

Calcul de la durée de vie en fretting d'une attache pale/disque de turbomachine soumise à un chargement vibratoire.

M.Denaux^{a,c}, M-C.Baietto^a, J.Réthoré^b, M.Dijoud^c

a. Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, France

b. Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), Ecole Centrale de Nantes, UMR CNRS 6183

c. Safran Helicopter Engines Avenue Joseph Szydlowski, 64510 BORDES, FRANCE - France, matthieu.denaux@safrangroup.com

Abstract :

Fretting has been the subject of numerous experimental investigations. It occurs when two surfaces rub against each other at low amplitude (some tens of microns of sliding distance). If the tangential force Q is lower than the product of the friction coefficient μ and the normal force P , two different zones can be observed within the contacting zone. At the center, both surfaces are stuck to each other while they have a relative motion in the annular zone. This is the partial slip regime. The corresponding dominant failure is crack initiation located at the edges of the contact area. Fretting is present in a blade-disc attachment of a turboshaft engine. It is due to the superimposition of two fatigue stresses: a low frequency loading (LCF), induced by the centrifugal force from the rotation of the disc, and a high frequency loading (HCF), which is a sinusoidal force induced by vibrations. It's a difficult phenomenon to model and industries are not capable of predicting it with good accuracy yet. Instead, they are forced to use huge safety factors. Therefore, the prediction of the lifetime of a blade disc assembly under fretting has now become a major issue in the field of turboshaft engineering. A major difficulty of providing such a prediction comes from the complication of determining the stress and strain fields in the vicinity of the contact. A suitable mesh size and quality makes it possible to overcome this problem. A finite element calculation process to compute the stress field under a fretting contact induced by a superimposed LCF + HCF solicitation in a fir-tree root is presented. The combination of this process with the Dang Van fatigue criterion allows the calculation of a criticality parameter related to the life cycle. This modeling process is first applied on a model representing an innovative test device, designed at Safran Helicopter Engines, allowing the superimposition of a static and a vibratory loading on a dovetail test specimen. The model reproduces experimental observations with good accuracy. This modeling process is then applied to the model representing a real fir-tree root geometry.

Résumé :

Le fretting a fait l'objet de nombreuses recherches expérimentales. Il se caractérise par deux surfaces qui frottent l'une contre l'autre à faible amplitude (quelques dizaines de microns de distance de glissement). Si la force tangentielle Q est inférieure au produit du coefficient de frottement μ et de la force normale P , deux zones différentes peuvent être observées dans la zone de contact. Au centre, les deux surfaces sont collées l'une à l'autre alors qu'elles ont un

mouvement relatif en bordure de contact. Il s'agit du régime de glissement partiel. L'endommagement dominant associé est l'amorçage de fissures situées aux bords de la zone de contact. Le fretting est présent dans une attache pale/disque d'une turbomachine. Il résulte de la superposition de deux contraintes de fatigue: une charge basse fréquence (LCF), induite par la force centrifuge provenant de la rotation du disque, et une charge haute fréquence (HCF), qui est une force sinusoïdale induite par les vibrations. C'est un phénomène difficile à modéliser et les industriels ne sont pas encore capables de le prédire avec une bonne précision. Ils sont contraints d'utiliser d'importants facteurs de sécurité. Par conséquent, la prédiction de la durée de vie d'un ensemble pale/disque sous sollicitation de fretting est maintenant devenue un problème majeur dans le domaine de l'ingénierie des turbomachines. L'un des principaux obstacles à cette prédiction est la détermination des champs de contrainte et de déformation au voisinage du contact. Une taille et une qualité de maillage appropriées permettent de surmonter ce problème. Un processus de calcul d'éléments finis pour calculer le champ de contrainte sous un contact de fretting induit par une sollicitation LCF + HCF dans une attache pale/disque est présenté. La combinaison de ce procédé avec le critère de fatigue de Dang Van permet de calculer un paramètre de criticité lié à la durée de vie. Ce procédé de modélisation est d'abord appliqué sur un modèle représentant un dispositif d'essai innovant, conçu chez Safran Helicopter Engines, permettant la superposition d'une charge statique et vibratoire sur une éprouvette en queue d'aronde. Le modèle reproduit les observations expérimentales avec une très bonne précision. Ce processus de modélisation est ensuite appliqué au modèle représentant une véritable géométrie de l'attache pale/disque.

Mots clefs : critère de Dang Van, fretting, chargement vibratoire, contact queue d'aronde, turbomachine, éléments finis

1. Introduction

Le fretting a fait l'objet de nombreuses recherches expérimentales [(1), (2), (3), (4) , (5), (6), (7), (8), (9) , (10), (11), (12)]. Ce type de dégradation se manifeste lorsque deux surfaces en contact sont animées d'un mouvement relatif périodique de très faible amplitude (quelques dizaines de microns de glissement). Deux types de régimes existent. Si la force tangentielle Q est inférieure au produit du coefficient de frottement μ et de la force normale P , deux zones différentes peuvent être observées dans la zone de contact. Au centre, les deux surfaces sont adhérentes l'une à l'autre alors qu'elles ont un mouvement relatif en bordure de contact. C'est le régime de glissement partiel. Le phénomène d'endommagement prépondérant est l'initiation de fissures situées aux bords de la zone de contact. Si Q est égal à $\mu.P$, il existe un mouvement relatif des deux surfaces sur toute la surface de contact. C'est le régime de glissement total pour lequel le mécanisme d'endommagement prédominant est l'usure. Un dispositif expérimental classique permettant la reproduction de tels chargements consiste en un cylindre ou une sphère écrasée sur un massif plan par une force P constante, et animé d'un déplacement cyclique perpendiculaire à la direction de P pour induire la force tangentielle Q (Figure 1.1). Le champ de contrainte induit peut être déterminé grâce à des formules analytiques. Les premières ont été proposées par McEwen, puis complétées par Johnson, Hills, Nowell et Sackfiel [(13) (14) (15)].

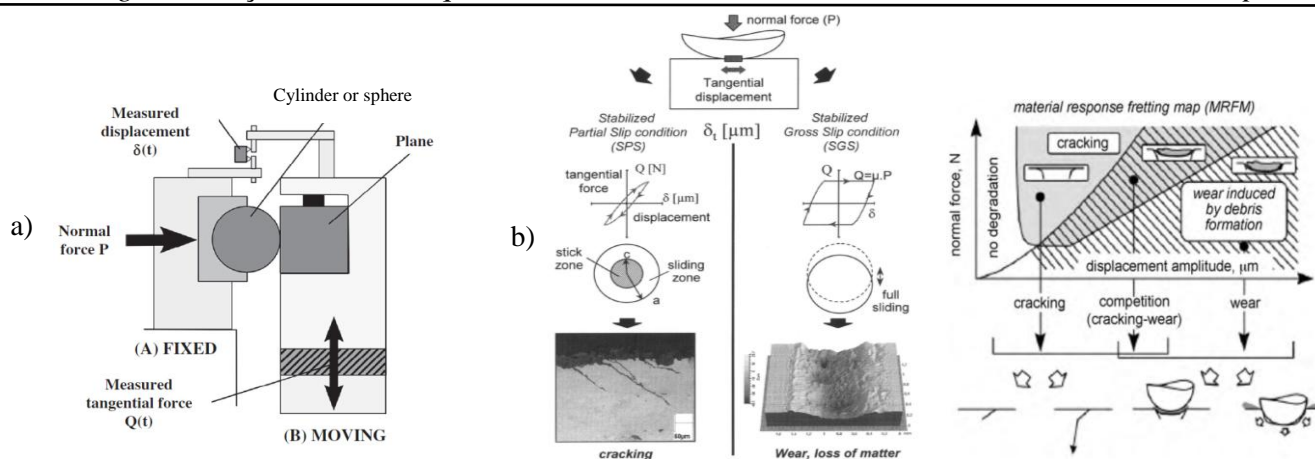


Figure 1.1 : a) Dispositif expérimental classique de fretting. b) Endommagement typique de fretting en fonction de l'amplitude de glissement. c) Carte de fretting (1)

Le régime de glissement partiel est répandu dans de nombreux cas d'application industriels. Deux illustrations courantes sont les attaches entre pales et disque dans l'industrie aéronautique (16) ainsi que les boulons (17).

Cet article se concentre sur l'amorçage de la fissuration de fretting dans une attache de pale-disque d'une turbomachine. Les pales sont attachées au disque par une connexion connue sous le nom de "pied de sapin". Entre deux à dix zones de contact peuvent être usuellement rencontrées. Un exemple avec six portées de contact est montré Figure 1.2. Le pied de sapin est soumis à deux chargements de fatigue importants. Une sollicitation basse fréquence (LCF), induite principalement par la force centrifuge provenant de la rotation de la roue de turbine, et des sollicitations vibratoires sinusoïdales hautes fréquences (HCF), qui sont induites par les vibrations (résonances des pales par exemple). Cette superposition de chargements HCF et LCF induit des frottements dans les zones de contact du pied de sapin. La prédiction et la modélisation des sollicitations hautes fréquences est une tâche complexe et des facteurs de sécurité doivent être utilisés pour garantir la durée de vie visée. L'amélioration de la prévision de durée de vie d'un assemblage pale/disque soumis à du fretting induit par les vibrations est un problème majeur dans le domaine de l'ingénierie aéronautique (16).

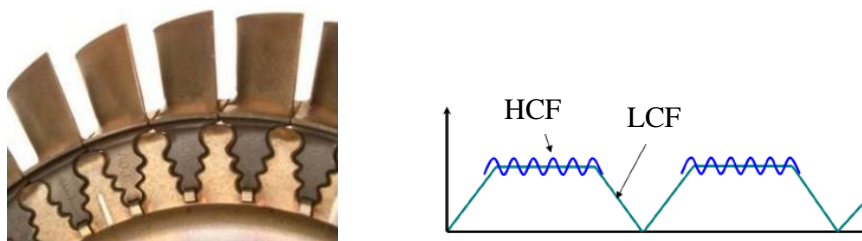


Figure 1.2 : liaison pale/disque soumise à un chargement combiné LCF + HCF Durant un vol.

La première difficulté pour fournir une telle prédiction est liée à la détermination du champ de contraintes et de déformations au voisinage des contacts où des gradients importants sont présents. En utilisant par exemple des techniques d'éléments finis, un maillage extrêmement fin est nécessaire pour capturer avec précision cet effet de gradient (18). L'inexactitude dans le calcul de ces champs peut entraîner d'importants écarts entre la durée de vie réelle et celle prédite [(5), (19), (18), (20)]. Des chercheurs ont proposé des méthodes pour approcher ces champs sans recourir à un maillage trop raffiné [(6), (21), (9)].

Une deuxième difficulté réside dans le calcul du comportement dynamique d'une structure dans laquelle existent des non-linéarités de contact. En effet, un calcul transitoire, associé à un maillage très fin dans la zone de contact rend le coût de calcul prohibitif. Certains auteurs proposent d'éviter la modélisation par éléments finis en simplifiant le contact pale/disque 3D par un contact équivalent 2D pour lequel des formules analytiques sont connues. Par exemple, Sinclair et Cormier (22) ont étudié le comportement des contraintes dans une attache en forme de queue d'aronde grâce à des formules analytiques en 2D. Une autre simplification répandue, proposée par Nowell et Dini (23), consiste à assimiler le

contact queue d'aronde à un contact poinçon/plan (Figure 1.3). Murthy *et al* (24) ont mis au point une méthode semi-analytique pour résoudre les contraintes sur la surface de toute géométrie de contact 2D qu'ils proposent d'appliquer à une géométrie de contact en queue d'aronde.

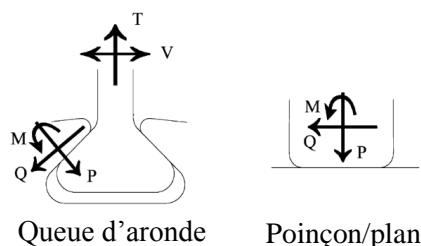


Figure 1.3: approximation d'un contact queue d'aronde par un contact poinçon/plan (23)

Dans le cas du pied de sapin, il a été démontré que la géométrie fortement tridimensionnelle d'une pale de turbine nécessite l'utilisation de modèles tridimensionnels pour obtenir des résultats représentatifs [(25), (26), (27)]. En plus de cela, le gradient de contraintes sur les bordures du contact [(28), (29)] impose de prendre en compte les non-linéarités du matériau [(30), (31)]. L'utilisation d'un modèle éléments finis semble inévitable malgré son coût de calcul.

L'aspect coûteux d'un calcul dynamique non-linéaire peut expliquer pourquoi il existe peu d'exemples de simulations numériques de contraintes dans un assemblage pale-disque soumis à une charge vibratoire dans la littérature. Les références se limitent à un chargement LCF uniquement [(25), (26), (28), (22), (32), (27), (29), (30)]. Le travail de Ma *et al* (33) peut néanmoins être cité. Dans cet article, les auteurs calculent les contraintes et les déplacements dans un contact 3D d'une attache pale/disque soumise à un chargement tangentiel périodique provenant de touches rotors-stators à l'aide d'un système d'intégration temporelle en utilisant le logiciel commercial ANSYS. Le problème de contact rotor-stator a l'avantage de permettre l'utilisation de géométries pale-disque simplifiées. C'est pourquoi les références qui traitent de la résolution des équations du mouvement par éléments finis avec contact et transitoire temporel dans une turbomachine concernent majoritairement la touche rotor-stator [(34), (35), (36)]. Pour contourner les coûts de calcul exorbitants inhérents aux éléments finis dans ce type de modèle, de plus en plus d'auteurs proposent des réductions de modèle basées sur un calcul non plus dans le domaine temporel, mais dans le domaine fréquentiel [(37), (38), (39) (40), (41)]. Néanmoins, ces méthodes sont récentes. Elles ne sont donc pas encore implémentées dans les logiciels de calculs commerciaux et leur précision doit être encore vérifiée.

La troisième difficulté réside dans l'évaluation correcte du coefficient de frottement. Il s'agit d'un paramètre dont l'impact est prépondérant dans le résultat de la simulation numérique. Une loi de Coulomb supposant un coefficient de frottement constant dans le temps et dans l'espace (42) est habituellement utilisée. L'usinage, les débris d'usure, la lubrification, la température, la géométrie sont autant des facteurs clés qui ont une influence sur ce paramètre [(43), (44), (45)]. Par ailleurs, la littérature montre qu'il existe un coefficient de frottement spécifique en glissement partiel. Quatre méthodes expérimentales sont couramment utilisées pour le déterminer. Fouvry *et al* (46) ont proposé une méthode basée sur le calcul de l'énergie dissipée pendant le régime de glissement partiel. Dans (6), le rapport entre les dimensions des surfaces de contact et de glissement est exploité. Une autre manière courante consiste à prendre comme valeur du coefficient le rapport Q/P (Q étant la force tangentielle maximale et P la force constante normale) à la transition entre les régimes de glissement partiel et total [(8), (44)]. Hills et Nowell ont estimé la valeur du coefficient de frottement en régime de glissement partiel à partir du rapport Q/P mesuré sous le régime de glissement total après un nombre suffisant de cycles pour affirmer que l'état de surface est stabilisé (5).

La dernière difficulté réside dans le choix d'un critère de fatigue. Des critères basés sur la mécanique linéaire élastique de la rupture (LEFM) [(10), (47), (8), (48)] ou des critères classiques peuvent être trouvés dans la littérature, comme SWT [(3), (7)], Dang Van [(49), (4)] et le critère de Fatemi-Socie (50). Une référence intéressante compare les résultats obtenus par ces trois critères ainsi que ceux de Crossland et de McDiarmid (19) pour des chargements de fretting. Dans (51), Bonnard *et al* comparent les prédictions des critères de Sines, Crossland et Gonçalves avec les résultats expérimentaux obtenus sur des éprouvettes soumises à des charges multiaxiales.

Le critère de Dang Van [(52), (53), (54)] est particulièrement intéressant. Dang Van part d'une observation expérimentale largement constatée qu'une fissure s'amorce le long d'un plan où le cisaillement est maximal [(55), (56), (57), (58), (59), (60)]. Mais le cisaillement seul n'est pas suffisant pour prédire l'initiation: la pression hydrostatique doit aussi faire partie du critère [(58), (61)]. En effet, plusieurs études expérimentales récentes suggèrent que la contrainte maximale de cisaillement et la pression hydrostatique sont des paramètres pertinents pour quantifier la durée de vie sous fatigue multiaxiale [(62), (59)]. En plus de cela, il reste valide pour des chargements non-proportionnels, qui sont présents lors d'un chargement de fretting [(63), (64)].

Ce critère de non-initiation s'écrit:

$$\max_n \{ \max_t (\|\tau(n, t)\| + \alpha * P_h(t)) \} \leq \beta$$

où P_h est la pression hydrostatique, τ est le cisaillement, t le temps, n le plan considéré, α et β sont des constantes du matériau. Il permet la définition d'une valeur adimensionnée $D_{DV} = \frac{\max_n \{ \max_t (\|\tau(n, t)\| + \alpha * P_h(t)) \}}{\beta}$. Si D_{DV} est inférieur à 1, il n'y aura pas de rupture.

Le critère Dang Van offre un bon compromis entre la représentation physique, l'industrialisation et la simplicité d'implémentation. De plus, il a déjà fait ses preuves dans plusieurs cas de rupture de contact, tels que le contact roulant [(65), (66), (67), (68)], le contact roue/rail [(69), (70), (54)], des roulements à billes (53), des essais de fretting [(49), (19)], une attache pale/disque (32), un boulon (17).

Un banc d'essai innovant permettant la reproduction d'une fissure fretting induite par un chargement combiné LCF et HCF sera présenté dans la première section de ce document avec des résultats d'essai. La seconde partie a pour but de présenter une méthode de modélisation par éléments finis capable de calculer les contraintes dans un contact de fretting induit par un chargement de fatigue combiné LCF + HCF. Les résultats de simulation seront comparés aux résultats expérimentaux. Pour finir, une application industrielle sur une géométrie réelle d'attache pale/disque sera présentée.

2. PREMECCY : banc expérimental pour la superposition d'une sollicitation cyclique en traction à une sollicitation vibratoire

Ce document se concentre sur la fissuration de fretting dans une attache pale-disque induite par un chargement vibratoire. Or, les dispositifs expérimentaux classiques de fretting ne sont pas appropriés pour représenter ce chargement. SAFRAN Helicopter Engines a conçu un dispositif d'essai, semblable à celui utilisé à l'université d'Oxford (20), capable de superposer une charge cyclique en traction à une charge vibratoire sur des spécimens représentatifs de la géométrie de contact pied de sapin.

2.1 Epreuves, matériaux et moyen expérimental

La géométrie hyperstatique d'un pied de sapin est simplifiée par une éprouvette queue d'aronde (Figure 2.1) pour permettre la maîtrise des conditions expérimentales.

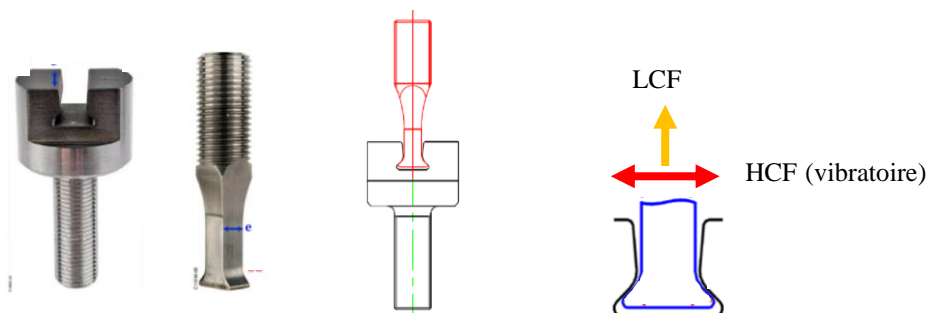


Figure 2.1: photos des éprouvettes et schéma de la superposition du chargement LCF + HCF

Le banc a été spécialement conçu pour effectuer des études expérimentales vibratoires. Il permet de superposer une force de fatigue en traction basse fréquence (LCF) à une sollicitation vibratoire transversale haute fréquence (HCF) sur éprouvette. La force LCF est appliquée par des vérins hydrauliques. La sollicitation vibratoire provient d'un pot vibrant piloté automatiquement en amplitude par un vibromètre laser. Pour mieux reproduire les conditions de chargement réelles, un four est ajouté. En effet, la température typique dans un pied de sapin est variable entre 400 ° C et 700 ° C. Une image de l'appareil est présentée Figure 2.2.

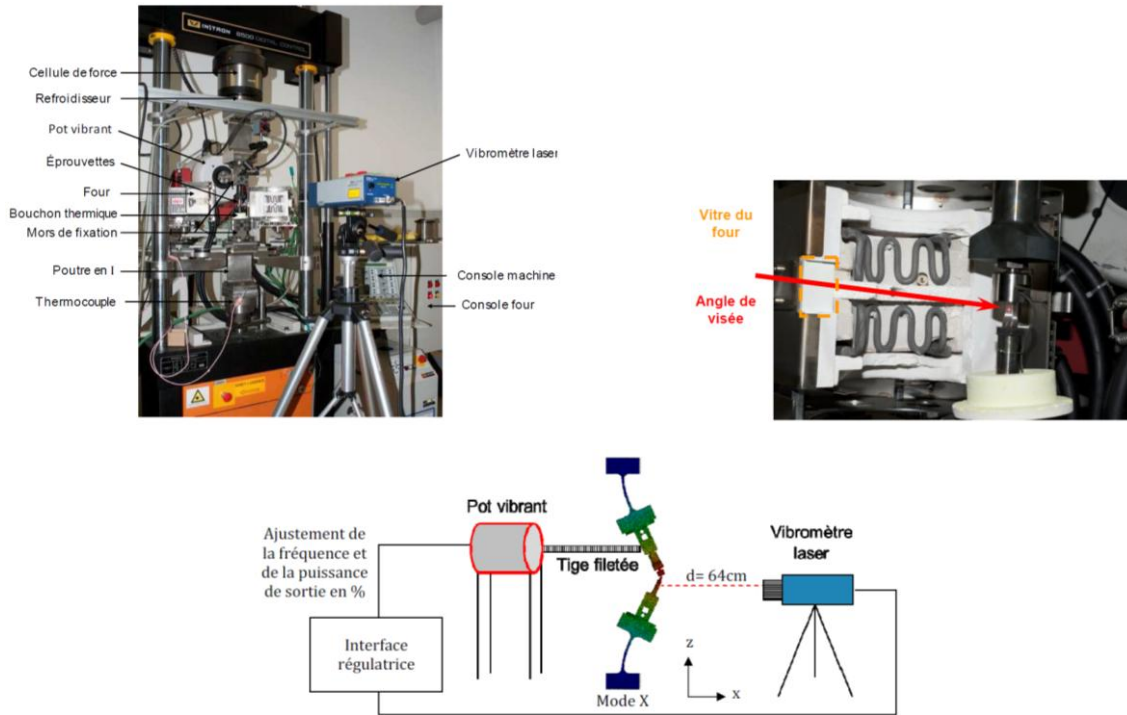


Figure 2.2: banc d'essai PREMECCY avec zoom sur l'éprouvette et schéma du système d'asservissement du pot vibrant.

2.2 Procédure expérimentale et résultats

Un essai préalable avec un chargement cyclique LCF uniquement a été réalisé pour servir de témoin et paramétrer la machine d'essai. Les vérins hydrauliques imposent un effort de traction cyclique sinusoïdal sur l'éprouvette et le pot vibrant n'applique aucun effort. Pour cet essai, les deux éprouvettes sont constituées d'un alliage de type base nickel polycristalins et isotropes. Les conditions de chargements sont les suivantes :

- Température du four : 650 °C
- $F_{\max} = 9000$ N
- $F_{\min} = 450$ N
- Fréquence LCF = 50 Hz
- Signal sinusoïdal

Sur les deux couples d'éprouvettes testés, le même faciès de rupture est observé : une fissure s'amorce perpendiculairement à la surface sur le rayon de raccordement entre le plan incliné et le fut de l'éprouvette avant de propager (Figure 2.3). Le nombre de cycles à rupture est de l'ordre de 10^4 cycles.

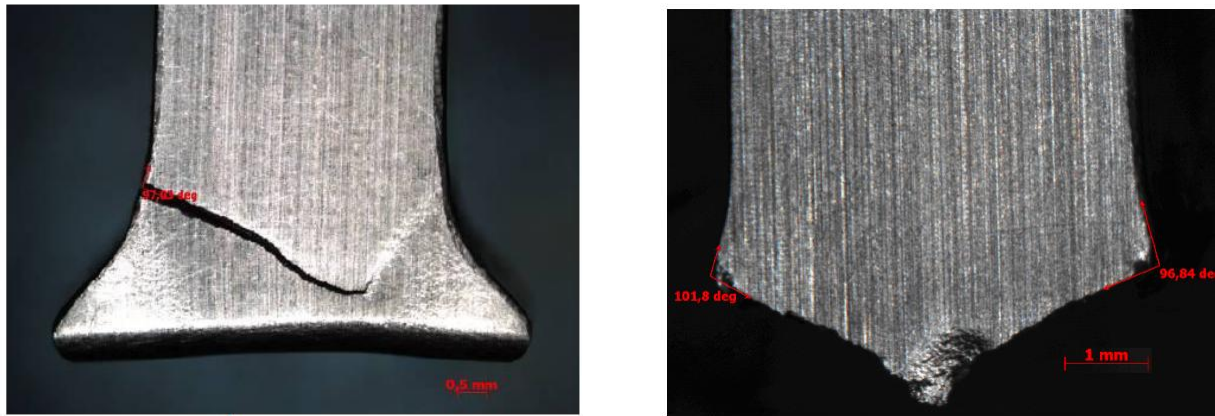


Figure 2.3 : ruptures de deux éprouvettes queue d'aronde différentes après un chargement LCF sinusoïdal.

A présent, le pot vibrant est actionné en plus des vérins hydrauliques afin d'appliquer sur l'éprouvette un chargement combiné LCF + HCF. La partie mâle de la queue d'aronde est un monocristal d'alliage base nickel appelé CMSX4, l'autre partie est faite d'un alliage UDIMET720 de base nickel polycristallin et isotrope. La charge de traction cyclique LCF assure une pression de contact moyenne de 1000 MPa. Sa valeur est déterminée par un calcul analytique. La fréquence du pot vibrant est définie de telle sorte que la zone de contact de l'éprouvette soit située sur un nœud de la déformée modale du système à cette fréquence. Fréquence et déformée modale sont déterminées par calcul éléments finis. En outre, son amplitude doit permettre un régime de glissement partiel entre les surfaces de contact. Après plusieurs essais, une valeur de déplacement maximal de 50 μm mesurée à l'aide du vibromètre laser remplit ce critère. Les conditions d'essai ainsi déterminées sont les suivantes:

- Température du four: 650 °C
- $F_{LCF_max} = 8650 \text{ N}$ (pour CMSX4/UDIMET720)
- Fréquence HCF = 331 Hz (5^{ème} mode, voir Figure 2.4)



Figure 2.4 : déformée modal du 5^{ème} mode du banc PREMECCY utilisé pour les essais. La fréquence est de 331 Hz.

14 couples d'éprouvettes sont utilisés. La reproductibilité de ces essais est satisfaisante puisque le même résultat a été observé sur 11 d'entre elles (Figure 2.5) : plusieurs fissures amorcent en surface le long de la bordure de contact. On retrouve un faciès de fissuration typique du fretting avec multi amorçage en bordure supérieure de contact, ainsi qu'une zone collée et une zone glissante qui se manifeste par une légère usure. Le nombre de cycles HCF jusqu'à rupture est de l'ordre de 10^6 .



Figure 2.5 : faciès de rupture de l'éprouvette queue d'aronde après 10^6 cycles.

Le but est de prédire ce type d'endommagement.

3. Modèle éléments finis pour la prédiction de fissurations de fretting sous un chargement combiné statique et vibratoire.

Dans la partie précédente, un banc d'essai expérimental innovant a permis de reproduire l'endommagement de fretting induit par un chargement vibratoire sur une éprouvette représentative d'un contact pied de sapin. Le but de cette partie est maintenant de pouvoir reproduire numériquement cet endommagement. Une méthode éléments finis permettant cela est donc présentée. Les résultats obtenus sur le banc PREMECCY serviront pour valider le processus numérique.

3.1 Processus d'analyse par éléments finis

Ici est présentée une méthode de calcul éléments finis permettant de déterminer le champ de contraintes dans un contact de fretting induit par un chargement combiné statique et vibratoire. Cette méthode est illustrée puis validée par un modèle éléments finis 3D du banc PREMECCY (Figure 3.1).

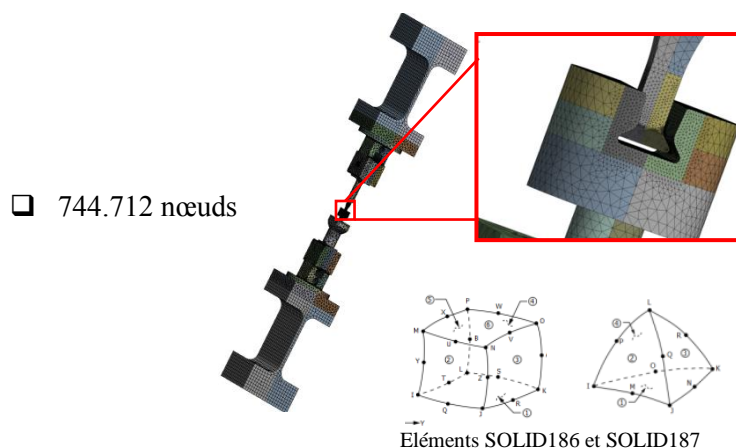


Figure 3.1 : modèle éléments finis 3D du banc PREMECCY

Un premier calcul statique élastoplastique est réalisé dans lequel seule la force LCF est appliquée. Suit alors un calcul modal linéaire, effectué sur le maillage déformé et précontraint par la force LCF. La « linéarisation » du modèle n'induit pas d'erreur dans le calcul de la déformée modale à partir du moment où la zone de glissement partiel est peu étendue à

l'échelle du contact. Une fois ce calcul modal précontraint terminé, il est nécessaire de normer le champ de déplacement modal afin de reproduire l'amplitude de débattement observée expérimentalement. Le débattement maximum du point visé par le laser (Figure 2.2) est de 0,05 mm conformément aux conditions expérimentales. Ce calcul permet l'obtention d'un champ de déplacement HCF. Le modèle est alors découpé autour du contact, formant ainsi un zoom structural. La somme des champs de déplacements LCF et HCF est appliquée aux frontières de ce zoom. Le cycle HCF est discrétisé en 13 pas de temps égaux. Le maillage dans la zone de contact est raffiné. La Figure 3.2 résume le processus de superposition des chargements LCF et HCF sur le zoom structural.

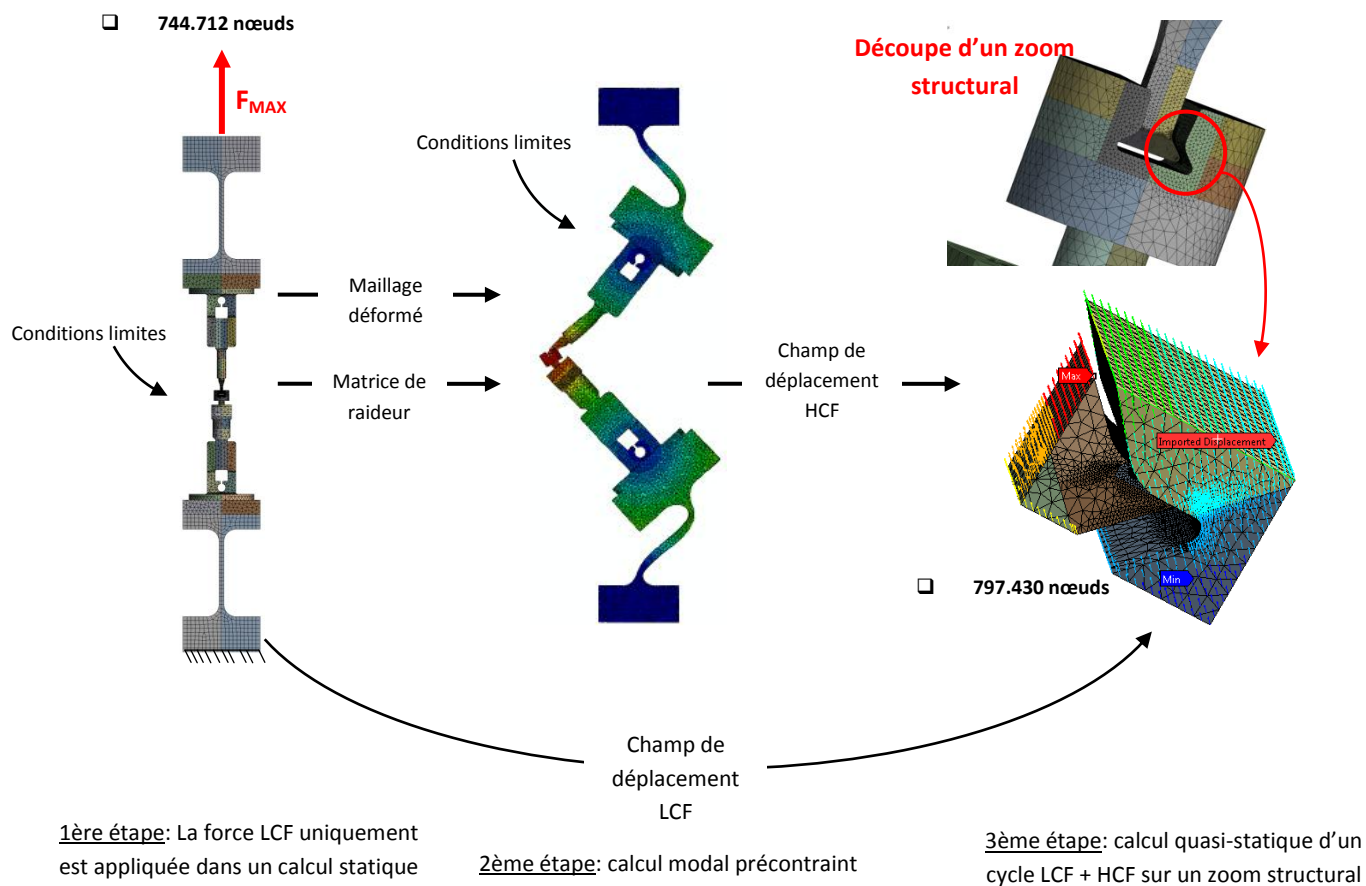


Figure 3.2 : schéma du processus de modélisation d'un chargement combiné LCF + HCF sur le banc PREMECCY

La taille de maille dans le contact, la méthode résolution du contact ainsi que la taille du zoom structural ont été préalablement validées grâce à un modèle 2D simplifié de dispositif d'essai cylindre/plan dont des formules analytiques sont connues. Ici, la taille de maille dans le contact est de 35 μm , soit 33 éléments dans la largeur du contact.

3.2 Prédiction de l'endommagement sur éprouvette queue d'aronde du banc PREMECCY soumise à un chargement combiné LCF + HCF

La méthode présentée précédemment est maintenant utilisée pour simuler le test présenté dans la partie 2. Les paramètres matériau α et β sont estimés grâce à des essais de fatigue en traction/compression à 10^7 cycles. Le critère de Dang Van est tout d'abord appliqué sur le cycle LCF uniquement. Le résultat est affiché Figure 3.3. Les résultats sont divisés par la valeur maximale $D_{DV_MAX_LCF}$ qui est de 3,8. On voit sur la figure que l'amorçage est prédit exactement sur la frontière entre le plan incliné et le rayon de raccordement avec le fut de l'éprouvette. C'est ce qui est observé expérimentalement (Figure 2.3).

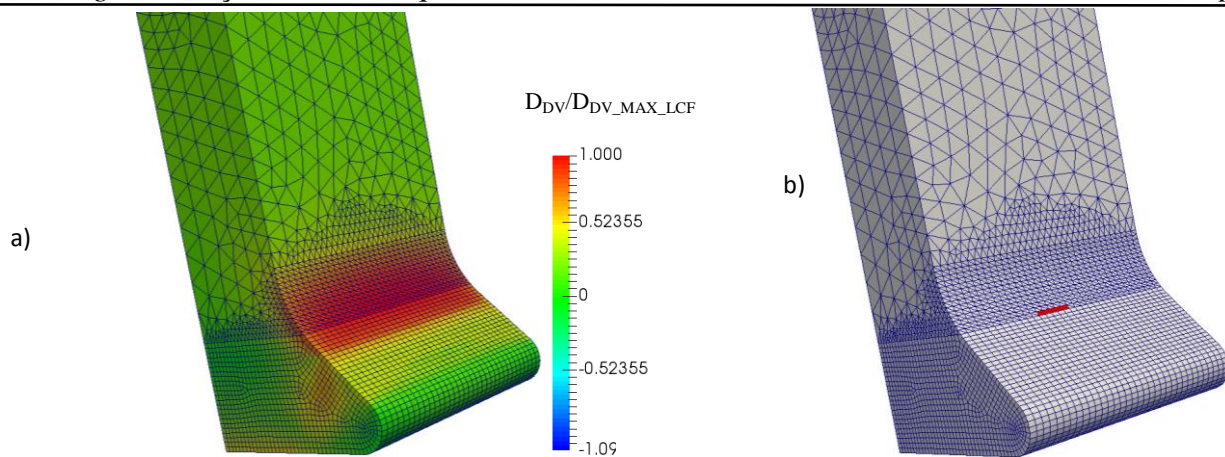


Figure 3.3 : a) critère de Dang Van sur l'éprouvette queue d'aronde au cours d'un cycle LCF. b) resélection des éléments tels que $D_{DV}/D_{DV_MAX_LCF} \geq 0,995$

Le critère de Dang Van est maintenant appliqué sur le cycle LCF + HCF. Pour les besoins de Safran Helicopter Engines, les calculs ont été menés sur un couple matériau différent de celui de l'essai. La partie mâle est modélisée en Inconel 738 et la partie femelle en Inconel 718. Ces matériaux sont largement utilisés dans les turbines d'hélicoptère. La force LCF appliquée en conditions limites est adaptée de manière à ce que la pression de contact moyenne reste cohérente avec l'essai (1000 MPa). Elle est alors de 6900 N. Les résultats sont présentés Figure 3.4. La valeur de $D_{DV_MAX_HCF}$ est de 1,6.

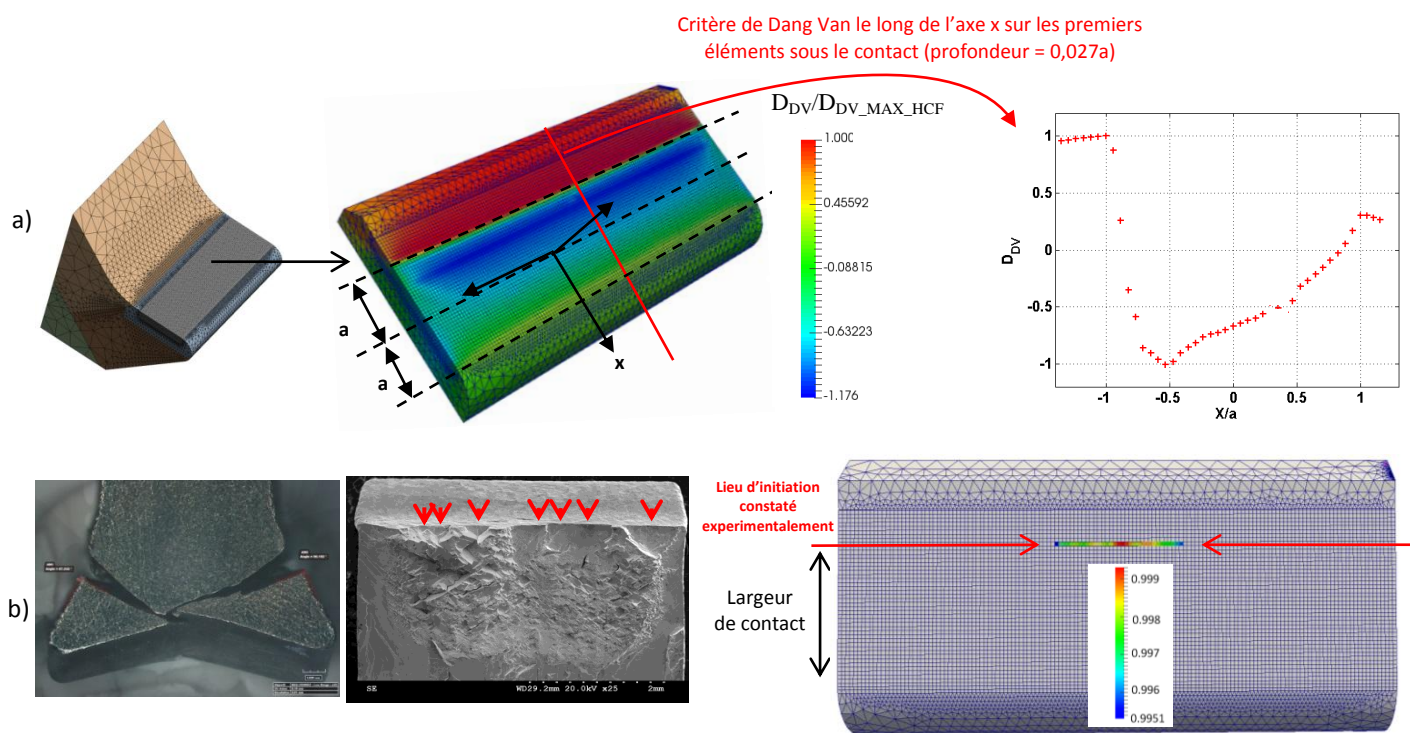


Figure 3.4 : a) maillage de l'éprouvette sur la queue d'aronde dans le zoom structural et distribution du critère de Dang Van sur la zone de contact. b) Eléments sur lesquels $D_{DV}/D_{DV_MAX_HCF} \geq 0,995$ et comparaison avec les résultats expérimentaux.

Sur la Figure 3.4.a), le critère est très faible à l'intérieur du contact, et devient subitement élevé sur les bordures de contact. Cette répartition est typique du fretting [(1), (49)]. Le pic d'endommagement observé en $x/a=-1$ est supérieur à celui observé en $x/a=1$. Cette observation concorde avec les observations expérimentales et avec la bibliographie [(25), (28)]. Sur Figure 3.4.b), les éléments estimés comme les plus critiques sont situés exactement sur le lieu d'amorçage constaté expérimentalement.

Le critère de Dang Van a prédit les lieux expérimentaux d'amorçage de fissure dans les deux cas (LCF puis HCF + LCF). En LCF uniquement, la fissure apparaît en surface sur la frontière entre le plan incliné de l'éprouvette et le rayon de raccordement avec le fut, qui est le lieu d'une importante concentration de contraintes. Une fois l'effort HCF superposé, la rupture se déplace sur la bordure supérieure de contact. De plus, les valeurs maximales du critère $D_{DV_MAX_LCF}$ et $D_{DV_MAX_HCF}$ sont cohérentes avec les durées de vie observées comme le résume le Tableau 1.

	Ordre de grandeur du nombre de cycles à rupture	Valeur maximale du critère de Dang Van
Essais de fatigue pour l'identification des paramètres matériau α et β	10^7	1
Essai LCF	10^4	3,8
Essai LCF + HCF	10^6	1,6

Tableau 1 : comparaison entre les durées de vie des éprouvettes observées expérimentalement et les valeurs maximales du critère de Dang Van

Les éprouvettes ont toutes cassé avant 10^7 cycles. Il était donc attendu que la valeur maximale du critère soit supérieure à 1. En plus de cela, l'essai à 10^6 cycles induit une valeur de 1,6 alors que celui à 10^4 induit une valeur de 3,8.

Ces comparaisons entre les lieux d'amorçage prédits et observés, ainsi qu'entre les valeurs du critère et les durées de vie expérimentales fournissent des éléments de validation de notre modèle.

4. Application sur un modèle pied de sapin

Dans la partie précédente, un processus de modélisation éléments finis a été présenté. Celui-ci permet de calculer le champ de contraintes sous un contact de fretting induit par un chargement combiné de sollicitations cycliques LCF et vibratoires. Le modèle a été validé grâce à des essais sur des éprouvettes queues d'aronde. Le but de cette partie est maintenant d'appliquer ce processus de modélisation à un modèle d'attache pied de sapin. Ce modèle doit servir à mener des études paramétriques de l'endommagement à certains effets (par exemple écarts géométriques, coefficient de frottement), ainsi que d'estimer la représentativité des essais.

4.1 Présentation du modèle

Tout d'abord, les champs de déplacements LCF et HCF sont déterminés grâce à un calcul 3D. L'effort LCF est une force volumique induit par la rotation du disque et par les dilatations thermiques (Figure 4.1). La vitesse de rotation utilisée dans le calcul a été préalablement identifiée comme la vitesse à laquelle le premier mode de flexion de la pale est excité en vibrations par les écoulements aérodynamiques.

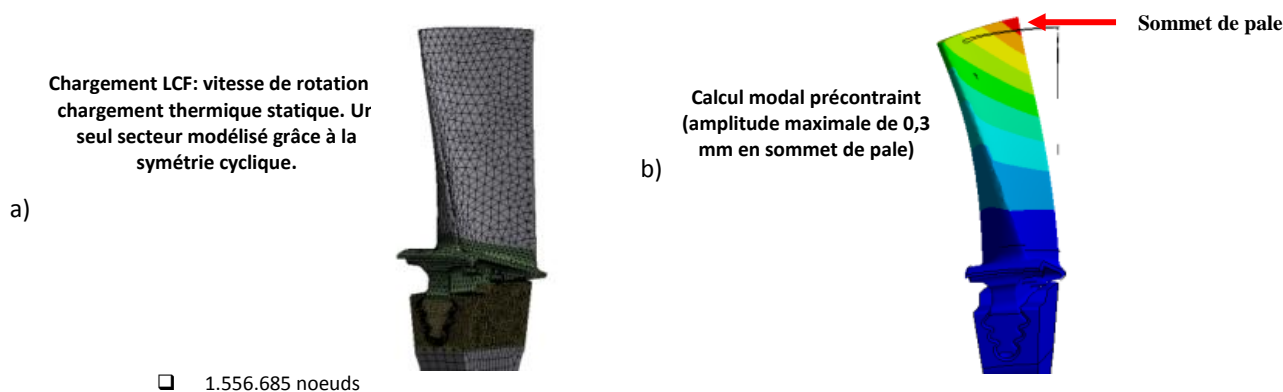


Figure 4.1: a) maillage et calcul statique LCF de précontrainte et b) déformée modale sur un modèle d'attache pale/disque 3D

La pale 3D est découpée selon un plan vertical perpendiculaire aux surfaces de contact du pied de sapin. Ce plan coupe l'une des deux portées inférieures en son milieu afin qu'il se situe dans une zone où les effets de bord seront peu présents.

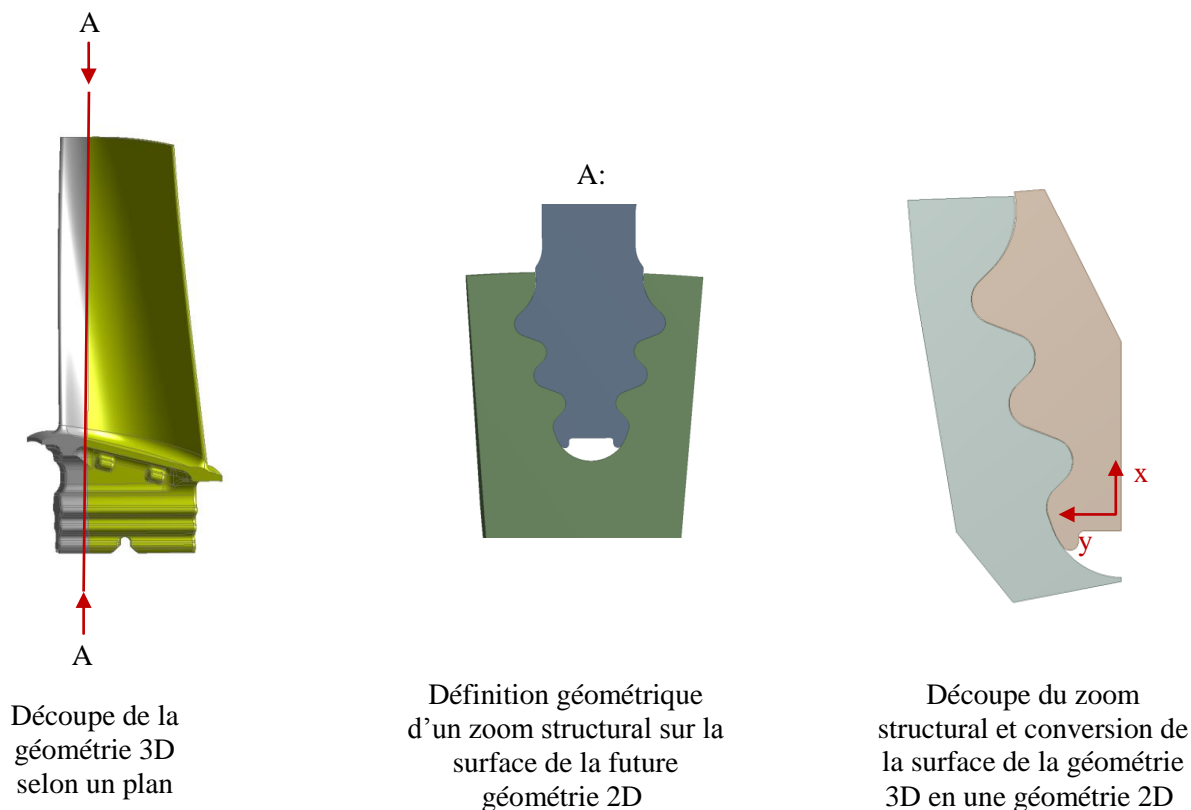


Figure 4.2 : conversion d'une géométrie d'attache pied de sapin 3D en une géométrie 2D

Cette conversion d'une géométrie 3D à une géométrie 2D, résumée sur la Figure 4.2, a pour but de réduire le coût de calcul du modèle pour permettre des analyses paramétriques futures. La pale étant sollicitée selon un mode de flexion, les déplacements anti-plans sont négligeables. De plus, les champs de déplacements LCF et HCF imposés sur les bords non-libres du zoom structural sont issus d'un calcul 3D. Le maillage et les conditions limites sont présentées Figure 4.3.

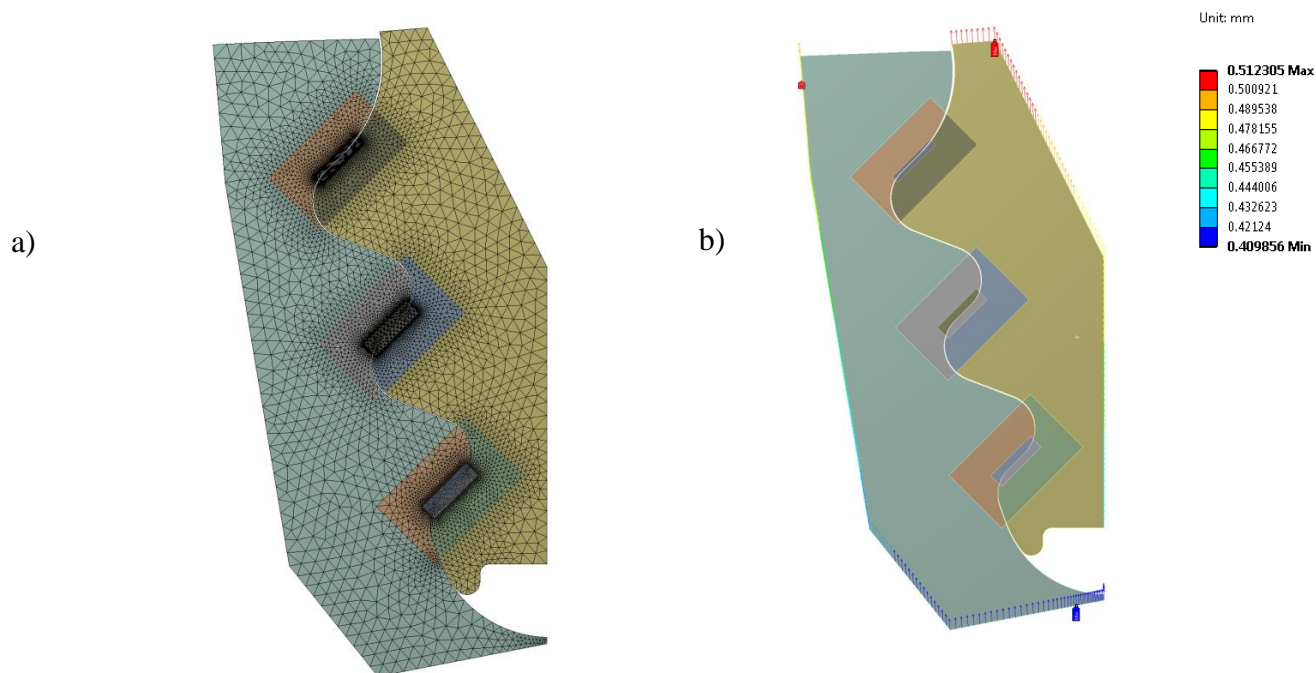


Figure 4.3 : a) maillage (40.006 nœuds au total) et b) import du champ de déplacement 3D sur le modèle d'attache pale-disque 2D

Les éléments sont en contraintes planes. Cette hypothèse, qui a également été utilisée dans d'autres modèles d'attache pale/disque 2D [(71), (28), (26)], est celle qui reproduit au mieux la répartition des pressions de contact sur chacune des trois portées. Les résultats du critère de Dang Van appliqué sur un cycle vibratoire sont présentés Figure 4.4.

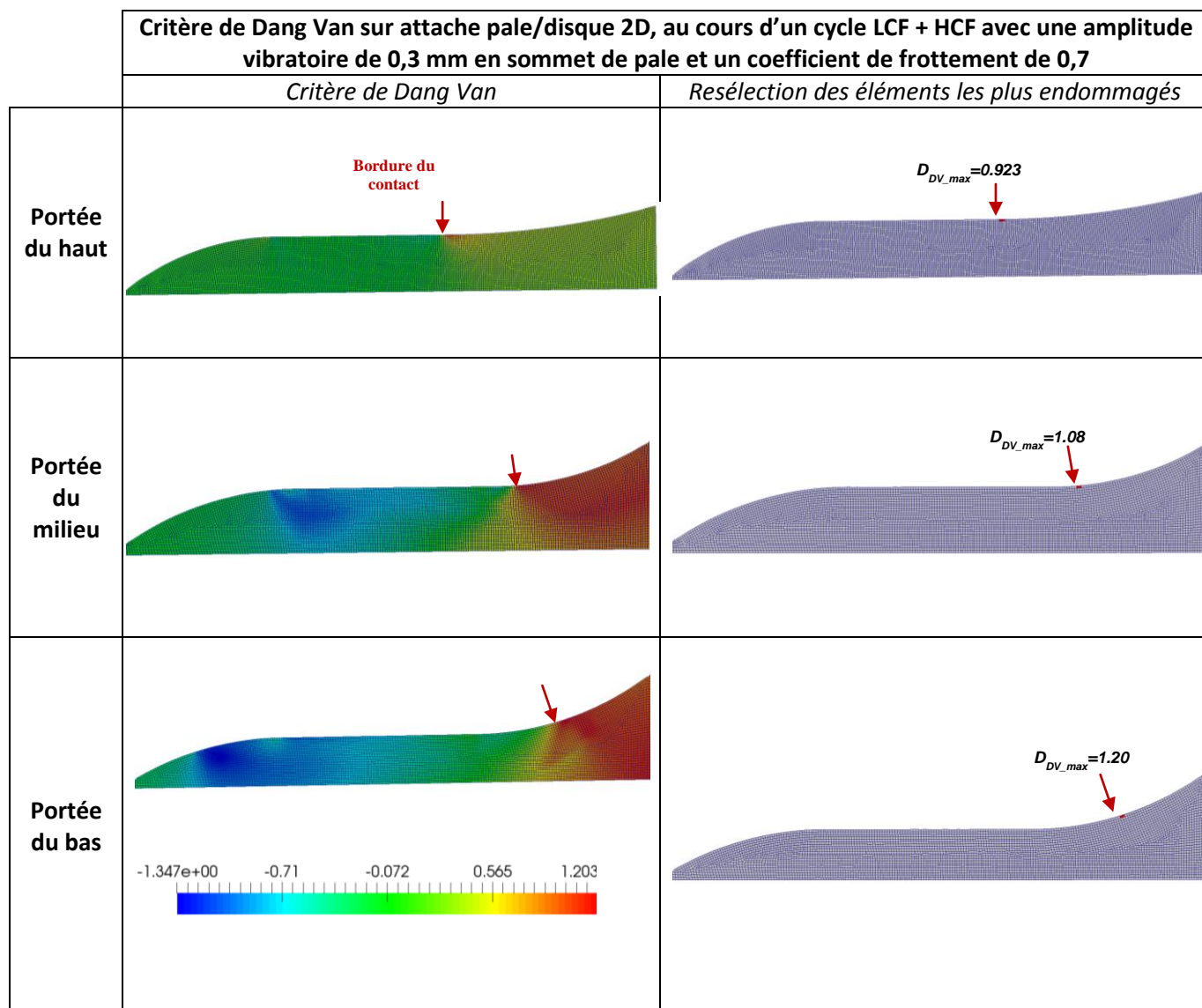


Figure 4.4: critère de Dang Van sur modèle 2D d'attache pale/disque

Sur chacune des trois portées, on observe une prédiction du critère conforme à une rupture par fretting : amorçage en bordure supérieure de contact et critère négatif à l'intérieur du contact. Sur la Figure 4.5 sont affichés pour chaque élément les couples (τ, P_h) identifiés comme critiques par le critère de Dang Van sur le cycle vibratoire.

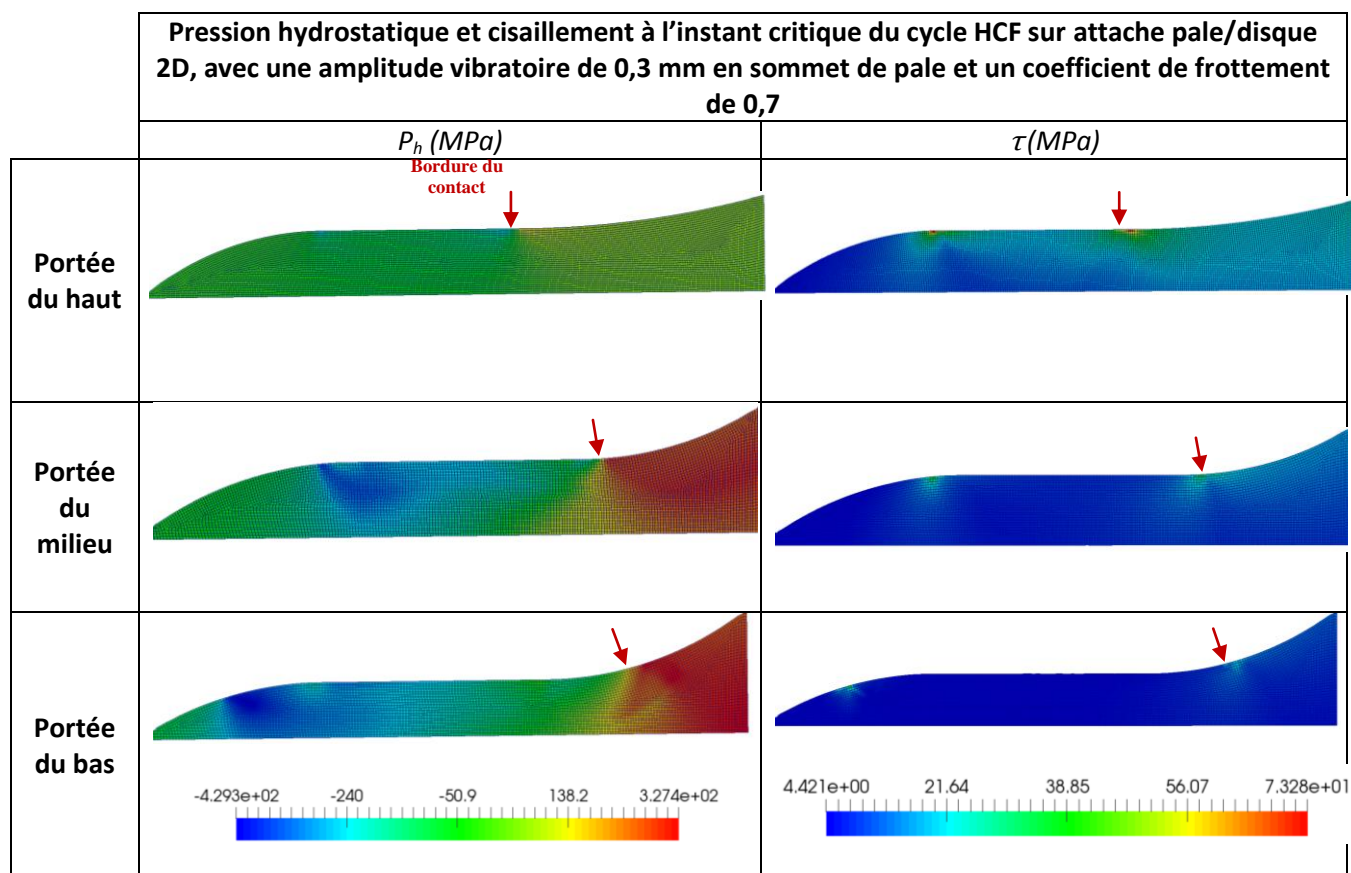


Figure 4.5: pression hydrostatique et cisaillement à l'instant critique de chaque élément au cours d'un cycle vibratoire sur le modèle 2D d'attache pale/disque.

La pression hydrostatique est faible dans le contact avant d'augmenter subitement en bordure supérieure. On retrouve le comportement constaté sur l'éprouvette queue d'aronde dans la partie 3.2. Cela indique une contrainte de traction importante. On note que le maximum de pression hydrostatique se situe sur la portée du bas, et son minimum sur la portée du haut. Cette répartition coïncide avec celle de l'effort normal sur les trois portées qui est telle que la portée du bas est la plus chargée, et celle du haut la moins chargée. Dans cette configuration nominale de conception de l'attache pale/disque, l'effort normal total dû à la force centrifuge est réparti à 40 % sur les portées du milieu et du bas et à 20 % sur celle de haut, ce qui explique la faible pression hydrostatique sur cette dernière par rapport aux deux autres. Quant au cisaillement, son maximum se trouve sur la portée du haut alors qu'il est négligeable sur celle du bas. Cela s'explique par la déformée modale de la pale, visible sur la Figure 4.3.b). C'est un mode de flexion dont l'amplitude de débattement maximale se situe en sommet de pale. Plus on descend le long de l'attache, plus cette amplitude est faible. Ainsi, le débattement est plus élevé sur la portée du haut, induisant des contraintes de cisaillement plus fortes. Ces résultats montrent que la pression hydrostatique est davantage apportée par l'effort statique, alors que le cisaillement est majoritairement induit par l'effort vibratoire. Le critère de Dang Van permet d'évaluer dans le calcul de fatigue les apports de chacune des deux composantes (statique et vibratoire) du chargement total.

Malgré l'effort vibratoire plus marqué sur la portée du haut, le critère de Dang Van prédit une rupture sur celle du bas du fait de la forte pression hydrostatique sur cette dernière. L'effort statique joue donc un rôle important dans la durée de vie en fretting vibratoire. Il existe en particulier deux paramètres influents sur la pression hydrostatique qui sont susceptibles de modifier considérablement les résultats du critère de fatigue, ainsi que l'ordre de criticité des trois portées. Le premier est un paramètre géométrique. Une liaison pied de sapin est hyperstatique. Les aléas d'usinage peuvent donc modifier la répartition de l'effort normal total dû à la force centrifuge. Une étude paramétrique des écarts de fabrication sur la durée de vie permettra d'évaluer son impact sur les résultats. Le deuxième est le paramètre matériau α du critère de Dang Van, qui représente le poids donné à la pression hydrostatique dans le calcul du critère. Cette variable s'identifie expérimentalement par des essais de fatigue en flexion et en torsion alternées. Les résultats de ce type d'essai n'étant pas

disponibles pour les matériaux étudiés dans ce projet, les paramètres α et β ont été estimés grâce à des essais de fatigue en traction/compression. Il existe donc une incertitude sur leur valeur respective qui devra être corrigée en réalisant les essais de fatigue nécessaires. Avant cela, une étude paramétrique de l'impact de α sur l'endommagement est en cours de réalisation afin d'évaluer son réel impact sur les résultats.

5. Conclusion

Dans cet article, un banc d'essai innovant permettant la superposition d'une charge statique à une charge vibratoire sur une éprouvette représentative d'une portée d'un pied de sapin a été présenté. Les résultats expérimentaux mettent en exergue un endommagement par fretting conforme aux observations sur éprouvette queue d'aronde. Une méthode de calcul, associant éléments finis et critère de Dang Van, a permis de simuler numériquement cet endommagement. Les résultats expérimentaux ont permis la validation de la simulation. De futurs essais sur le dispositif PREMECCY avec éprouvettes queue d'aronde apporteront des éléments de validation supplémentaires. La méthode a ensuite été appliquée à un modèle 2D d'attache pale/disque. Les résultats prédisent un endommagement de fretting et montrent que le critère de Dang Van permet de décomposer les deux aspects statique et vibratoire du chargement dans le calcul de fatigue.

Les résultats de cette nouvelle méthode de modélisation, peu coûteuse en ressources numériques, sont prometteurs. La méthode de calcul est utilisée sur d'autres configurations de chargement du banc d'essai PREMECCY pour étudier l'impact de divers paramètres sur la durée de vie. Par exemple, la valeur du coefficient de frottement, la force statique et l'amplitude vibratoire. Les résultats ainsi obtenus fourniront par ailleurs des éléments de comparaison avec les futurs essais sur éprouvette queue d'aronde.

Sur le modèle pale/disque, une étude est menée pour juger de l'impact des écarts géométriques de l'attache. La liaison étant hyperstatique, les pressions de contact sur les portées peuvent être variables d'une pièce à l'autre, et ainsi induire des répartitions de durée de vie différentes entre les portées. Par ailleurs, il existe une incertitude quant aux valeurs des paramètres matériaux du critère de Dang Van utilisés. C'est pourquoi leur influence sur le résultat sera également étudiée en détail en attendant de disposer de résultats d'essai permettant de les identifier plus précisément. Parallèlement, la méthode de calcul est appliquée à un modèle 3D d'attache pied de sapin, ce qui permettra une comparaison plus fine avec le retour d'expérience.

1. **S.Fouvry, K.Elleuch et G.Simeon.** *Prediction of crack nucleation under partial slip fretting conditions.* Journal of Strain Analysis, 2002. pp. 549-564. Vol. 37.
2. **V.Lamacq, M-C.Dubourg, L.Vincent.** *A theoretical model for the prediction of initial growth angles and sites of fretting fatigue cracks.* Tribology International, 1997. pp. 391-400. Vol. 30.
3. **V.Fridrici, S.Fouvry, P.Kapsa, P.Perruchaut.** *Prediction of cracking in Ti-6Al-4V alloy under fretting-wear: use of the SWT criterion.* Wear, 2005. pp. 300-308. Vol. 259.
4. **M-C.Baietto, E.Pierres, A.Gravouil.** *A multi-model X-FEM strategy dedicated to frictional crack growth under cyclic fretting fatigue loadings.* International Journal of Solids and Structures, 2010. pp. 1405-1423. Vol. 47.
5. **J-A.Araújo, D.Nowell.** *The effect of rapidly varying contact stress fields on fretting fatigue.* International Journal of Fatigue, 2002. pp. 763-775. Vol. 24.
6. **H.Proudhon, S.Fouvry et J-Y.Buffière.** *A fretting crack initiation prediction taking into account the surface roughness and the crack nucleation process volume.* International Journal of Fatigue, 2005. pp. 569-579. Vol. 27.
7. **H.Proudhon, S.Fouvry et G-R.Yantion.** *Determination and prediction of the fretting crack initiation: introduction of the (P,Q,N) representation and definition of a variable process volum.* International Journal of Fatigue, 2006. pp. 707-713. Vol. 28.
8. **S.Muñoz, H.Proudhon, J.Domínguez, S.Fouvry.** *Prediction of the crack extension under fretting wear loading conditions.* International Journal of Fatigue, 2006. pp. 1769-1779. Vol. 28.

9. **R.Amargier, S.Fouvry, L.Chambon, C.Schwob, C.Poupon.** *Stress gradient effect on crack initiation in fretting using a multiaxial fatigue framework.* International Journal of Fatigue, 2010. pp. 1904-1912. Vol. 32.
10. **C.Gandiolle et S.Fouvry.** *Experimental analysis and modeling of the crack arrest condition under severe plastic fretting fatigue conditions.* Procedia Engineering, 2013. pp. 783-792. Vol. 66.
11. **K.Endo, H.Goto, T.Nakamura.** *Effects of cycle frequency on fretting fatigue life of carbon steel.* Bulletin of JSME, 1969. pp. 1300-1308. Vol. 12.
12. **H.Proudhon, J-Y.Buffière, S.Fouvry.** *Three-dimensional study of a fretting crack using synchrotron X-ray microtomography.* Engineering Fracture Mechanics, 2007. pp. 782-793. Vol. 74.
13. **A.Sackfield, D.Hills.** *A note on the Hertz contact problem: a correlation of standard formulae.* Journal of Strain Analysis, 1983. pp. 195-197. Vol. 18.
14. —. *Some useful results in the classical contact problem.* Journal of Strain Analysis, 1983. pp. 101-105. Vol. 18.
15. **J-A.Williams, R-S.Dwyer-Joyce.** *Contact between solid surfaces.* CRC Press LLC, 2001.
16. **T.Nicholas.** *Material allowables for high cycle fatigue in gas turbine engines.* U.S Air Force Research Laboratory, 1999.
17. **Y.Fares, M.Chaussumier, A.Daidie, J.Guillot.** *Determining the life cycle of bolts using a local approach and the Dang Van criterion.* Fatigue Fract Engng Mater Struct, 2006. pp. 588-596. Vol. 29.
18. **W-S.Sum, E-J.Williams, S-B.Leen.** *Finite element, critical plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations.* International Journal of Fatigue, 2005. pp. 403-416. Vol. 27.
19. **J-A.Araújo, D.Nowell et R-C.Vivacqua.** *The use of multiaxial fatigue models to predict fretting fatigue life of components subjected to different contact stress fields.* Fatigue Fract Engng Mater Struct, 2004. pp. 967-978. Vol. 27.
20. **D.Nowell, D.Dini, D-A.Hills.** *Recent developments in the understanding of fretting-fatigue.* Engineering Fracture Mechanics, 2006. pp. 207-222. Vol. 73.
21. **R.Ferré, S.Fouvry, B.Berthel, J-A.Ruiz-Sabariego.** *Stress gradient effect on the crack nucleation process of Ti-6Al-4V titanium alloy under fretting loading: comparison between non-local fatigue approaches.* International Journal of Fatigue, 2013. pp. 56-67. Vol. 54.
22. **G-B.Sinclair, N-G.Cormier.** *Contact stresses in dovetail attachments: physical modeling.* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2002. pp. 325-331. Vol. 124.
23. **D.Nowell et D.Dini.** *Stress gradient effects in fretting fatigue.* Tribology International, 2003. pp. 71-78.
24. **H.Murthy, G.Harish, T-N.Farris.** *Efficient modeling of fretting of blade/disk contacts including load history effects.* Journal of Tribology, 2004. pp. 56-64. Vol. 126.
25. **K.Anandavel, R-V.Prakash.** *Effect of three-dimensional loading on macroscopic fretting aspects of an aero-engine blade-disc dovetail interface.* Tribology International, 2011. pp. 1544-1555. Vol. 44.
26. **S-A.Meguid, P-S.Kanth, A.Czekanski.** *Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs.* Finite Elements in Analysis and Design, 2000. pp. 305-317. Vol. 35.
27. **P.Papanikos, S-A.Meguid, Z.Stjepanovic.** *Three-dimensional nonlinear finite element analysis of dovetail joints in aeroengine discs.* Finite Elements in Analysis and Design, 1998. pp. 173-186. Vol. 29.
28. **G-B.Sinclair, N-G.Cormier, J-H.Griffin, G.Meda.** *Contact stresses in dovetail attachments: finite element modeling.* Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 2002. pp. 182-189. Vol. 124.
29. **J-R.Beisheim, G-B.Sinclair.** *On the three-dimensional finite element analysis of dovetail attachments.* Journal of Turbomachinery, 2003. pp. 372-379. Vol. 125.

30. **D-S.Wei, Y-R.Wang, X-G.Yang.** *Analysis of failure behaviors of dovetail assemblies due to high gradient stress under contact loading.* Engineering Failure Analysis, 2010. pp. 314-324. Vol. 18.
31. **C.Gandiolle, S.Fouvry.** *FEM modeling of crack nucleation and crack propagation fretting fatigue maps: Plasticity effect.* Wear, 2015. pp. 136-144.
32. **P.Wackers, V.Arrieta, M.Alquezar-Getan, A.Constantinescu, H.Maitournam.** *A modeling approach to predict fretting fatigue on highly loaded blade roots.* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2010. Vol. 132.
33. **H-Ma, D-Wang, X-Tai, B-Wen.** *Vibration response analysis of blade-disk dovetail structure under blade tip rubbing condition.* Journal of Vibrations and Control, 2015. pp. 1-20.
34. **M.Legrand, A.Batailly, B.Magnain, P.Cartaud, C.Pierre.** *Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines.* Journal of Sound and Vibration, 2012. pp. 2578-2601. Vol. 331.
35. **H-Ma, Y.Lu, Z.Wu, X.Tai, B.Wen.** *Vibration response analysis of a rotational shaft-disk-blade system with blade-tip rubbing.* International Journal of Mechanical Sciences, 2016. pp. 110-125. Vol. 107.
36. **A.Batailly, M.Legrand, P.Cartaud, C.Pierre.** *Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts.* Journal of Sound and Vibration, 2010. Vol. 329, pp. 5546-5562.
37. **E-P.Petrov.** *Method for sensitivity analysis of resonance forced response of bladed disk with nonlinear contact interfaces.* Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2009. pp. 1-9. Vol. 131.
38. **E-P.Petrov, D-J.Ewins.** *Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks.* Journal of Turbomachinery, 2003. pp. 364-371. Vol. 125.
39. **S.Nacivet, C.Pierre, F.Thouverez, L.Jezequel.** *A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems.* Journal of sound and vibration, 2003. pp. 201-219. Vol. 265.
40. **L.Salles, L.Blanc, F.Thouverez, A-M.Gouskov.** *Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces.* International journal of solids and structures, 2011. pp. 1513-1524. Vol. 48.
41. **D.Charleux, C.Gibert, F.Thouverez, J.Dupeux.** *Numerical and experimental study of friction damping in blade attachments of rotating bladed disks.* International journal of rotating machinery, 2006.
42. **D-R.Swalla, R-W.Neu.** *Influence of coefficient of friction on fretting fatigue crack nucleation prediction.* Tribology international, 2001. pp. 493-503. Vol. 34.
43. **M-M.Hamdy, R-B.Waterhouse.** *The fretting wear of Ti-6Al-4V and aged inconel 718 at elevated temperatures.* Wear, 1981. pp. 237-248. Vol. 71.
44. **S.Heredia, S.Fouvry.** *Introduction of a new sliding regime criterion to quantify partial, mixed and gross slip fretting regimes: correlation with wear and cracking processes.* Wear, 2010. pp. 515-524. Vol. 269.
45. **S.Fouvry, C.Paulin.** *An effective friction energy density approach to predict solid lubricant friction endurance: application to fretting wear.* Wear, 2014. pp. 211-226. Vol. 319.
46. **S.Fouvry, P.Kapsa, L.Vincent.** *Developments of fretting sliding criteria to quantify the local friction coefficient evolution under partial slip condition.* Tribology for Energy Conservation, 1998. pp. 161-172.
47. **L.Chambon et B.Journet.** *Modelling of fretting fatigue in a fracture-mechanics framework.* Tribology International, 2006. pp. 1220-1226. Vol. 39.
48. **J.Bellecave, S.Pommier, Y.Nadot, J.Meriaux, J-A.Araújo.** *T-stress based short crack growth model for fretting-fatigue.* Tribology International, 2014. pp. 23-34. Vol. 76.
49. **S.Fouvry, Ph.Kapsa, L.Vincent, K.DangVan.** *Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions.* Wear, 1996. pp. 21-34. Vol. 195.

50. **J.-A.Araujo, D.Nowell.** *Mixed high low fretting fatigue of Ti6Al4V: tests and modelling.* Tribology International, 2009. pp. 1276-1285. Vol. 42.
51. **V.Bonnand, J-L.Chaboche, P.Gomez, P.Kanouté, D.Pacou.** *Investigation of multiaxial fatigue in the context of turboengine disc applications.* International Journal of Fatigue, 2011. pp. 1006-1016. Vol. 33.
52. **Van, K. Dang.** *Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue.* Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, 1993. pp. 120-130.
53. **K.Dang Van, B.Griveau, O.Message.** *On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and application.* Mechanical Engineering Publications, 1989. pp. 479-496.
54. **K.Dang Van, G.Cailletaud, J-F.Flavenot, A.Le Douaron, H-P.Lieurad.** *Criterion for high cycle fatigue failure under multiaxial loading.* London : Biaxial and Multiaxial Fatigue, EGF 3, 1989. pp. 459-478.
55. **J.Lemaitre et J.-L.Chaboche.** *Mécanique des matériaux solides.* 2ème édition. DUNOD, 2004. Cours de 2ème cycle/master/écoles d'ingénieurs.
56. **H.Gao, N.Alagok, M-W.Brown, K-J.Miller.** *Growth of fatigue cracks under combined mode I and mode II loads.* Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853, 1985. pp. 184-202.
57. **N-J.Hurd, P-E.Irving.** *Smooth specimen fatigue lives and microcrack growth modes in torsion.* Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853, 1985. pp. 267-284.
58. **E-H.Jordan, M-W.Brown, K-J.Miller.** *Fatigue under severe nonproportional loading.* Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853, 1985. pp. 569-585.
59. **P.Davoli, A.Bernasconi, M.Filippini, S.Foletti, I.V.Papadopoulos.** *Independance of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress.* International Journal of Fatigue, 2003. pp. 471-480. Vol. 25.
60. **D-F.Socie, L-A.Waill, D-F.Dittmer.** *Biaxial fatigue of inconel 718 including mean stress effects.* Multiaxial Fatigue, ASTM STP 853, 1985. pp. 463-481.
61. **D.Bellett, F.Morel et P.Burrry.** *Influence des contraintes hydrostatiques sur la résistance en fatigue multiaxiale.* Grenoble : s.n. 18ème congrès français de mécanique, 27-31 Août 2007.
62. **F.Morel, T.Palin-Luc, C.Froustey.** *Comparative study and link between mesoscopic and energetic approaches in high cycle multiaxial fatigue.* International Journal of Fatigue, 2001. pp. 317-327. Vol. 23.
63. **E.Pierres.** *Simulation numérique multi-échelles de la propagation de fissures expérimentales sous chargement de fretting fatigue par la méthode des éléments finis étendus.* Septembre 2010. Thèse de doctorat de l'INSA de Lyon.
64. **V.Lamacq.** *Amorçage et propagation de fissures de fatigue sous conditions de fretting.* 1997. Thèse de doctorat de l'INSA de Lyon.
65. **N.Maouche, M.H.Maitournam et K.DangVan.** *On a new methode of evaluation of the inelastic state due to moving contacts.* Wear, 1997. pp. 139-147. Vol. 203-204.
66. **M.Ciavarella et H.Maitournam.** *On the Ekberg, Kabo and Andersson calculation of the Dang Van high cycle fatigue limit for rolling contact fatigue.* Fatigue Fract Engng Mater Struct, 2004. pp. 523-528. Vol. 27, Letter to the editor.
67. **H.Desimone, A.Bernasconi et S.Beretta.** *On the application of Dang Van criterion to rolling contact fatigue.* Wear, 2006. pp. 567-572. Vol. 260.
68. **M.Ciavarella, F.Monno, G.Demelio.** *On the Dang Van fatigue limite in rolling contact.* International Journal of Fatigue, 2006. pp. 852-863. Vol. 28.
69. **K.Dang Van, M.H.Maitournam.** *On some recent trends in modelling of contact fatigue and wear in rail.* Wear, 2002. pp. 219-227. Vol. 253.

70. **K.Dang Van, M.H.Maitournam, B.Prasil.** Elastoplastic analysis of repeated moving contact: application to railways damage phenomena. *Wear*, 1996. Vol. 196, pp. 77-81.
71. **Luke Anthony Maricic.** *Thermo-Mechanical Behaviour of Turbine Disc Assembly in the Presence of Residual Stresses*. 2013. Thèse de doctorat de l'université de Toronto.
72. **F-Q.Liming Chen, Y.Li, X.Zhang.** *Fundamental frequencies of turbine blades with geometry mismatch in fir-tree attachments*. *Journal of Turbomachinery*, 2006. pp. 512-516. Vol. 128.