mécanisme de ruine obtenu par l'approche cinématique (isocouleurs : amplitude de la déflexion transversale).

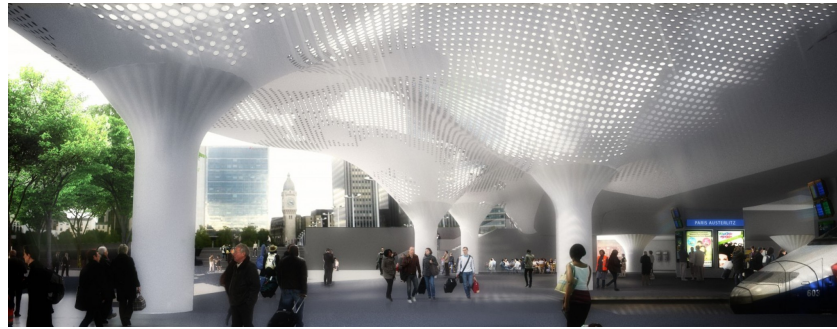
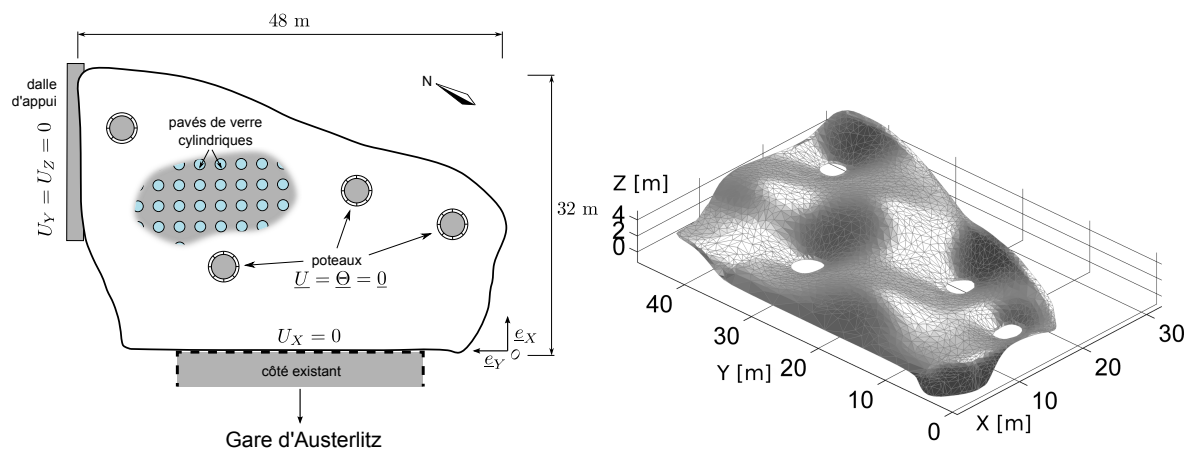
FIGURE 3 – Vue d’architecte du projet initial de la marquise (source <http://www.sncf.com>)

FIGURE 4 – Gauche : Vue en plan schématique de la structure. Droite : géométrie de la surface courbe.

lumière (Fig. 3), solution technique qui a depuis été abandonnée. L’analyse qui suit consiste à mettre en œuvre les approches du calcul à la rupture pour la structure initiale perforée en prenant en compte les différents coefficients de sécurité utilisés dans le dimensionnement traditionnel suivant la réglementation des Eurocodes.

D’autre part, la présence de nombreux pavés de verre rend impossible un calcul modélisant individuellement la présence de chacun des trous. Nous avons alors mis en œuvre une démarche d’homogénéisation périodique permettant de remplacer la coque hétérogène par une coque homogène aux propriétés de résistance équivalentes, tenant ainsi compte de la présence de ces trous de manière indirecte.

## 5.1 Hypothèses de modélisation

La marquise est modélisée comme une coque courbe d’épaisseur constante  $h = 14$  cm dont les différentes dimensions et conditions aux limites sont représentées sur la Figure 4. La géométrie de la surface moyenne est discrétisée par un maillage d’environ 5000 éléments triangulaires de coques présentés précédemment.

Concernant le chargement, nous avons considéré quatre chargements élémentaires représentant l’effet du poids propre, de la neige, du vent ainsi que d’éventuels piétons (Figure 5). Nous avons alors retenu 3 combinaisons typiques de celles considérées traditionnellement dans un dimensionnement aux Etats Limites Ultimes (ELU) :

- Combinaison n°1 (poids propre + neige) :  $\underline{q}_1 = 1.35\underline{q}_G + 1.5\underline{q}_N$



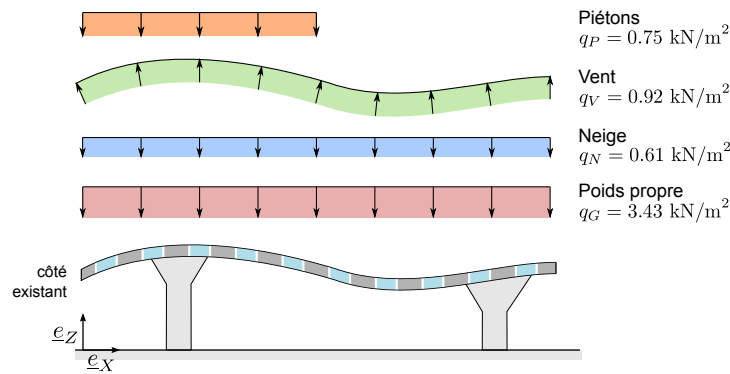


FIGURE 5 – Représentation schématique des chargements élémentaires agissant sur la structure.

- Combinaison n°2 (résistance au soulèvement) :  $q_2 = q_G + 1.5q_V$  (le vent est considéré sur toute la structure)
- Combinaison n°3 (cas asymétrique piétons + vent) :  $q_3 = 1.35q_G + 1.5q_P + 0.9q_V$ . La charge due aux piétons est considérée sur la moitié proche de la gare ( $X \leq 15$  m) et le vent sur l'autre moitié ( $X \geq 15$  m).

En ce qui concerne les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés, le verre est supposé ne pas participer à la résistance mécanique de la coque compte-tenu de son caractère fragile vis-à-vis du cadre d'emploi du calcul à la rupture. Nous nous plaçons donc du côté de la sécurité.

Pour le béton, de résistance nominale à la compression  $f_{c,k} = 50$  MPa, un coefficient de sécurité  $\gamma_c = 1.5$  est utilisé de sorte que la résistance de dimensionnement est prise égale à  $f_{c,d} = f_{c,k}/\gamma_c = 33.3$  MPa. La résistance à la traction est prise égale à  $f_{t,d} = 3$  MPa. Le critère de résistance du béton est modélisé par un critère de type Mohr-Coulomb tronqué en traction à la valeur  $f_{t,d}$  et avec un angle de frottement interne égal à  $\phi = 37^\circ$ .

Enfin, pour les aciers d'armature de résistance nominale à la traction/compression uniaxiale égale à  $f_{y,k} = 500$  MPa, un coefficient de sécurité  $\gamma_s = 1.15$  est retenu de sorte que la résistance de dimensionnement est prise égale à  $f_{y,d} = f_{y,k}/\gamma_s = 435$  MPa.

Les calculs seront effectués pour trois dimensions de pavés supposés être répartis de manière périodique dans les directions  $X$  et  $Y$  dans le plan tangent de la coque. Le diamètre des pavés est pris égal à 110, 150 et 190 mm tandis que l'espacement entre les pavés est fixé à 270 mm. Suivant la dimensionnement des pavés, la quantité d'acier d'armature, identique dans les deux directions, varie de 3 à 8 aciers haute adhérence (HA) de diamètre 8 mm. Pour plus de détails, on se référera à [Bleyer, 2015].

## 5.2 Homogénéisation de la coque hétérogène

Afin de traiter la difficulté relative à la présence des nombreux pavés de verre rendant la coque fortement hétérogène, nous proposons de mettre en œuvre une démarche d'homogénéisation périodique consistant à déterminer un critère de résistance homogène équivalent [Suquet, 1982, de Buhan, 1986]. Pour ce faire, plusieurs approches sont possibles suivant que l'on cherche à obtenir directement un critère de résistance en efforts généralisés de coque ( $\underline{N}$ ,  $\underline{M}$ ) à partir de la micro-structure 3D ou non. On en trouvera une discussion détaillée dans [Bleyer, 2015]. Nous proposons ici une démarche simplifiée et sécuritaire tirant parti du caractère homogène de la cellule de base dans la direction transversale de l'épaisseur de

la coque. Plus précisément, nous proposons de déterminer le critère de résistance homogène équivalent en contrainte plane relatif à la cellule de base, modélisée elle-même comme un milieu continu 2D en contrainte plane. L'approche proposée est approximative dans la mesure où elle néglige la présence des composantes transversales du tenseur des contraintes générées par la présence des trous. Néanmoins, elle est sécuritaire elle conduit clairement à une approximation par l'intérieur du critère de résistance macroscopique. Une fois le critère macroscopique en contrainte plane obtenu, l'approche décrite précédemment permet de construire le critère de résistance généralisé de la coque mince.

L'obtention d'un critère de résistance macroscopique passe par la résolution numérique d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture formulé à l'échelle de la cellule de base. Dans le cadre d'une mise en œuvre numérique d'une approche de calcul à la rupture sur une structure homogène équivalente, le critère de résistance macroscopique doit pouvoir être décrit manière relativement simple pour pouvoir être utilisé. Une procédure d'approximation du critère obtenu numériquement est donc nécessaire pour permettre le calcul de structure. Le lecteur pourra se référer aux travaux [Bleyer and de Buhan, 2013c, Bleyer and de Buhan, 2013a, Bleyer and de Buhan, 2014] pour plus de détails sur ces questions. On se contente ici de proposer une approximation simplifiée sous la forme d'un critère de Rankine anisotrope permet de rendre compte de façon satisfaisante du caractère anisotrope du critère obtenu numériquement tout en restant relativement sécuritaire (Figure 6) :

$$\begin{cases} (\sigma_t - \sigma_{xx})(\sigma_t - \sigma_{yy}) \geq \zeta \sigma_{xy}^2 \\ (\sigma_c + \sigma_{xx})(\sigma_c + \sigma_{yy}) \geq \zeta \sigma_{xy}^2 \\ -\sigma_c \leq \sigma_{xx}, \sigma_{yy} \leq \sigma_t \end{cases} \quad (10)$$

où  $\sigma_c$  (resp.  $\sigma_t$ ) représente la limite en compression (resp. traction) uniaxiale dans la direction  $x$  ou  $y$  tandis que le coefficient  $\zeta \geq 0$  peut être relié à la valeur maximale  $\tau_0$  de la contrainte de cisaillement de la façon suivante :

$$\zeta = \left( \frac{2\tau_0}{\sigma_c + \sigma_t} \right)^2 \quad (11)$$

le cas où  $\zeta = 1$  permet de retrouver la version isotrope du critère dont on constate qu'elle surestime en général la résistance macroscopique (en particulier en cisaillement). Les valeurs identifiées pour les 3 géométries de pavés sont reportées dans le Tableau 1.

Enfin, la présence des armatures, négligées jusqu'à présent dans la détermination du critère en contrainte plane de la coque homogène de béton non renforcé, est prise en compte directement à l'échelle du critère de résistance de la coque tel que décrit dans [de Buhan and Taliervo, 1991, Bleyer, 2015]. L'utilisation d'un critère de Rankine anisotrope en contraintes planes pour la description du critère de résistance local du matériau homogénéisé permet alors de formuler les deux approches du calcul à la rupture comme un problème de programmation conique du second-ordre. Ainsi, les solveurs évoqués précédemment sont utilisés pour résoudre les deux approches statiques et cinématiques à l'échelle de la structure.

### 5.3 Résultats de l'analyse de la structure

Disposant, à présent, d'un critère de résistance macroscopique de coque homogénéisée, nous pouvons mettre en œuvre les deux approches du calcul à la rupture à l'échelle de la structure. Un degré de discrétisation de  $n = 8$  et  $n = 7$  sont respectivement utilisés pour la description du critère généralisé de la

Géométrie	$\sigma_c$	$\sigma_t$	$\tau_0$
n°1 : 110 mm	19.6 MPa	1.8 MPa	7.7 MPa
n°2 : 150 mm	14.8 MPa	1.3 MPa	5.1 MPa
n°3 : 190 mm	10.0 MPa	0.9 MPa	2.9 MPa
<i>Béton seul</i>	<i>33.3 MPa</i>	<i>3 MPa</i>	<i>18.2 MPa</i>

TABLE 1 – Valeurs numériques des paramètres du critère de résistance macroscopique approché pour les trois géométries de pavés

Géométrie de pavés	Combinaison n°1	Combinaison n°2	Combinaison n°3
n°1 : 110 mm	3.6—4.6	8.0—10.3	4.7—6.4
n°2 : 150 mm	2.6—3.3	5.7—7.4	3.3—4.6
n°3 : 190 mm	1.4—1.9	3.2—4.2	1.8—2.6

TABLE 2 – Encadrement du facteur de sécurité (statique—cinématique) pour les différentes configurations étudiées

coque pour l'approche statique et cinématique.

La résolution numérique des deux approches du calcul à la rupture a permis d'encadrer le facteur de sécurité de la structure pour différentes combinaisons de cas de charge et différentes tailles de trous. Ce facteur de sécurité sans dimension représente la valeur du coefficient multiplicatif à appliquer à l'ensemble du chargement et qui conduirait à la ruine potentielle de la structure. Il est également possible de l'interpréter comme la valeur par laquelle il faudrait diviser l'ensemble des valeurs des résistances des matériaux de la structure pour conduire à la ruine potentielle de la structure. Un facteur de sécurité strictement plus grand que 1 suffit donc à justifier de la stabilité de la structure. L'intérêt de l'approche par le calcul à la rupture est qu'elle permet de quantifier précisément la marge de sécurité disponible vis-à-vis des efforts de dimensionnement aux ELU, intégrant déjà des coefficients de sécurité réglementaires.

Les résultats relatifs à l'encadrement du facteur de sécurité pour les trois géométries de pavés et les trois combinaisons de chargement différentes sont reportés dans le Tableau 2. En premier lieu, nous constatons que la stabilité est assurée quelle que soit la configuration. Comme l'on pouvait s'y attendre, la valeur du facteur de sécurité décroît sensiblement suivant la géométrie de pavés utilisée. Pour un choix modéré de taille de pavé (cas n°2 par exemple), la marge de sécurité disponible est donc relativement confortable.

D'autre part, il semble que la combinaison de chargement la plus critique soit la première, *i.e.* celle relative à la combinaison du poids propre et d'une charge uniforme de neige. La résistance au soulèvement dû au vent (combinaison n°2) présente des facteurs de sécurité deux fois plus importants. La combinaison n°3 relative au poids propre et à un chargement asymétrique dû à la combinaison du vent et des charges dues aux piétons présente des facteurs de sécurité proches de la première, mais légèrement supérieurs.

La représentation du mécanisme de ruine pour la géométrie de pavés n°1 et la combinaison de chargement n°1 (Fig. 7) montre une ruine en flexion de la partie de la structure en porte-à-faux située à l'extrémité Nord. Il semble donc que cette zone soit plus vulnérable que le reste de la structure suggérant éventuellement de renforcer cette dernière. L'allure du mécanisme de ruine pour la combinaison n°3 (Fig. 8) montre une vulnérabilité de la zone située à l'extrémité Ouest, en particulier pour les pavés

de 190 mm, révélant l'importance de l'anisotropie du critère sur le mode de ruine.

Enfin, mentionnons que la majorité des encadrements présentent un écart relatif d'environ 20% entre les deux bornes, ce qui est très satisfaisant pour une application à l'ingénierie de génie civil. La majeure partie de cet écart semble être dû à la finesse du maillage plutôt qu'à la discrétisation du critère de résistance. Notons que les problèmes d'optimisation correspondants sont de grande taille, environ 4 à 5 millions de variables d'optimisation pour 1 million de contraintes coniques. Ces problèmes sont résolus en 15 à 20 minutes sur un ordinateur de bureau standard.

## 6 Conclusions

Dans le but de proposer une nouvelle approche plus rationnelle du dimensionnement à la ruine des ouvrages de génie civil, Des outils numériques permettant de mettre en œuvre la théorie du calcul à la rupture ont été proposés dans ce travail, combinant éléments finis dédiés aux deux approches (illustré ici dans le cas des coques minces), solveurs d'optimisation conique et homogénéisation des propriétés de résistance. Cet ensemble d'outils offre une nouvelle façon d'aborder la question de la ruine des ouvrages de génie civil en alliant simplicité et efficacité de mise en œuvre à une plus grande rigueur par rapport aux approches réglementaires.

Dans le but d'en illustrer les potentialités de manière plus convaincante, nous avons également étudié le cas d'une structure moderne complexe. Cet exemple présente des problématiques auxquelles l'approche par le calcul à la rupture permet d'apporter une réponse pertinente et dans un temps de calcul raisonnable.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses, elles incluent en particulier l'extension au dimensionnement de structures massives en béton armé, pour lesquelles l'efficacité des solveurs d'optimisation est un enjeu majeur. L'approche par le calcul à la rupture offre également des perspectives intéressantes dans le contexte des structures mixtes ou renforcées. Enfin, mentionnons que nous avons également proposé une nouvelle méthode de résolution d'écoulements stationnaires de fluides à seuil [Bleyer et al., 2015b], *i.e.* présentant un comportement de type visco-plastique, reposant sur l'utilisation des solveurs d'optimisation conique mentionnés précédemment.

## Références

- [Bleyer, 2015] Bleyer, J. (2015). *Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil*. PhD thesis, Université Paris-Est.
- [Bleyer and de Buhan, 2013a] Bleyer, J. and de Buhan, P. (2013a). A greedy algorithm for yield surface approximation. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(8) :605–615.
- [Bleyer and de Buhan, 2013b] Bleyer, J. and de Buhan, P. (2013b). On the performance of non-conforming finite elements for the upper bound limit analysis of plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(3) :308–330.
- [Bleyer and de Buhan, 2013c] Bleyer, J. and de Buhan, P. (2013c). Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers & Structures*, 129 :86–98.
- [Bleyer and de Buhan, 2014] Bleyer, J. and de Buhan, P. (2014). A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part II : Upper bound yield design calculation of the homogenized structure. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13) :2460–2469.

- [Bleyer and de Buhan, 2016] Bleyer, J. and de Buhan, P. (2016). A numerical approach to the yield strength of shell structures. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 59 :178–194.
- [Bleyer et al., 2015a] Bleyer, J., Le, C. V., and de Buhan, P. (2015a). Locking-free discontinuous finite elements for the upper bound yield design of thick plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(12) :894–913.
- [Bleyer et al., 2015b] Bleyer, J., Maillard, M., De Buhan, P., and Coussot, P. (2015b). Efficient numerical computations of yield stress fluid flows using second-order cone programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :599–614.
- [de Buhan, 1986] de Buhan, P. (1986). *A fundamental approach to the yield design of reinforced soil structures*. PhD thesis, Thèse d’Etat, Paris VI.
- [de Buhan and Taliercio, 1991] de Buhan, P. and Taliercio, A. (1991). A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 10(2) :129–154.
- [Hodge, 1954] Hodge, P. (1954). The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 21(336-442) :82.
- [Hodge, 1959] Hodge, P. G. (1959). *Plastic analysis of structures*. McGraw-Hill.
- [Ilyushin, 1956] Ilyushin, A. (1956). *Plasticité*. Eyrolles, Paris.
- [Johansen, 1962] Johansen, K. (1962). *Yield-line theory*. Cement and Concrete Association London.
- [Makrodimopoulos, 2010] Makrodimopoulos, A. (2010). Remarks on some properties of conic yield restrictions in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26(11) :1449–1461.
- [Massonnet and Save, 1964] Massonnet, C. and Save, M. (1964). Résistance limite d’une poutre courbe en double té à parois minces soumises à flexion pure. *Proc. Int. Ass. Bridge. Str. Eng.*, 23 :245.
- [Mosek, 2014] Mosek (December 2014). The Mosek optimization software. Available from : <http://www.mosek.com/>.
- [Owen and Figueiras, 1983] Owen, D. and Figueiras, J. (1983). Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(4) :521–539.
- [Prager, 1961] Prager, W. (1961). *Problems in Continuum Mechanics*, chapter On the plastic analysis of sandwich structures, pages 342–349. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
- [Salençon, 1983] Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Salençon, 2013] Salençon, J. (2013). *Yield Design*. London, Hoboken : ISTE Ltd., John Wiley & Sons, Inc.
- [Save et al., 1997] Save, M. A., Massonnet, C. E., and de Saxce, G. (1997). *Plastic limit analysis of plates, shells, and disks*, volume 43. North Holland.
- [Suquet, 1982] Suquet, P. (1982). *Plasticité et Homogénéisation, These d’Etat*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie.

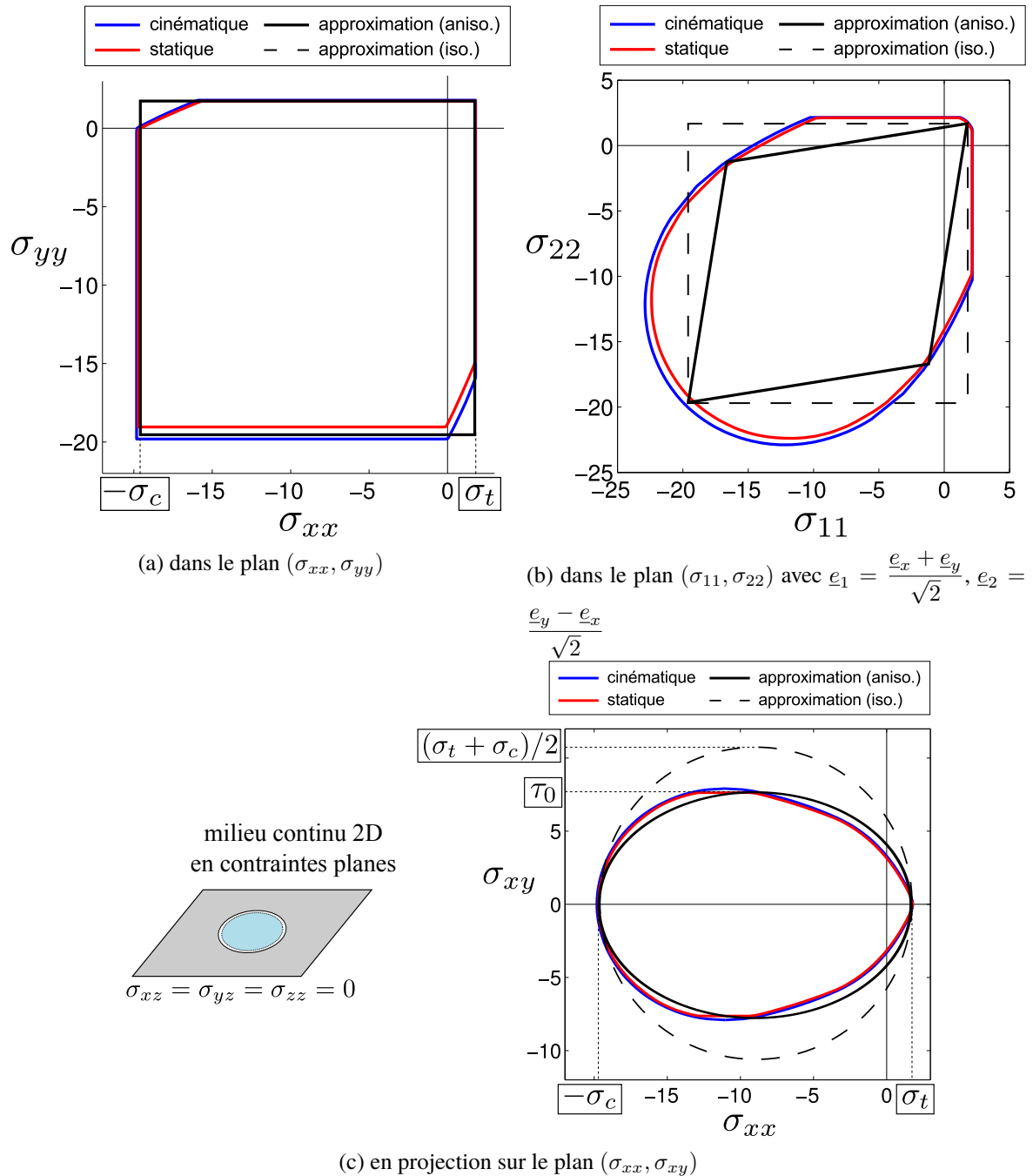


FIGURE 6 – Critère de résistance macroscopique en contraintes planes (encadré par une approche statique et cinématique du problème auxiliaire formulé sur la cellule de base) et approximations (anisotrope  $\zeta \neq 1$ , isotrope  $\zeta = 1$ ) pour différentes sollicitations

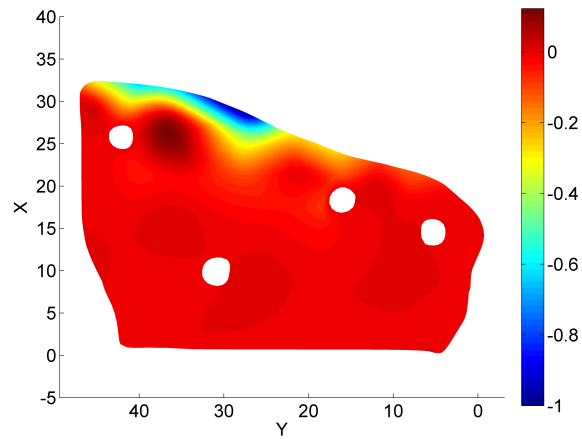


FIGURE 7 – Mécanisme de ruine obtenu par l'approche cinématique (isovaleurs de l'intensité relative de la composante verticale  $U_Z$ )

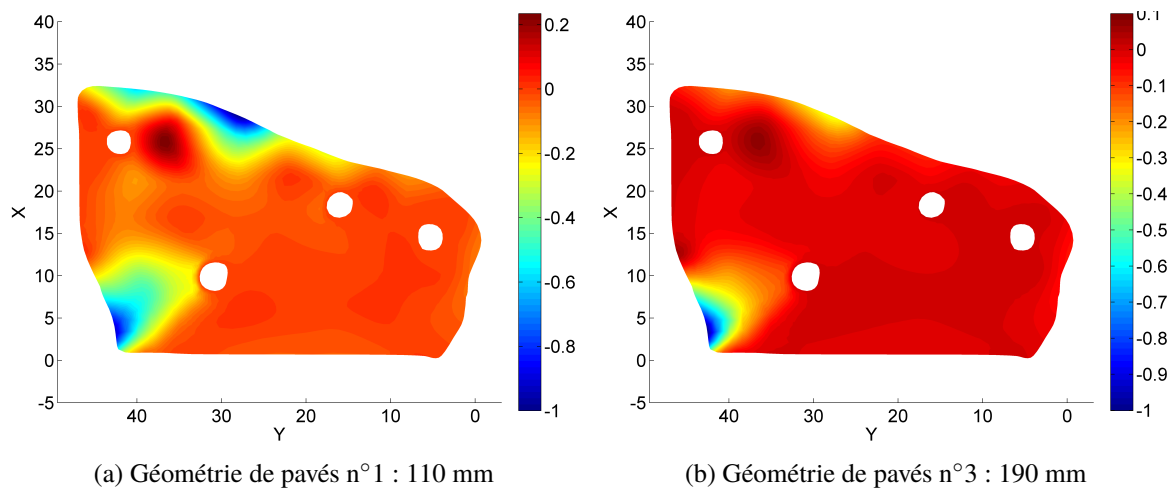


FIGURE 8 – Mécanisme de ruine pour la combinaison asymétrique n°3 pour deux géométries de pavés