

Algorithme Stecklov-Poincaré pour le problème de Cauchy en élasticité linéaire – régularisation par analyse spectrale

R. FERRIER^a, P. GOSSELET^b, M.L. KADRI^c

a. LMT (ENS-Paris-Saclay/CNRS) renaud.ferrier@ens-cachan.fr

b. LMT (ENS-Paris-Saclay/CNRS) gosselet@lmt-cachan.fr

c. LAMSIN (ENIT, U. Tunis El-Manar) medlarbi.kadri@lamsin.rnu.tn

Résumé :

On propose l'étude d'un préconditionneur dual pour la résolution par la méthode de Steklov-Poincaré et l'algorithme du gradient conjugué du problème de Cauchy connu pour être mal posé au sens de la stabilité. L'utilisation de ce préconditionneur revient à utiliser la méthode de KMF accélérée par un solveur de Krylov. On montre qu'il est possible de régulariser la résolution en ne choisissant que les composantes les plus énergétiques de la solution sur la base de Ritz associée au gradient conjugué.

Abstract :

This paper presents the study of a dual preconditionner for the resolution of the Cauchy problem, known as an ill-posed problem in sense of stability, by the Steklov-Poincaré's method and a conjugate gradient algorithm. The use of this preconditionner is interpreted as the use of the KMF method with a Krylov-acceleration. It is shown that it is possible to regularize the resolution by the choice of the most energetic components of the solution on the Ritz base associated to the conjugate gradient.

Mots clés : Problème de Cauchy, Analyse spectrale, Approche de Steklov-Poincaré, Solveur de Krylov, Préconditionnement dual.

Introduction

Dans le cadre du contrôle non-destructif des structures mécaniques, une problématique intéressante est celle du contrôle de pièces en fonctionnement par l'étude de leur réponse au chargement qui leur est imposé par leur fonction. Dans ce travail, on s'intéresse à la détermination de chargements inconnus sur un bord d'un domaine à l'équilibre statique grâce à la mesure de déplacement et la connaissance de l'effort imposé sur un autre bord. Mathématiquement, ceci revient à résoudre un problème de Cauchy sur un système elliptique.

Pour résoudre ce problème inverse, plusieurs méthodes ont été proposées, basées sur la minimisation de l'écart entre champ reconstruit et champ mesuré [11], en incluant éventuellement une erreur sur la

connaissance du comportement [1, 2]. Dans [6], une méthode originale, basée sur un procédé de régularisation évanescence est proposée. Dans le cas où on suppose le comportement interne parfaitement connu, il est possible de condenser le problème sur les bords, on trouve alors des méthodes itératives très proches des approches par décomposition de domaine pour les problèmes directs. La méthode KMF [9], à rapprocher des algorithmes Dirichlet-Neumann, revient à reconstituer la condition au bord manquante par une succession de résolutions de problèmes n'utilisant chacun qu'une seule des données redondantes. Deux autres méthodes, duales l'une de l'autre, basées sur la théorie de Steklov-Poincaré, ont été proposées successivement dans [4] et [8]. Ces méthodes ressemblent dans leur principe de résolution aux solveurs de type Schur primal (BDD) [10] et dual (FETI) [7].

Nous nous focalisons ici sur le problème discret résultant de l'approche de Steklov-Poincaré primale qui a largement été étudiée dans le cadre continu dans [4]. L'objet de cette contribution est d'étudier des techniques de préconditionnement ainsi que des techniques de régularisation par analyse spectrale qui en découlent naturellement. En effet, pour un préconditionnement bien choisi, il est possible à l'aide d'une analyse de Ritz après la résolution, d'améliorer la solution en supprimant les contributions les moins énergétiques pour un coût nul.

Dans une première partie, on introduit les notations relatives à la résolution du problème de Cauchy par la méthode de Steklov-Poincaré primale, puis on aborde la question du préconditionnement. Enfin, on développe la méthode de filtrage de la solution par les valeurs et modes de Ritz.

Un article plus complet concernant les techniques de résolution, de préconditionnement et de filtrage est en cours de rédaction.

L'approche de Steklov-Poincaré

Soit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) dans lequel on veut résoudre un problème d'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites déformations. Par linéarité du problème, on s'intéresse à la variation du système par rapport à un état d'équilibre (ce qui permet d'éliminer les chargements extérieurs). Soit \underline{u} le champ de déplacement inconnu, $\underline{\varepsilon}$ l'opérateur de gradient symétrique, \mathbb{H} le tenseur de Hooke et $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.

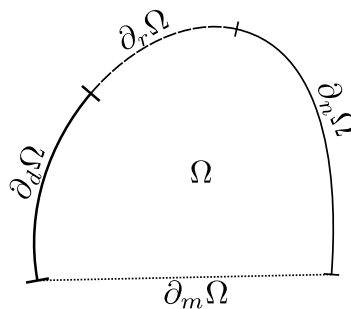


FIGURE 1 – Problème de complétion de données, notations des bords

On considère la figure 1. Le bord est séparé en quatre parties : $\partial_d \Omega$ reçoit une condition de Dirichlet, $\partial_n \Omega$ reçoit une condition de Neumann, $\partial_m \Omega$ est la partie du bord aux données manquantes, sur laquelle ni le déplacement \underline{u}_m ni les efforts \underline{t}_m sont connus, et $\partial_r \Omega$ est la partie redondante du bord sur laquelle les données de Dirichlet \underline{U}_r et de Neumann \underline{t}_r sont toutes les deux connues. Les équations du problème

de Cauchy s'écrivent alors :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \mathbb{H} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \\ \operatorname{div}(\underline{\sigma}) = 0 \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega, \quad \left. \begin{array}{l} \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_d \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial_n \Omega \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \underline{u} = \underline{U}_r \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}_r \end{array} \right\} \text{ sur } \partial_r \Omega \quad (1)$$

On suppose que $\operatorname{mes}(\partial_d \Omega) > 0$, de sorte que tous les problèmes directs considérés plus bas soient bien posés. On remarque néanmoins que cette hypothèse n'est faite que pour simplifier les raisonnements, puisqu'il est possible, en imitant des techniques présentes dans la méthode FETI [7], de surmonter cette difficulté.

On utilise une approche élément fini classique (éléments de Lagrange) pour discrétiser le problème en déplacement. On suppose les conditions de Dirichlet (d) éliminées, on note avec un indice i les degrés de liberté internes et sur le bord de Neumann, r les degrés de liberté sur le bord redondant et m les degrés de liberté sur le bord manquant. On note \mathbf{K} la matrice de rigidité symétrique définie positive, \mathbf{u} le vecteur des déplacements nodaux et \mathbf{f}_r le vecteur associé aux efforts imposés sur $\partial_r \Omega$.

L'équivalent discret de (1) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} & \mathbf{K}_{im} \\ \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rm} \\ \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mr} & \mathbf{K}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r \\ \mathbf{t}_m \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{U}_r, \mathbf{f}_r) \text{ connus} \quad (2)$$

Pour simplifier l'étude, on suppose qu'il n'y a pas d'élément possédant à la fois des degrés de liberté redondants et manquants. Il est toujours possible de se ramener à ce cas en « oubliant » une partie de l'information redondante (ce qui convertit un degré r en degré i).

On considère deux sous-problèmes. Le premier utilise la condition de Dirichlet \mathbf{U}_r , la condensation conduit alors à :

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{mi} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{im})}_{\mathbf{S}_d} \mathbf{u}_m = \mathbf{t}_m + \underbrace{\mathbf{K}_{mi} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ir}}_{\mathbf{b}_d} \mathbf{U}_r \quad (3)$$

Le second utilise la condition de Neumann \mathbf{f}_r , la condensation conduit alors à :

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_{mm} - (\mathbf{K}_{mi} \ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} \\ \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{rr} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mi} \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{S}_n} \mathbf{u}_m = \mathbf{t}_m - \underbrace{(\mathbf{K}_{mi} \ 0) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ir} \\ \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{rr} \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{b}_n} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_r \end{pmatrix} \quad (4)$$

\mathbf{S}_d et \mathbf{S}_n sont des compléments de Schur, ils sont symétriques définis positifs. On rappelle la propriété fondamentale suivante :

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{S}_d} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}} \text{ où } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{im} \mathbf{u}_m \\ 0_r \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

autrement dit, la norme associée à \mathbf{S}_d est la norme énergétique du champ obtenu par relèvement harmonique (en supposant une condition de Dirichlet homogène sur $\partial_r \Omega$).

L'élimination de la réaction inconnue \mathbf{t}_m à l'aide de (3) et (4) conduit au système suivant :

$$(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n) \mathbf{u}_m = \underline{b}_d - \underline{b}_n \quad (6)$$

On rappelle deux propriétés fondamentales.

Propriété 1. $(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n)$ est la discrétisation d'un opérateur symétrique défini positif compact [4]. On a donc en particulier :

$$\mathbf{u}_m^T (\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n) \mathbf{u}_m \geq 0, \forall \mathbf{u}_m \quad (7)$$

Propriété 2. $(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n)$ est une matrice de dimension $|m|$ et de rang $\min(|m|, |r|)$ ($|m|$ représente de nombre de degrés de liberté de $\partial_m \Omega$).

Autrement dit, on a le résultat évident que le système est de rang déficient tant qu'il n'y a pas plus de mesures que de données à identifier. Néanmoins même dans le cas où il y a suffisamment de mesures, des valeurs propres extrêmement petites sont susceptibles d'exister. Ce problème est donc extrêmement mal conditionné, en particulier à cause du bas du spectre.

Préconditionnement de la méthode

Comme nous ne souhaitons pas régulariser a priori le problème, il est intéressant d'utiliser un solveur itératif pour le résoudre : les itérations introduisent une forme de filtrage naturel de la solution [5].

La question du preconditionnement se pose alors. Dans certaines études aucun preconditionneur n'est utilisé [3], avec des résultats satisfaisants.

Par analogie avec la méthode de décomposition de domaine primale (BDD), on pourrait être tenté d'utiliser le preconditionneur $(\mathbf{S}_n^{-1} - \mathbf{S}_d^{-1})$. On verra lors de la présentation que cet opérateur répond à certains critères d'optimalité, néanmoins étant lui-même la discrétisation d'un opérateur compact, il est plutôt néfaste en terme de régularité de la solution.

Un preconditionnement efficace consiste à utiliser \mathbf{S}_d^{-1} . Tout d'abord, on a la propriété suivante.

Propriété 3. Le spectre du système de Steklov-Poincaré primal preconditionné par \mathbf{S}_d^{-1} est compris entre 0 et 1. En effet

$$\mathbf{S}_d^{-1} (\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n) = \mathbf{I} - \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{S}_n \text{ avec } \mathbf{S}_d \geq \mathbf{S}_n \quad (8)$$

Cette propriété permet d'utiliser un algorithme de point fixe. On retrouve à ce moment là la méthode de Kozlov, Maz'ia et Fomin [9].

De plus, preconditionner par \mathbf{S}_d^{-1} permet, d'après (5), de privilégier les directions les plus énergétiques. Cela constitue donc une forme de régularisation mécanique du problème, particulièrement sensible dans les cas où \mathbf{S}_d^{-1} a une distribution spectrale non-régulière, typiquement pour les structures fortement hétérogènes.

On donne une illustration des différents preconditionnements sur le cas test d'un tuyau partiellement rempli d'un fluide pesant. L'objectif est de déterminer le niveau de fluide et sa densité, ce qui revient à chercher la condition limite en effort imposé à l'intérieur du tuyau en mesurant le déplacement sur l'extérieur du tuyau (supposé libre d'efforts). La figure 2 montre la géométrie du problème direct. On utilise un algorithme de gradient conjugué. On compare dans la figure 3 les résultats donnés par la méthode de Steklov-Poincaré sans preconditionnement, avec le preconditionnement dual et avec le preconditionnement de KMF, sur le problème non-bruité. L'erreur est définie comme la norme L_2 sur le bord de la différence entre la solution obtenue et la solution de référence, rapportée à la norme de la solution de référence.

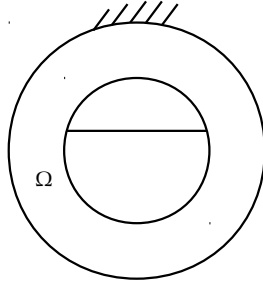


FIGURE 2 – Problème du tuyau

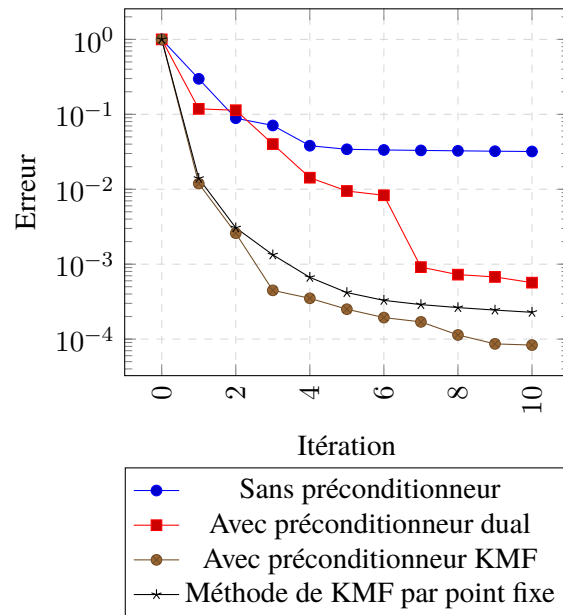


FIGURE 3 – Courbes de convergence de différentes variantes de la méthode Steklov-Poincaré primale

Filtrage de la solution par analyse de Ritz

Dans le cas d'un problème inverse, il n'est pas toujours évident de savoir quand arrêter les itérations : la compacité du problème fait qu'il arrive un moment où la décroissance du résidu se paye au prix d'une explosion de la solution. Un critère possible consiste à mettre en regard le résidu et la norme de la solution à l'aide d'une *L-curve*. Nous proposons ici de post-traiter la solution obtenue par le gradient conjugué préconditionné par \mathbf{S}_d^{-1} de manière à la régulariser.

Le gradient conjugué est un solveur de Krylov couplé avec une projection de Galerkin. Si on note $\mathbf{r}_j = (\mathbf{b}_d - \mathbf{b}_n - (\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_b)\mathbf{u}_j)$ le résidu associé à une approximation \mathbf{u}_j (l'indice j correspond à l'itération, l'indice m est omis), et $\mathcal{K}_j = \text{vect}(\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{S}_d^{-1}(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n)^{j-1}\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{r}_0)$ le sous-espace de Krylov généré par le problème préconditionné, le principe du gradient conjugué à l'itération j est le suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_j \in \mathbf{u}_0 + \mathcal{K}_j / \mathbf{r}_j \perp \mathcal{K}_j \quad (9)$$

Ce principe de recherche est associé au principe suivant d'approximation des valeurs propres généralisées du couple $(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n, \mathbf{S}_d)$:

$$\text{Pour } 1 \leq k \leq j, \text{ trouver } (\mathbf{u}_{j,k}, \theta_{j,k}) \in \mathcal{K}_j \times \mathbb{R}^{+*} / ((\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n)\mathbf{u}_{j,k} - \theta_{j,k}\mathbf{S}_d\mathbf{u}_{j,k}) \perp \mathcal{K}_j \quad (10)$$

les valeurs $(\theta_{j,k})_k$ sont appelées valeurs de Ritz et les vecteurs $(\mathbf{u}_{j,k})_k$ vecteurs de Ritz. On suppose les valeurs de Ritz rangées par ordre décroissant.

Plus précisément, à l'itération j , il est possible à coût nul de calculer une base de \mathcal{K}_j notée \mathbf{V}_j telle que :

$$\mathbf{V}_j^T (\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n) \mathbf{V}_j = \Theta_j := \text{diag}(\theta_{j,k})_k \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_j^T \mathbf{S}_d \mathbf{V}_j = \mathbf{I} \quad (11)$$

La base \mathbf{V}_j est donc orthonormale au sens de l'énergie. Elle est particulièrement adaptée pour rechercher la solution. On note $\mathbf{V}_{j,k}$ et $\Theta_{j,k}$ la troncature des éléments de Ritz aux k premiers vecteurs. On peut

définir la famille d'approximations suivante de la solution du problème de Steklov-Poincaré :

$$\mathbf{u}_{j,k} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{V}_{j,k} \Theta_{j,k}^{-1} \mathbf{V}_{j,k}^T \mathbf{r}_0$$

Pour k croissant, $(\mathbf{u}_{j,k})$ est à énergie croissante et à erreur (en norme associée à $(\mathbf{S}_d - \mathbf{S}_n)$) décroissante. Elle est donc plus propice à une analyse de type *L-curve* pour déterminer un critère d'arrêt.

Afin d'illustrer le caractère régularisant de cette démarche, on trace dans la figure 4, pour le problème précédent, pour lequel on a ajouté un bruit blanc gaussien d'amplitude 10% sur la mesure en déplacement, deux *L-curves* : la première utilise comme paramètre de régularisation le nombre d'itérations de l'algorithme du gradient conjugué, comme proposé par exemple dans [5]. La seconde *L-curve* utilise comme paramètre de régularisation le nombre de modes de Ritz.

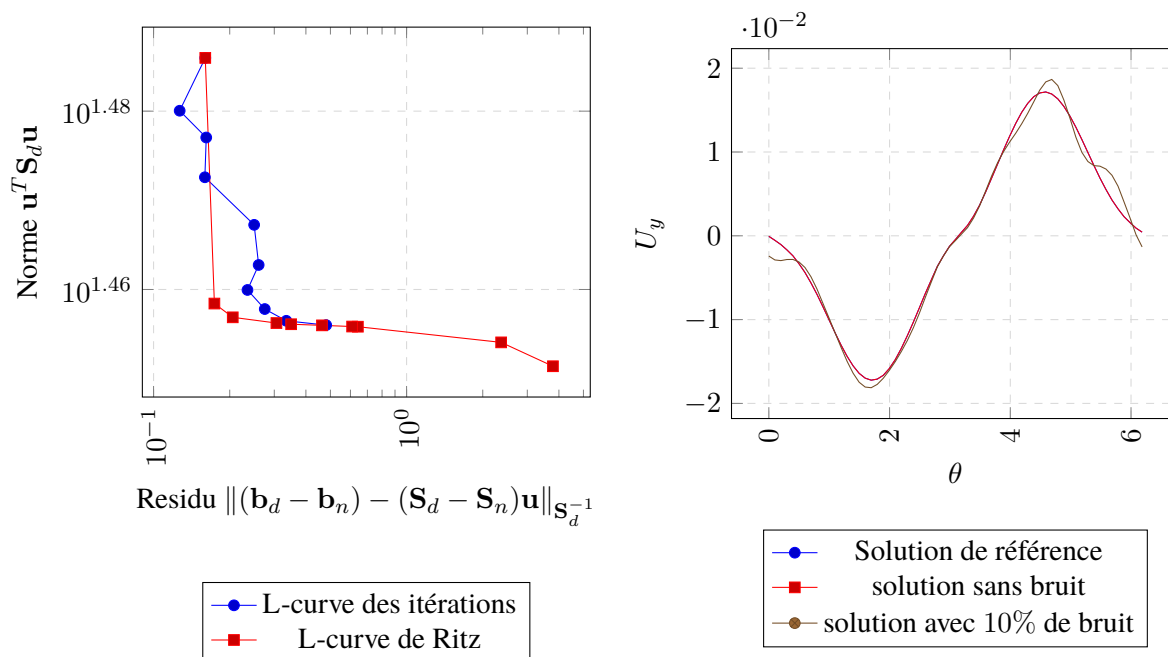


FIGURE 4 – L-curves paramétrées par le nombre d'itération ou par le nombre de modes de Ritz

FIGURE 5 – Déplacement vertical identifié dans un cas sans puis avec bruit, comparés à la solution de référence

La forme des *L-curves* montre que pour ce problème, et lorsqu'on utilise un algorithme du gradient conjugué, la régularisation par troncature de la base de Ritz est plus pertinente que la régularisation par choix de la meilleure itération. La figure 5 compare la solution de référence avec les déplacements identifiés avec et sans l'ajout d'un bruit blanc gaussien. On remarque que la solution sans bruit est superposée à la référence, tandis que la solution avec bruit s'en écarte un peu.

Conclusion

Les résultats présentés ici permettent d'illustrer dans le cas de la méthode de Steklov-Poincaré primale l'intérêt d'utiliser un préconditionneur dual de type KMF pour la vitesse de convergence, et la précision de la méthode. De plus, on a proposé une méthode de régularisation à-posteriori se basant sur l'analyse de Ritz. Plusieurs aspects du travail réalisé n'ont pas été présentés ici, comme l'application des mêmes méthodes dans le cas de la méthode de Steklov-Poincaré duale et l'utilisation d'un solveur de Krylov par blocs, associé à une analyse de Ritz ad-hoc pour accélérer encore la convergence de la résolution.

Références

- [1] O. Allix, P. Feissel, and P. Thévenet. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & structures*, 81(12) :1177–1191, 2003.
- [2] S. Andrieux, T. Baranger, and A. B. Abda. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse problems*, 22(1) :115, 2006.
- [3] M. Azaiez, F. B. Belgacem, and H. El Fekih. On Cauchy’s problem : II. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems*, 22(6) :1307–1336, 2006.
- [4] F. B. Belgacem and H. El Fekih. On Cauchy’s problem : I. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems*, 21(6) :1915, 2005.
- [5] D. Calvetti, B. Lewis, and L. Reichel. GMRES, L-curves, and discrete ill-posed problems. *BIT Numerical Mathematics*, 42(1) :44–65, 2002.
- [6] A. Cimetiere, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553–570, 2001.
- [7] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [8] M. L. Kadri, J. B. Abdallah, and T. N. Baranger. Identification of internal cracks in a three-dimensional solid body via Steklov–Poincaré approaches. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(10) :674–681, 2011.
- [9] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, and A. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 31(1) :64–74, 1991.
- [10] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(3) :233–241, 1993.
- [11] L. Marin and D. Lesnic. Regularized boundary element solution for an inverse boundary value problem in linear elasticity. *Communications in numerical methods in engineering*, 18(11) :817–825, 2002.