

Principe de réciprocité appliqué au calcul de la dérivée de Fréchet de l'opérateur non linéaire de propagation d'ondes dans les milieux élastiques et viscoélastiques

S. ARHAB^a, G. LEFEUVE-MESGOUEZ^b et A. MESGOUEZ^c

- a. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, UMR 1114
EMMAH. (slimane.arhab@univ-avignon.fr)
- b. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, UMR 1114
EMMAH. (gaelle.mesgouez@univ-avignon.fr)
- c. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, UMR 1114
EMMAH. (arnaud.mesgouez@univ-avignon.fr)

Résumé :

Les équations de l'élastodynamique expriment une non linéarité entre les paramètres mécaniques et le champ des déplacements. Cette non linéarité fait partie des difficultés rencontrées lorsqu'on souhaite traiter le problème inverse. Nous proposons une méthode de calcul de la dérivée de Fréchet pour chaque paramètre mécanique. Son rôle est de linéariser localement le problème direct, ce qui permet d'associer à toute variation du paramètre étudié une variation du champ des déplacements résultant. Son calcul s'appuie sur le principe de réciprocité. Son évaluation numérique implique de résoudre le problème direct de la configuration étudiée, plus ceux des configurations fictives obtenues en permutant tour à tour l'émetteur avec les récepteurs. L'ensemble des paramètres mécaniques donne lieu à différentes expressions de la dérivée de Fréchet, qui pourront être introduites dans des algorithmes d'inversion performants.

Abstract :

The elastodynamic equations express a nonlinear link between the mechanical parameters and the displacements. Such a nonlinearity is one of the difficulties encountered when the inverse problem is addressed. For each mechanical parameter, we propose a formulation of the Fréchet derivative. Its role is to linearise locally the forward problem, by allowing to associate a small variation of displacements to a small variation of the studied parameter. its calculus is based on the reciprocity theorem, moreover, the numerical evaluation of this derivative involves solving the forward problem for the studied configuration, and those of the fictitious configurations resulting from a permutation of the emitter with each receiver. Mechanical parameters lead to different expressions of the Fréchet derivative, which can then be used to propose efficient inversion algorithms.

Mots clefs : élastodynamique ; opérateur de Fréchet ; problème inverse ; sol inhomogène ; réciprocité

1 Introduction

Les ondes mécaniques peuvent être utilisées pour reconstruire les paramètres d'un objet. Ce sujet de recherche trouve des applications dans des domaines tels que le sondage sismique, l'imagerie médicale ou encore le génie civil. Quel que soit le domaine abordé, le traitement des données expérimentales implique de résoudre un problème direct et un problème inverse. Dans le premier, nous supposons connus les paramètres mécaniques pour ensuite proposer un modèle qui prédit le champ des déplacements et/ou des contraintes, résultant par exemple de l'application d'une force extérieure par un émetteur sur la surface d'un objet. La recherche qui s'intéresse à la résolution des problèmes directs a connu ces dernières décennies l'émergence de méthodes numériques, capables de modéliser entièrement l'interaction des ondes mécaniques avec un milieu complexe en configuration tridimensionnelle [1, 2, 3]. La mise en œuvre de ces méthodes de résolution qui sont très coûteuses en mémoire et en temps de calcul, a été rendue possible en grande partie par le développement rapide de la capacité de calcul et de stockage des ordinateurs.

A contrario, nous résolvons un problème inverse lorsque nous estimons au mieux les paramètres mécaniques de l'objet, à partir des champs mécaniques, que nous mesurons par exemple sur un ensemble de détecteurs positionnés sur sa surface. Ce type de problème est délicat à résoudre car il est mal posé au sens de Hadamard [4]. De surcroît, les mesures sont reliées aux paramètres de façon non linéaire rendant ainsi difficile leur inversion. Toutefois, des travaux ont montré par le passé qu'il est possible d'inverser de manière itérative des données obtenues sur des ondes sismiques en calculant numériquement les dérivées de Fréchet de la fonction coût, définie comme l'écart entre les mesures du champ et les données simulées pour chaque estimation des paramètres. Chacune de ses dérivées a été obtenue pour chaque paramètre mécanique, en couplant un champ des déplacements solution du problème direct étudié, avec un autre champ qui, lui, est solution d'un problème adjoint. Ce dernier a pour configuration le même objet, mais soumis à une source fictive construite en simulant dans l'objet une rétropropagation de la différence entre le champ modélisé et le champ mesuré. Ce travail a d'abord été conduit dans le cadre de l'approximation acoustique [5], puis élargi à la théorie des ondes élastiques [6, 7]. Par ailleurs, cette formulation du problème adjoint a également été introduite en assimilation d'observation météorologique [8] pour calculer explicitement le gradient de la fonction coût. Ce concept a également été étudié et appliqué en sismologie globale pour caractériser la structure de la terre [9, 10], où l'algorithme utilisé faisait appel à chaque itération à une résolution du problème direct et de son adjoint.

Les dérivées de Fréchet sont intégrées dans des méthodes inverses d'optimisation locale. Par exemple, il y a l'approche de Newton-Kantorovitch [11] dont le principe consiste, premièrement à linéariser localement le problème direct. La dérivée de Fréchet permet justement de faire cette linéarisation, et donne lieu à un opérateur localement linéaire qui associe une faible variation des données à une faible variation du paramètre recherché. Il est donc possible de construire un processus itératif, dans lequel nous inversons à chaque étape un problème direct linéarisé localement. L'aspect mal posé de ce problème est quant à lui traité grâce à l'introduction, sous forme de régularisation, d'informations connues *a priori* sur le paramètre mécanique recherché [12]. Notons que les dérivées de Fréchet dépendent de l'estimation qui est faite sur les paramètres de l'objet, ce qui implique leur réévaluation numérique à chaque nouvelle étape de l'algorithme itératif de reconstruction.

Dans ce travail, nous montrons que le principe de réciprocité peut être utilisé pour déduire des dérivées de Fréchet directement à partir des équations fondamentales. Nous nous plaçons sous l'hypothèse d'un objet viscoélastique, isotrope et inhomogène. Dans ce cas, les paramètres mécaniques tels que la masse volumique et les coefficients de Lamé sont représentés par des fonctions de l'espace. Des formes élégantes de la dérivée de Fréchet sont déduites par une méthodologie qui exploite le principe de réciprocité, et dans laquelle les équations de l'élastodynamique sont réécrites en partie au sens des distributions. Ces dérivées de Fréchet, qui sont des opérateurs, sont construites en couplant le modèle direct qui prédit les données pour la configuration étudiée, avec tous les modèles des configurations réciproques obtenus en permutant fictivement tour à tour l'émetteur avec les différents récepteurs. Ce principe de calcul a déjà été proposé dans le contexte des équations de Maxwell [13], puis appliqué dans différents schémas d'inversion pour des applications en détection d'objets enfouis [14] ou en profilométrie optique [15, 16]. En ce qui nous concerne, une forme particulière de l'opérateur de Fréchet a été calculée pour chaque paramètre mécanique en régime harmonique. Les premiers résultats numériques obtenus vont dans le sens d'une validation de ces expressions. Un code de calcul basé sur une méthode semi-analytique [18, 17] a en effet permis de vérifier numériquement l'expression de l'opérateur de Fréchet calculée par rapport à la densité, pour un milieu semi-infini de type sol, ces résultats sont décrits en annexe (A.1). Ce travail constitue une étape clef qui pourra servir à terme à élaborer une méthode inverse itérative appliquée à la caractérisation mécanique d'un milieu inhomogène.

2 Les équations de l'élasticité et de la viscoélasticité

2.1 Hypothèses et configuration d'étude

Nous considérons un solide de volume borné \mathcal{V} , délimité par sa surface \mathcal{S} . Nous travaillons sous les hypothèses d'un milieu linéaire et isotrope. Nous considérons le cas général où l'objet est constitué d'un milieu inhomogène. Par conséquent, les paramètres mécaniques du milieu sont représentés par des fonctions de l'espace tridimensionnel décrit par son vecteur position $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, avec $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 + x_3 \mathbf{x}_3$ en coordonnées cartésiennes.

2.2 Équation du mouvement

Le principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \partial_t^2 u_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Où :

- $\rho = \rho(\mathbf{r})$: densité ou masse volumique du matériau.
- $f_i = f_i(\mathbf{r}, t)$: $i^{\text{ème}}$ composante de la densité de force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$.
- $u_i = u_i(\mathbf{r}, t)$: $i^{\text{ème}}$ composante du champ des déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.
- $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$: $ij^{\text{ème}}$ composante du tenseur symétrique des contraintes $\bar{\sigma}(\mathbf{r}, t)$.

- ∂_t^2 : dérivée seconde temporelle ($\partial_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}$). De même, nous écrivons ($\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$), ($\partial_j^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$) et ($\partial_{ik} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$) pour les dérivées et les dérivées secondes spatiales.

En introduisant l'opérateur vectoriel nabla ∇ l'équation Eq (1) se réécrit sous une forme plus condensée :

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \bar{\sigma}^\dagger + \mathbf{f} \quad (2)$$

Ici le symbole \dagger est utilisé pour désigner le tenseur transposé. Cependant, d'après la loi de comportement du milieu décrite ci-dessous, le tenseur des contraintes est symétrique $\bar{\sigma}^\dagger = \bar{\sigma}$.

2.3 Loi de comportement

La loi de comportement est donnée par la loi de Hooke, elle s'écrit sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\mathbb{I}} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) \quad (3)$$

Avec :

- $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$: 1^{er} coefficient de Lamé.
- $\mu = \mu(\mathbf{r})$: 2^{ème} coefficient de Lamé.
- $\bar{\mathbb{I}}$: tenseur identité.

2.4 Cas du régime harmonique

Nous travaillons avec une représentation complexe, sous l'hypothèse d'une dépendance temporelle harmonique de la forme $\propto \exp[+i\omega t]$. Par exemple, la force excitatrice s'écrit : $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) \exp[+i\omega t]\}$, avec $\Re\{\}$ qui désigne la partie réelle. Pour alléger l'écriture, le facteur $\exp[+i\omega t]$ sera systématiquement omis, et l'amplitude vectorielle complexe $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r})$ sera simplement notée $\mathbf{f}(\mathbf{r})$. Nous ferons de même pour les quantités \mathbf{u} et $\bar{\sigma}$. L'équation du mouvement et la loi de comportement deviennent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\sigma} = -\omega^2 \rho \mathbf{u} - \mathbf{f} & \text{équation du mouvement} \\ \bar{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\mathbb{I}} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) & \text{loi de comportement} \end{cases} \quad (4)$$

3 Écriture au sens des distributions

Désormais, nous nous proposons de modifier l'équation du mouvement dans le système d'équations Eqs (4) en introduisant les quantités \mathbf{f} , \mathbf{u} et $\bar{\sigma}$ au sens des distributions. Après des étapes de calculs qui sont reportées en annexe (A.2), nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} = -\omega^2 \rho \mathbf{u} - \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S, \quad \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \quad (5)$$

Sachant que :

- $\nabla \cdot \bar{\sigma} = \{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} - \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S$, avec : $\{\nabla \cdot \bar{\sigma}\}$ la partie dite régulière de la distribution $\nabla \cdot \bar{\sigma}$, car elle ignore le saut subit par le tenseur des contraintes sur la surface S de l'objet. Le terme $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S$ représente quant à lui la partie singulière qui va justement tenir compte de ce saut. On précise que \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire normal à cette surface, et que δ_S fait référence à la distribution surfacique de Dirac décrite en annexe (A.4).
- $\rho \mathbf{u}$: distribution régulière associée au produit de la densité avec le champ des déplacements.
- $\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$: distribution singulière ponctuelle de Dirac, qui permet de décrire la force appliquée au point \mathbf{r}_o .

4 Principe de l'approche

Avant de décrire l'approche qui permet de formuler l'expression de la dérivée de Fréchet pour chaque paramètre mécanique, nous allons reprendre le couple d'équations Eqs (4), et y intégrer la nouvelle expression de l'équation du mouvement écrite au sens des distributions Eq (5). Ce qui donne :

$$\begin{cases} \{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} = -\omega^2 \rho \mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S + \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o), & \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \\ \bar{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\mathbb{I}} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger), & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (6)$$

4.1 Introduction des configurations (a), (b), (b') et (a')

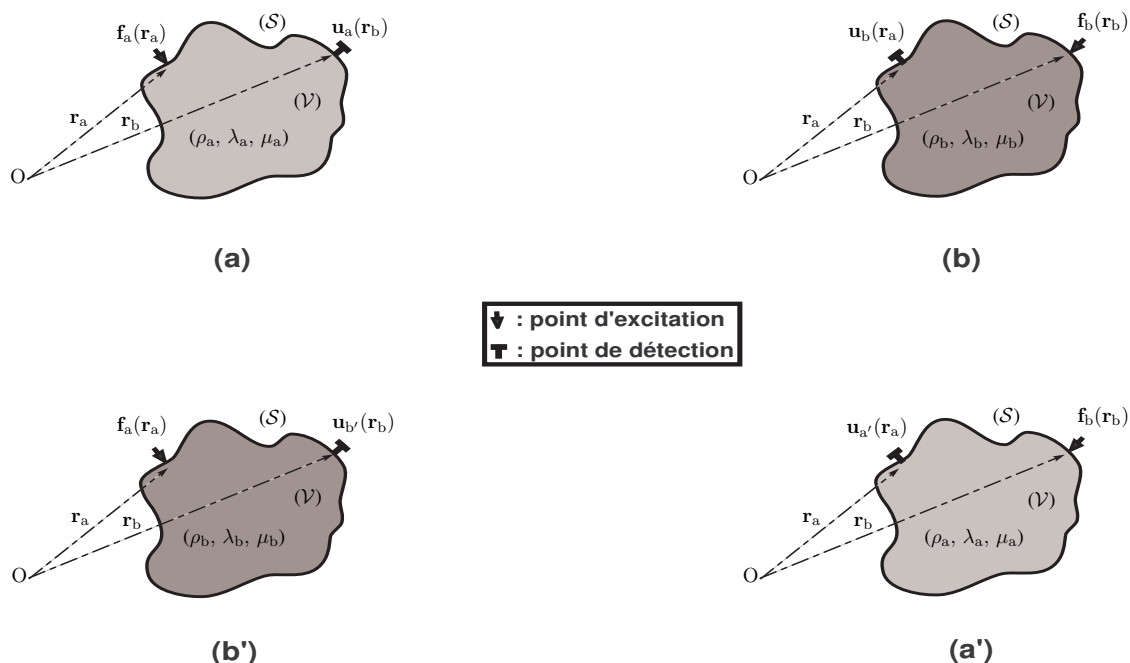


FIGURE 1 – Les quatre configurations du problème physique

Nous allons maintenant introduire quatre configurations physiques Fig (1) notées (a), (b), (b') et (a'). Pour chacune d'elles, nous allons écrire un couple d'équations de la forme Eqs (6). Nous précisons que ces configurations sont physiquement indépendantes entre elles, mais comme nous allons le montrer

il est possible de les corréler artificiellement pour déduire les différentes expressions de l'opérateur de Fréchet.

Configuration (a) Cette configuration consiste en un milieu de volume \mathcal{V} , délimité par sa surface \mathcal{S} . Ce milieu est caractérisé par sa masse volumique ρ_a et ses coefficients de Lamé λ_a, μ_a . Le champ des déplacements \mathbf{u}_a et celui des contraintes $\bar{\sigma}_a$ sont dûs à la force \mathbf{f}_a , appliquée au point \mathbf{r}_a . Pour une telle configuration, le couple d'équation Eqs (6) se réécrit sous la forme :

$$(a), \begin{cases} \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_a\} = -\omega^2 \rho_a \mathbf{u}_a + \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a \delta_{\mathcal{S}} - \mathbf{f}_a \delta_{\mathbf{r}_a}, & \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \\ \bar{\sigma}_a = \lambda_a \nabla \cdot \mathbf{u}_a \bar{\mathcal{I}} + \mu_a (\nabla \mathbf{u}_a + (\nabla \mathbf{u}_a)^\dagger), & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (7)$$

Configuration (b) Dans ce cas, il s'agit d'un milieu de volume \mathcal{V} , délimité par sa surface \mathcal{S} . Il est caractérisé par sa masse volumique ρ_b et ses coefficients de Lamé λ_b, μ_b . Le champ des déplacements \mathbf{u}_b et celui des contraintes $\bar{\sigma}_b$ sont dûs à la force \mathbf{f}_b qui est appliquée au point \mathbf{r}_b . Pour cette deuxième configuration, le couple d'équation Eqs (6) prend la forme :

$$(b), \begin{cases} \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_b\} = -\omega^2 \rho_b \mathbf{u}_b + \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b \delta_{\mathcal{S}} - \mathbf{f}_b \delta_{\mathbf{r}_b}, & \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \\ \bar{\sigma}_b = \lambda_b \nabla \cdot \mathbf{u}_b \bar{\mathcal{I}} + \mu_b (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger), & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (8)$$

Configuration (b') Cette configuration est obtenue en mélangeant le milieu de la configuration (b) avec l'excitation de la configuration (a). Ce milieu est toujours de volume \mathcal{V} et de surface \mathcal{S} . Il possède une masse volumique ρ_b et des coefficients de Lamé λ_b, μ_b . Son champ des déplacements $\mathbf{u}_{b'}$ et celui des contraintes $\bar{\sigma}_{b'}$ sont dûs à la force \mathbf{f}_a qui est appliquée au point \mathbf{r}_a . Pour cette deuxième configuration, le couple d'équation Eqs (6) se réécrit sous la forme :

$$(b'), \begin{cases} \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_{b'}\} = -\omega^2 \rho_b \mathbf{u}_{b'} + \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_{b'} \delta_{\mathcal{S}} - \mathbf{f}_a \delta_{\mathbf{r}_a}, & \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \\ \bar{\sigma}_{b'} = \lambda_b \nabla \cdot \mathbf{u}_{b'} \bar{\mathcal{I}} + \mu_b (\nabla \mathbf{u}_{b'} + (\nabla \mathbf{u}_{b'})^\dagger), & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (9)$$

Configuration (a') Dans ce cas-ci, il s'agit d'une configuration obtenue en mélangeant le milieu de la configuration (a) avec l'excitation de la configuration (b). Nous avons toujours un milieu de volume \mathcal{V} et de surface \mathcal{S} . Il est défini par sa masse volumique ρ_a et ses coefficients de Lamé λ_a, μ_a . Son champ des déplacements $\mathbf{u}_{a'}$ et celui des contraintes $\bar{\sigma}_{a'}$ sont dûs à la force \mathbf{f}_b qui est appliquée au point \mathbf{r}_b . Pour cette deuxième configuration, le couple d'équation Eqs (6) se réécrit sous la forme :

$$(a'), \begin{cases} \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_{a'}\} = -\omega^2 \rho_a \mathbf{u}_{a'} + \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_{a'} \delta_{\mathcal{S}} - \mathbf{f}_b \delta_{\mathbf{r}_b}, & \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \\ \bar{\sigma}_{a'} = \lambda_a \nabla \cdot \mathbf{u}_{a'} \bar{\mathcal{I}} + \mu_a (\nabla \mathbf{u}_{a'} + (\nabla \mathbf{u}_{a'})^\dagger), & \mathbf{r} \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (10)$$

4.2 Méthode de calcul

En faisant le produit scalaire du champ des déplacements de la configuration (a) avec tous les termes de l'équation du mouvement de la configuration (b), moins le produit scalaire du champ des déplacements de la configuration (b) avec tous les termes de l'équation du mouvement de la configuration (a), nous obtenons l'égalité suivante qui demeure écrite au sens des distributions :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_a \cdot \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_b\} - \mathbf{u}_b \cdot \{\nabla \cdot \bar{\sigma}_a\}] &= -\omega^2 \rho_b \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b + \omega^2 \rho_a \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}_a \\ &+ [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] \delta_S - [\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{f}_b \delta_{r_b} - \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{f}_a \delta_{r_a}] \end{aligned} \quad (11)$$

Chaque terme de cette équation est une distribution que nous pouvons donc appliquer sur une fonction test. Cette dernière notée $\phi(\mathbf{r})$ est choisie de telle sorte qu'elle respecte les conditions suivantes :

- $\phi(\mathbf{r})$ est de support borné.
- $\phi(\mathbf{r})$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
- $\phi(\mathbf{r}) = 1, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{V}$.

Ce dernier critère a été ajouté pour faciliter les calculs. En pratique il est toujours possible de trouver un exemple de fonctions obéissant à l'ensemble de ces trois conditions. Nous appliquons chaque terme de l'équation Eq (11) sur cette fonction test, en suivant les règles de calcul qui sont décrites brièvement en annexe (A.4). Ceci nous amène à une nouvelle équation écrite cette fois-ci au sens des fonctions :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] d\mathcal{V} &= -\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_b - \rho_a) \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b d\mathcal{V} \\ &+ \iint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - [\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b - \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a] \end{aligned} \quad (12)$$

Qui peut encore se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b - \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a] &= -\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_b - \rho_a) \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b d\mathcal{V} \\ &+ \iint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_{\mathcal{V}} [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (13)$$

Le terme $\iint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_{\mathcal{V}} [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] d\mathcal{V}$ est traité en annexe (A.3) sur plusieurs étapes de calcul, pour donner cette nouvelle expression à l'équation Eq (13) :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b - \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a] &= -\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_b - \rho_a) \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b d\mathcal{V} \\ &+ \iiint_{\mathcal{V}} (\lambda_b - \lambda_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} (\mu_b - \mu_a) \nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (14)$$

Ici le symbole $:$ désigne le produit doublement contracté entre deux tenseurs. En reprenant depuis le début, un calcul identique entre les configurations physiques (b') et (b), nous obtenons l'équation suivante, qui exprime le théorème de réciprocité :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}_{b'}(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b - \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a] &= -\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_b - \rho_a) \mathbf{u}_{b'} \cdot \mathbf{u}_b \, d\mathcal{V} \\
&+ \iiint_{\mathcal{V}} (\lambda_b - \lambda_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_{b'}) (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) \, d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} (\mu_b - \mu_a) \nabla \mathbf{u}_{b'} : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) \, d\mathcal{V} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}_{b'}(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b = \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a \quad \text{théorème de réciprocité} \quad (15)$$

Ce dernier théorème nous permet de remplacer $\mathbf{u}_b(\mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{f}_a$ par $\mathbf{u}_{b'}(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b$ dans l'équation Eq (14), qui se réécrit par conséquent sous la forme :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}_{b'}(\mathbf{r}_b) - \mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b)] \cdot \mathbf{f}_b &= +\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_b - \rho_a) \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b \, d\mathcal{V} \\
&- \iiint_{\mathcal{V}} (\lambda_b - \lambda_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) \, d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} (\mu_b - \mu_a) \nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) \, d\mathcal{V} \quad (16)
\end{aligned}$$

À ce stade, il convient de choisir des configurations (b) et (b') telles que leurs paramètres mécaniques, soient obtenus en ajoutant une petite variation aux paramètres des configurations (a') et (a), c'est-à-dire en posant : $(\rho_b = \rho_a + \delta\rho)$, $(\lambda_b = \lambda_a + \delta\lambda)$ et $(\mu_b = \mu_a + \delta\mu)$. Dès lors, si nous nous rappelons la manière dont sont définies les configurations (a) et (b'), il vient pour le champ détecté en surface la relation : $\mathbf{u}_{b'}(\mathbf{r}_b) = \mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b, \rho_a + \delta\rho, \lambda_a + \delta\lambda, \mu_a + \delta\mu) = \mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b) + \delta\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b)$. Dans le volume de l'objet, nous appliquons au champ de la configuration (b) l'approximation : $\mathbf{u}_b(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}, \rho_a + \delta\rho, \lambda_a + \delta\lambda, \mu_a + \delta\mu) = \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r})$. Cette dernière représente le point de passage permettant d'accéder aux expressions des dérivées de Fréchet, qui sont par définition l'ordre un du développement du champ en surface par rapport aux paramètres mécaniques. Ces dérivées s'écrivent sous leurs formes finales recherchées :

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b) \cdot \mathbf{f}_b &= +\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} \delta\rho(\mathbf{r}) \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}) \, d\mathcal{V} \\
&- \iiint_{\mathcal{V}} \delta\lambda(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}) \, d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \delta\mu(\mathbf{r}) \nabla \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) : (\nabla \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}) + (\nabla \mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r}))^\dagger) \, d\mathcal{V} \\
&\Leftrightarrow \\
\delta u &= \mathcal{F}_\rho \delta\rho + \mathcal{F}_\lambda \delta\lambda + \mathcal{F}_\mu \delta\mu, \quad \text{(sous forme condensée)}
\end{aligned} \quad (17)$$

Toujours avec :

- \mathbf{f}_b : force appliquée au point \mathbf{r}_b .
- $\delta\mathbf{u}_a(\mathbf{r}_b)$: variation du champ des déplacements en \mathbf{r}_b due à la force \mathbf{f}_a appliquée en \mathbf{r}_a .
- $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$: champ des déplacements dans le volume induit par la force \mathbf{f}_a appliquée en \mathbf{r}_a , pour un milieu de paramètres mécaniques $(\rho_a, \lambda_a, \mu_a)$.
- $\mathbf{u}_{a'}(\mathbf{r})$: champ des déplacements dans le volume induit par la force \mathbf{f}_b appliquée en \mathbf{r}_b , pour un milieu de paramètres mécaniques $(\rho_a, \lambda_a, \mu_a)$.

5 Conclusion

Nous avons montré qu'une utilisation du principe de réciprocité combinée à une formulation des équations de l'élastodynamique au sens des distributions, permet de déduire une dérivée de Fréchet pour chaque paramètre mécanique. Pour y parvenir, une méthodologie de calcul impliquant quatre configurations physiques non corrélées entre elles a été suivie. Ces dérivées expriment sous des formes différentes, un couplage entre le champ des déplacements qui est solution du problème direct, et les champs qui correspondent aux solutions d'un ensemble de problèmes directs fictifs construits en permutant de manière successive l'émetteur avec tous les récepteurs. Ces dérivées peuvent ensuite servir à proposer une méthode inverse appliquée à la reconstruction des paramètres mécaniques d'un milieu inhomogène. Une telle perspective va nécessiter leur évaluation numérique, et donc l'utilisation d'un modèle direct qui soit capable de simuler le champ des déplacements.

A Annexes

A.1 Modèle semi-analytique et résultats numériques

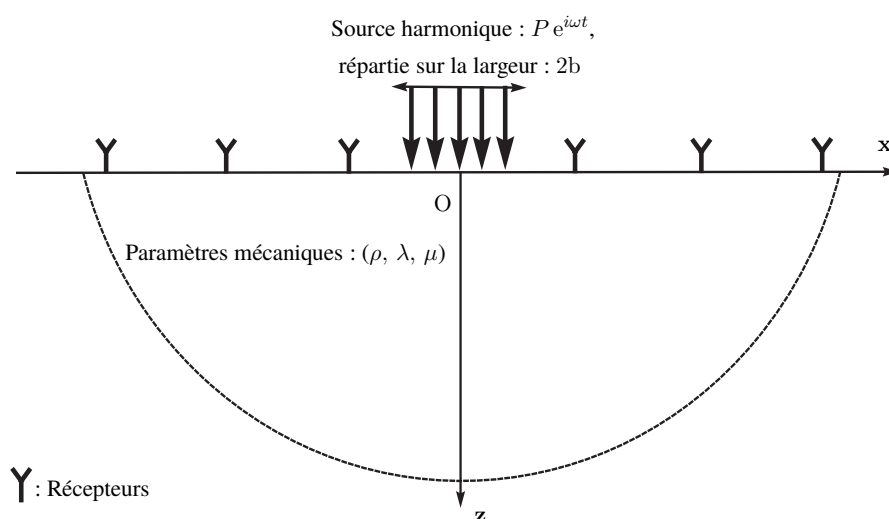


FIGURE 2 – Schéma du massif semi infini

Modèle semi-analytique Nous considérons un massif semi-infini élastique, homogène, isotrope (paramètres : ρ , λ , μ et η l'amortissement hystérétique) soumis à une charge harmonique verticale de pulsation ω et d'amplitude P , répartie sur une bande infinie de largeur $2b$, comme présenté sur la figure Fig (2). Le problème est 2D cartésien (x, z) . Les équations du problème sont celles écrites dans le corps de l'article (équation de la dynamique et loi de comportement), puis la résolution suit la méthode semi-analytique proposée par Jones et Petyt [18]. Les principales étapes de cette méthode peuvent être résumées comme suit :

- Écriture sous la forme harmonique $e^{i\omega t}$ des fonctions du problème (déplacements, contraintes).
- Décomposition en potentiels de Helmholtz du vecteur déplacement.
- Écriture des conditions aux limites en contraintes à la surface du milieu ($z = 0$).
- Écriture de la condition de non réflexion à l'infini ($z \rightarrow -\infty$).
- Utilisation d'une transformée de Fourier sur la variable d'espace horizontal x , et passage dans le domaine des nombres d'ondes k_x .

- Résolution de l'équation différentielle obtenue sur la variable d'espace verticale z .

Les déplacements s'obtiennent alors sous forme analytique dans le domaine des nombres d'ondes sous la forme :

$$\begin{aligned}\overline{u}^* &= \frac{iP \sin(k_x b)}{\mu b \overline{F}(k_x)} [-(k_x^2 - k_{zS}^2)e^{-ik_z P z} - 2k_z P k_{zS} e^{-ik_z S z}] \\ \overline{w}^* &= \frac{P \sin(k_x b)}{\mu} \frac{ik_z P}{k_x b \overline{F}(k_x)} [(k_x^2 - k_{zS}^2)e^{-ik_z P z} - 2k_x^2 e^{-ik_z S z}]\end{aligned}\quad (18)$$

$\overline{F}(k_x) = (k_x^2 - k_{zS}^2)^2 + 4k_z P k_{zS} k_x^2$ correspond à la fonction de Rayleigh, les barres supérieures signifient que l'expression est écrite dans le domaine des nombres d'ondes (résultats de la transformée de Fourier), et l'étoile correspond à l'amplitude de la fonction (à multiplier ensuite par $e^{i\omega t}$ pour l'expression en harmonique). k_x est le nombre d'onde horizontal relatif à la variable x après transformée de Fourier. k_{zS} et k_{zP} sont les nombres d'ondes verticaux des ondes de cisaillement S et de compression P . La variable z décrit l'altitude du point de calcul. À partir de ces expressions, nous pouvons calculer numériquement les déplacements horizontaux et verticaux dans le domaine transformé. Le retour en espace x s'obtient par transformée de Fourier inverse, effectuée numériquement soit par un algorithme de transformée de Fourier rapide, soit comme c'est le cas ici, par une intégration de Filon avec un pas d'intégration adaptatif.

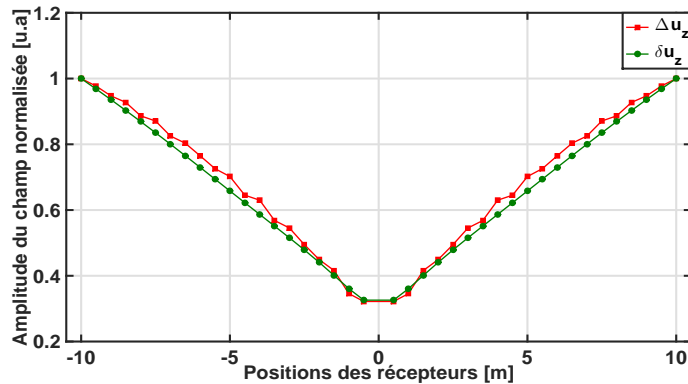


FIGURE 3 – Comparaison en amplitude entre Δu_z (obtenu avec la méthode semi-analytique) et δu_z (calculé à l'aide de l'opérateur de Fréchet sur la densité).

Résultats numériques La charge harmonique d'amplitude $P = 10^8$ N et de pulsation $\omega = 201$ rad/s est appliquée sur une largeur $2b = 0.5$ m autour du point O. Pour détecter le champ des déplacements, des récepteurs sont positionnés tous les 0.5 m sur une distance allant de -10 m à $+10$ m, sauf au centre de la zone d'impact. Cette expérience numérique a été réalisée sur deux massifs semi-infinis (massif₁ et massif₂) ayant des coefficients de Lamé identiques ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1,13 \cdot 10^8 (1 + i0,1)$ Pa, $\mu_1 = \mu_2 = 1,07 \cdot 10^8 (1 + i0,1)$ Pa), mais qui diffèrent légèrement du point de vue de leurs masses volumiques ($\rho_1 = 1540$ kg/m³, $\rho_2 = 1526$ kg/m³).

Pour les deux massifs, nous simulons la composante verticale du champ des déplacements au niveau des 40 récepteurs. Ces données sont stockées dans deux vecteurs notés u_z^1 et u_z^2 . Nous voulons comparer

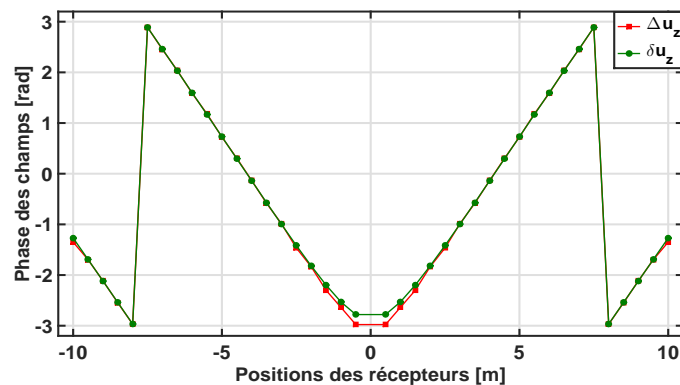


FIGURE 4 – Comparaison en phase entre Δu_z (obtenu avec la méthode semi-analytique) et δu_z (calculé à l'aide de l'opérateur de Fréchet sur la densité).

la différence $\Delta u_z = u_z^2 - u_z^1$ entre ces deux vecteurs, avec δu_z qui a pour élément d : $\delta u_z(d) = +\omega^2 \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_2 - \rho_1) \mathbf{u}_0^1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_d^1(\mathbf{r}) d\mathcal{V}$ la variation du champ prédite par l'opérateur de Fréchet sur la densité, au niveau du récepteur d, pour : $d = 1, \dots, 40$. Les quantités \mathbf{u}_0^1 et \mathbf{u}_d^1 qui interviennent dans cette intégrale représentent les champs des déplacements produits dans le volume du massif \mathcal{V}_1 , lorsqu'il est excité successivement au centre O et au niveau de la position du récepteur d. Les figures Figs (3,4) décrivant l'amplitude et la phase des quantités Δu_z et δu_z , montrent une assez bonne concordance avec un meilleur résultat au niveau de la phase. Cet accord que nous constatons s'explique par le fait que nous avons considéré deux densités très proches, avec un écart relatif de 1%. Cette hypothèse place cette étude dans le domaine de validité de l'opérateur de Fréchet, qui décrit l'ordre un du développement du champ des déplacements par rapport à la densité du milieu.

A.2 Équation du mouvement au sens des distributions

Terme source au sens des distributions Le terme source qui intervient dans l'équation du mouvement est une force \mathbf{f} appliquée sur la surface (S) au point \mathbf{r}_o . Comme cette force est définie en un point uniquement, nous la représentons par le biais de la distribution ponctuelle singulière de Dirac :

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} \delta_{\mathbf{r}_o} = \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \quad \forall \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \quad (19)$$

Le terme $\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$ sera donc vu comme une distribution définie en tout point de l'espace.

Champs des déplacements au sens des distributions Le champ des déplacements \mathbf{u} existe en tout point du milieu de volume (\mathcal{V}). Il s'agit donc d'une fonction vectorielle à support borné à laquelle nous pouvons associer une distribution régulière définie en tout point de l'espace :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \quad (20)$$

Divergence du tenseur des contraintes au sens des distributions Cette distribution comporte une partie régulière et une partie singulière, que nous allons déterminer. La première est dite régulière, car elle est associée à la divergence du tenseur des contraintes dans le volume du milieu, c'est-à-dire dans

le domaine où celui-ci est continu. Quant à la partie singulière, elle prend en compte le saut subi par ce tenseur au niveau de la surface (\mathcal{S}) du milieu. En effet, ce dernier s'annule subitement au voisinage supérieur d'une surface libre. C'est ce calcul que nous nous proposons de mener dans cette annexe, pour le moment restons sur une représentation au sens des fonctions pour le tenseur des contraintes. En coordonnées cartésiennes, $\bar{\sigma}$ se décompose sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \sum_{ij} \sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \quad (21)$$

Sachant que $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormée, et que σ_{ij} représente l'élément ij du tenseur des contraintes. Ce dernier a pour divergence l'expression :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = \sum_{ij} \partial_i \sigma_{ij} \mathbf{x}_j = \sum_j \left(\sum_i \partial_i \sigma_{ij} \right) \mathbf{x}_j \quad (22)$$

Chaque élément σ_{ij} de ce tenseur est une fonction scalaire qui dépend des trois variables d'espace. De plus, cette fonction s'annule subitement au voisinage supérieur de la surface (\mathcal{S}) après l'avoir traversée. Malgré cette discontinuité, il est toujours possible de définir sa dérivée partielle par rapport à n'importe quelle variable x_i en tout point de l'espace, à condition de la calculer au sens des distributions. Ce qui s'écrit sous la forme :

$$\partial_i \sigma_{ij} = \{ \partial_i \sigma_{ij} \} + \sigma_{ij}^{(o)} \cos \theta_i \delta_{\mathcal{S}} \quad (23)$$

Ici, le terme $\partial_i \sigma_{ij}$ est une distribution qui s'écrit comme la somme d'une distribution régulière $\{ \partial_i \sigma_{ij} \}$ et d'une distribution singulière $\sigma_{ij}^{(o)} \cos \theta_i \delta_{\mathcal{S}}$. Les éléments de calcul permettant de retrouver cette relation sont présentés en annexe (A.4). Le terme régulier qui se présente comme une dérivée partielle entre deux accolades, ignore le saut subi par le tenseur des contraintes au niveau de la surface (\mathcal{S}). Dans le terme singulier, ce saut est noté $\sigma_{ij}^{(o)} = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-$, il correspond à l'écart entre la valeur de σ_{ij} au voisinage supérieur de (\mathcal{S}) $\sigma_{ij}^+ = 0$ (les contraintes sont inexistantes) et sa valeur en son voisinage inférieur $\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij}$ (car on reste toujours dans le volume du milieu). Nous avons donc : $\sigma_{ij}^{(o)} = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- = -\sigma_{ij}^- = -\sigma_{ij}$. Nous rappelons que la surface (\mathcal{S}) est toujours traversée dans la direction de son vecteur normal noté \mathbf{n} orienté de l'intérieur vers l'extérieur. θ_i correspond à l'angle formé par \mathbf{n} et \mathbf{x}_i qui est le vecteur unitaire de la coordonnée cartésienne suivant laquelle nous dérivons σ_{ij} . Le terme $\delta_{\mathcal{S}}$ désigne la distribution surfacique de Dirac, dont l'action sur toute fonction test est décrite en annexe (A.4). L'équation Eq (23) devient :

$$\partial_i \sigma_{ij} = \{ \partial_i \sigma_{ij} \} - \sigma_{ij} \cos \theta_i \delta_{\mathcal{S}} \quad (24)$$

En effectuons une sommation sur l'indice i pour tous les termes de l'équation Eq (24), nous obtenons :

$$\sum_i \partial_i \sigma_{ij} = \sum_i \{ \partial_i \sigma_{ij} \} - \sum_i \sigma_{ij} \cos \theta_i \delta_{\mathcal{S}} \quad (25)$$

Maintenant, multiplions à droite par le vecteur unitaire \mathbf{x}_j et sommons sur l'indice (j) :

$$\sum_j \sum_i \partial_i \sigma_{ij} \mathbf{x}_j = \sum_j \sum_i \{\partial_i \sigma_{ij}\} \mathbf{x}_j - \sum_j \sum_i \sigma_{ij} \cos \theta_i \mathbf{x}_j \delta_S \quad (26)$$

Une troisième sommation sur l'indice k peut être introduite, à condition de multiplier chaque terme de l'équation Eq (26) par le symbole de Kronecker $\delta_{ki} = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_i$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} \partial_k \sigma_{ij} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j &= \sum_{ijk} \{\partial_k \sigma_{ij}\} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j - \sum_{ijk} \cos \theta_k \sigma_{ij} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \delta_S \\ \Leftrightarrow \\ (\sum_k \partial_k \mathbf{x}_k) \cdot (\sum_{ij} \sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) &= \{(\sum_k \partial_k \mathbf{x}_k) \cdot (\sum_{ij} \sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j)\} - (\sum_k \cos \theta_k \mathbf{x}_k) \cdot (\sum_{ij} \sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) \delta_S \end{aligned} \quad (27)$$

Pour finalement s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = \{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} - \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma} \delta_S, \quad \text{avec : } \mathbf{n} = \sum_k \cos \theta_k \mathbf{x}_k \quad (28)$$

Pour résumer, la divergence du tenseur des contraintes va s'écrire sous la forme :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \rightarrow \{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} - \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S, \quad \forall \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \quad (29)$$

Réécriture de l'équation du mouvement au sens des distributions En tenant compte des résultats obtenus en Eqs (19,20,29), l'équation du mouvement une fois réécrite au sens des distributions, intègre les conditions aux limites et devient valable en tout point de l'espace. Elle s'écrit sous la forme :

$$\{\nabla \cdot \bar{\sigma}\} = -\omega^2 \rho(\mathbf{r}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \delta_S, \quad \mathbf{r} \in \text{tout l'espace} \quad (30)$$

A.3 Complément de calcul

Dans cette annexe, nous allons mener un calcul pour vérifier la validité de l'égalité :

$$\begin{aligned} \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV = \\ + \iiint_V (\lambda_b - \lambda_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) dV + \iiint_V (\mu_b - \mu_a) \nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) dV \end{aligned} \quad (31)$$

Pour ce faire, nous allons partir du membre de gauche de l'équation Eq (31) et montrer étape par étape qu'il est équivalent au membre de droite de la même équation. Par ailleurs, en annexe (A.5), un calcul a été conduit pour valider les identités :

- $\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) - \nabla \mathbf{u}_a : \bar{\sigma}_b$
- $\mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a) - \nabla \mathbf{u}_b : \bar{\sigma}_a$

, qui nous permettent de réécrire l'équation Eq (31) sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV = \\
& \oint_S [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\nabla \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) - \nabla \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a)] dV \\
& \quad + \iiint_V [\nabla \mathbf{u}_a : \bar{\sigma}_b - \nabla \mathbf{u}_b : \bar{\sigma}_a] dV
\end{aligned} \tag{32}$$

En réarrangeant ses termes, la même équation se réécrit sous cette autre forme :

$$\begin{aligned}
& \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV = \\
& [\oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) dS - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) dV] - [\oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a) dS - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a) dV] \\
& \quad + \iiint_V [\nabla \mathbf{u}_a : \bar{\sigma}_b - \nabla \mathbf{u}_b : \bar{\sigma}_a] dV
\end{aligned} \tag{33}$$

Par ailleurs, le théorème de la divergence nous autorise à écrire les identités :

- $\oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) dS = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \cdot \bar{\sigma}_b) dV$
- $\oint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a) dS = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u}_b \cdot \bar{\sigma}_a) dV$

Qui lorsqu'elles sont prises en compte dans l'équation Eq (33), conduisent à une simplification de cette dernière, qui devient :

$$\begin{aligned}
& \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV \\
& \quad = \iiint_V [\nabla \mathbf{u}_a : \bar{\sigma}_b - \nabla \mathbf{u}_b : \bar{\sigma}_a] dV
\end{aligned} \tag{34}$$

Nous allons maintenant utiliser les lois de comportement qui sont décrites dans les couples d'équations Eqs (7,8), pour exprimer les tenseurs $\bar{\sigma}_a$ et $\bar{\sigma}_b$ en fonction de leurs champs des déplacements respectifs. Ce qui permet de réécrire l'équation Eq (34) sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV = \\
& \iiint_V [\nabla \mathbf{u}_a : (\lambda_b \nabla \cdot \mathbf{u}_b \bar{\mathcal{I}} + \mu_b (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger)) - \nabla \mathbf{u}_b : (\lambda_a \nabla \cdot \mathbf{u}_a \bar{\mathcal{I}} + \mu_a (\nabla \mathbf{u}_a + (\nabla \mathbf{u}_a)^\dagger))] dV
\end{aligned} \tag{35}$$

En réarrangeant ses termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \oint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}_a)] dV = \\
& \iiint_V [\lambda_b (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) (\nabla \mathbf{u}_a : \bar{\mathcal{I}}) - \lambda_a (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) (\nabla \mathbf{u}_b : \bar{\mathcal{I}})] dV \\
& \quad + [\mu_b \nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) - \mu_a \nabla \mathbf{u}_b : (\nabla \mathbf{u}_a + (\nabla \mathbf{u}_a)^\dagger)] dV
\end{aligned} \tag{36}$$

Nous allons maintenant nous aider des identités suivantes, qui sont démontrées en annexe (A.5) :

- $\nabla \mathbf{u}_a : \bar{\mathcal{I}} = \nabla \cdot \mathbf{u}_a$
- $\nabla \mathbf{u}_b : \bar{\mathcal{I}} = \nabla \cdot \mathbf{u}_b$
- $\nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) = \nabla \mathbf{u}_b : (\nabla \mathbf{u}_a + (\nabla \mathbf{u}_a)^\dagger)$

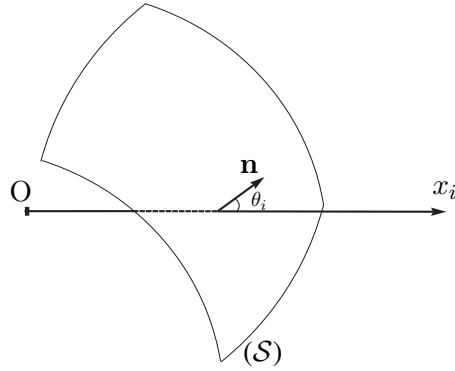
Une fois qu'elles sont intégrées à l'équation Eq (37), celle-ci prend la forme du résultat recherché :

$$\begin{aligned} \iint_S [\mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_a)] dS - \iiint_V [\mathbf{u}_a \cdot (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b) - \mathbf{u}_b \cdot (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_a)] dV = \\ \iiint_V (\lambda_b - \lambda_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) dV + \iiint_V (\mu_b - \mu_a) \nabla \mathbf{u}_a : (\nabla \mathbf{u}_b + (\nabla \mathbf{u}_b)^\dagger) dV \end{aligned} \quad (37)$$

A.4 Définitions et propriétés sur les distributions

Dans cette annexe, nous présentons quelques définitions liées aux distributions. Nous privilégions ici l'aspect pratique devant la rigueur mathématique. Nous nous sommes notamment appuyés sur la référence [19] qui présente les règles de calcul utiles au physicien, exprimées dans le langage des physiciens. Ceci dit, une lecture plus approfondie est proposée dans la référence [21].

- Définition¹ : On appelle espace de fonctions tests sur \mathbb{R}^3 noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, l'espace vectoriel des fonctions ϕ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C} qui sont de classe \mathcal{C}^∞ et de support borné.
- Définition² : On appelle toute fonctionnelle linéaire continue définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ une distribution sur \mathbb{R}^3 . L'ensemble de ces distributions forme un espace vectoriel nommé espace topologique dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, également appelé espace des distributions et noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.
- Définition³ : Soient une distribution $T \in \mathcal{D}'$ et une fonction test $\phi \in \mathcal{D}$, la valeur de T sur ϕ est un nombre complexe noté $\langle T, \phi \rangle \in \mathbb{C}$.
- Définition⁴ : Le produit d'une fonction ψ de classe \mathcal{C}^∞ par une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est également une distribution $\psi T \in \mathcal{D}'$. Elle est définie par son action sur toute fonction test ϕ , telle que : $\langle \psi T, \phi \rangle = \langle T, \psi \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$
- Exemple¹ : On définit la distribution de Dirac centrée en $\mathbf{r}_o \in \mathbb{R}^3$, notée $\delta_{\mathbf{r}_o}$, par son action sur toute fonction test ϕ , telle que : $\langle \delta_{\mathbf{r}_o}, \phi \rangle = \phi(\mathbf{r}_o), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$
- Exemple² : Soit (S) n'importe quelle surface lisse dans \mathbb{R}^3 , la distribution de Dirac surfacique notée δ_S , est définie par son action sur toute fonction test ϕ , telle que : $\langle \delta_S, \phi \rangle = \iint_S \phi(\mathbf{r}) dS, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$
- Exemple³ : Soit f n'importe quelle fonction localement intégrable. On peut lui associer une distribution notée $\{f\}$ définie par son action sur toute fonction test ϕ , telle que : $\langle f, \phi \rangle = \iiint_{\text{espace}} f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$
- Exemple⁴ : Soit f n'importe quelle fonction localement intégrable qui subit une discontinuité $\gamma^{(0)}$ lorsqu'elle traverse une surface (S) dans la direction de sa normale \mathbf{n} Fig (5). On peut associer à la dérivée partielle de cette fonction, la distribution notée $\partial_i f = \{\partial_i f\} + \gamma^{(0)} \cos \theta_i \delta_S$. En tout point de la surface $\mathbf{r} \in S$, le saut $\gamma^{(0)}$ désigne la valeur de f au voisinage supérieur de la surface moins sa valeur en son voisinage inférieur, le tout dans la direction de sa normale, soit : $\gamma^{(0)}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{n}) - f(\mathbf{r} - \varepsilon \mathbf{n})$, avec ε un réel positif qui tend vers zéro. Quant à θ_i , il représente l'angle formé par le vecteur normal \mathbf{n} et l'axe Ox_i .

FIGURE 5 – Schéma d'une surface où f est discontinue

A.5 Identités tensorielles

Cette annexe a pour but de démontrer les identités tensorielles qui interviennent dans le calcul conduit en annexe (A.3). Pour ce faire, nous nous sommes basés sur la référence [20] qui regroupe de manière synthétique et claire les règles liées au calcul tensoriel.

- Nous souhaitons en tout premier lieu vérifier l'identité : $[\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) + \nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma}]$. Pour ce faire, nous allons calculer séparément chacun de ses membres pour ensuite les comparer.

Nous commençons par $[\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma})]$:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma}) = \sum_i \partial_i \mathbf{x}_i \cdot \left(\sum_j u_j \mathbf{x}_j \cdot \sum_{kl} \sigma_{kl} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l \right) = \sum_i \partial_i \mathbf{x}_i \cdot \sum_{jkl} u_j \sigma_{kl} (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k) \mathbf{x}_l$$

Sachant que $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k = \delta_{jk}$, ce terme devient :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma}) = \sum_i \partial_i \mathbf{x}_i \cdot \sum_{jl} u_j \sigma_{jl} \mathbf{x}_l = \sum_{ijl} \partial_i (u_j \sigma_{jl}) \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_l = \sum_{ij} \partial_i (u_j \sigma_{ji})$$

Ce qui donne au final :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma}) = \sum_{ij} [(\partial_i u_j) \sigma_{ji} + u_j (\partial_i \sigma_{ji})] \quad (38)$$

Nous allons maintenant calculer $[\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma})]$:

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) = \sum_i u_i \mathbf{x}_i \cdot \left(\sum_j \partial_j \mathbf{x}_j \cdot \sum_{kl} \sigma_{kl} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l \right) = \sum_i u_i \mathbf{x}_i \cdot \sum_{jkl} (\partial_j \sigma_{kl}) \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l$$

Qui se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) = \sum_i u_i \mathbf{x}_i \cdot \sum_{jl} (\partial_j \sigma_{jl}) \mathbf{x}_l = \sum_{ijl} u_i (\partial_j \sigma_{jl}) \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_l = \sum_{ij} u_i (\partial_j \sigma_{ji})$$

En permutant les indices i et j et en exploitant la symétrie du tenseur $\bar{\sigma}$, nous trouvons que :

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) = \sum_{ij} u_j (\partial_i \sigma_{ji}) \quad (39)$$

Évaluons maintenant le troisième terme qui est $[\nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma}]$:

$$\nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma} = \left(\sum_i \partial_i \mathbf{x}_i \sum_j u_j \mathbf{x}_j \right) : \sum_{kl} \sigma_{kl} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l$$

Qui s'écrit encore sous la forme :

$$\nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma} = \sum_{ijkl} (\partial_i u_j) \sigma_{kl} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l$$

Où $[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l = \delta_{jk} \delta_{il}]$. Ce qui amène au résultat suivant :

$$\nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma} = \sum_{ij} (\partial_i u_j) \sigma_{ji} \quad (40)$$

En comparant entre elles les équations Eqs (38), (39) et (40), nous obtenons l'identité recherchée $[\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \bar{\sigma}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) + \nabla \mathbf{u} : \bar{\sigma}]$.

- La deuxième identité que nous souhaitons vérifier est $[\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathcal{L}} = \nabla \cdot \mathbf{u}]$. Pour ce faire, nous allons partir du membre de gauche de cette équation, le développer pour ensuite aboutir au membre de droite :

$$\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathcal{L}} = \left(\sum_{ij} \partial_i u_j \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \right) : \left(\sum_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k \right) = \sum_{ijk} \partial_i u_j (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k)$$

Ce qui donne directement :

$$\nabla \mathbf{u} : \bar{\mathcal{L}} = \sum_k \partial_k u_k = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (41)$$

- Nous allons maintenant vérifier par calcul cette dernière identité : $[\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) = \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)]$ pour deux champs des déplacements notés \mathbf{u} et \mathbf{v} . Pour ce faire, nous allons calculer son membre de gauche, ensuite son membre de droite et au final vérifier que les deux conduisent bien au même résultat.

Commençons par le calcul du terme $[\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger)]$:

$$\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) = \left(\sum_{ij} \partial_i u_j \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \right) : \left(\sum_{kl} \partial_k v_l \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l + \sum_{kl} \partial_l v_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l \right)$$

Qui se réécrit sous la forme :

$$\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) = \sum_{ijkl} (\partial_i u_j) (\partial_k v_l) (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l) + \sum_{ijkl} (\partial_i u_j) (\partial_l v_k) (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l)$$

Pour donner le résultat suivant :

$$\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) = \sum_{ij} (\partial_i u_j) (\partial_j v_i) + \sum_{ij} (\partial_i u_j) (\partial_i v_j) = \sum_{ij} \partial_i u_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (42)$$

Nous allons maintenant passer au calcul du deuxième membre $[\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)]$:

$$\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) = \left(\sum_{ij} \partial_i v_j \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \right) : \left(\sum_{kl} \partial_k u_l \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l + \sum_{kl} \partial_l u_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l \right)$$

Lequel se réécrit sous la forme :

$$\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) = \sum_{ijkl} (\partial_i v_j) (\partial_k u_l) (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l) + \sum_{ijkl} (\partial_i v_j) (\partial_l u_k) (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l)$$

Sachant que $[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j : \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l = \delta_{jk} \delta_{il}]$, nous obtenons :

$$\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) = \sum_{ij} (\partial_i v_j) (\partial_j u_i) + \sum_{ij} (\partial_i v_j) (\partial_i u_j)$$

Les indices i et j sont muets, ils peuvent donc être permutés l'un avec l'autre. Ce qui permet d'écrire l'égalité : $[\sum_{ij} (\partial_i v_j) (\partial_j u_i) = \sum_{ij} (\partial_j v_i) (\partial_i u_j)]$. En tenant compte de cette dernière, le deuxième membre $[\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)]$ se réécrit sous la forme :

$$\nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) = \sum_{ij} (\partial_i u_j) (\partial_j v_i) + \sum_{ij} (\partial_i u_j) (\partial_i v_j) = \sum_{ij} \partial_i u_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (43)$$

Les résultats des équations Eqs (42,43) montrent clairement la validité de l'identité $[\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) = \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger)]$.

Références

- [1] D. Komatitsch et J. Tromp, Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophysical journal international*, vol. 139, no. 3, pp. 806–822, 1999.
- [2] D. Komatitsch et J. Tromp, Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-I. Validation, *Geophysical journal international*, vol. 149, no. 2, pp. 390–412, 2002.
- [3] D. Komatitsch et J. Tromp, Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-II. Three-dimensional models, oceans, rotation and self-gravitation, *Geophysical journal international*, vol. 150, no. 1, pp. 303–318, 2002.
- [4] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Princeton university bulletin*, vol. 13, no. 49-52, pp. 28, 1902.
- [5] A. Tarantola, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, vol. 49, no. 8, pp 1259–1266, 1984.
- [6] A. Tarantola, Inversion of travel times and seismic waveforms, *Seismic Tomography*, pp 135–157, 1987. Springer.
- [7] A. Tarantola, Theoretical background for the inversion of seismic waveforms including elasticity and attenuation, *Pure and Applied Geophysics*, vol. 128, no. 1, pp 365–399, 1988.
- [8] O. Talagrand et P. Courtier, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 113, no. 478, pp 1311–1328, 1987.

- [9] J. Tromp, D. Komatitsch et Q. Liu, Spectral-element and adjoint methods in seismology, *Communications in Computational Physics*, vol. 3, no. 1, pp. 1–32, 2008.
- [10] V. Monteiller, S. Chevrot, D. Komatitsch et Y. Wang, Three-dimensional full waveform inversion of short-period teleseismic wavefields based upon the SEM–DSM hybrid method, *Geophysical Journal International*, vol. 202, no. 2, pp. 811–827, 2015.
- [11] L-V. Kantorovich, On Newton’s method for functional equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 59, no. 7, pp. 1237–1240, 1948.
- [12] A-N. Tikhonov et V-I Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, Winston Washington DC, vol. 14, 1977.
- [13] A. Roger, Reciprocity theorem applied to the computation of functional derivatives of the scattering matrix, *Electromagnetics*, vol. 2, no. 1, pp. 69–83, 1982.
- [14] S. Arhab and G. Soriano, Inverse Wave Scattering of Rough Surfaces with Emitters and Receivers in the Transition Zone, *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 45, pp. 131–141, 2016.
- [15] S. Arhab, G. Soriano, K. Belkebir, A. Sentenac et H. Giovannini, Full wave optical profilometry, *Journal of Optical Society of America A*, vol. 28, no. 4, pp 576–580, 2011.
- [16] S. Arhab, H. Giovannini, K. Belkebir et G. Soriano, Full polarization optical profilometry, *Journal of Optical Society of America A*, vol. 29, no. 8, pp 1508–1515, 2012.
- [17] A. Mesgouez and G. Lefeuvre-Mesgouez, Transient solution for multilayered poroviscoelastic media obtained by an exact stiffness matrix formulation, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 33, no. 18, pp. 1911–1931, 2009.
- [18] D.V. Jones et M. Petyt, Ground vibration in the vicinity of a strip load : a two-dimensional half-space model, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 147, no. 1, pp. 155–166, 1991.
- [19] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H. et K. Editions, 2008.
- [20] C-T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis*, IEEE New York, 1992.
- [21] W. Rudin, *Functional analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.