

# Identification de propriétés matérielles par traitement d'images de mesures de champs

C. BELLIS<sup>a\*</sup>, M. TRABELSI<sup>a</sup>, F. FRÉMY<sup>b</sup>

a. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique – Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille  
bellis@lma.cnrs-mrs.fr

b. Saint-Gobain – Northboro RD Center, MA, USA, Etats-Unis

## Résumé :

*Cette communication porte sur la reconstruction quantitative de paramètres matériaux à partir d'images de mesures de champs. Sur la base de la formulation intégrale du problème considéré dans le cas périodique nous présenterons successivement deux approches découlant de ce formalisme : l'une, relative aux matériaux de faibles contrastes, repose sur la dérivation de formules de reconstruction analytiques, l'autre, associée plus généralement à des matériaux de contrastes arbitraires, repose sur un algorithme de déconvolution d'images. D'une façon générale, la spécificité de ces approches est l'adoption du point de vue des méthodes de traitement d'images. Nous verrons ainsi comment ces approches peuvent être utilisées pour reconstruire quantitativement des champs matériaux d'intérêts. La description des méthodes numériques développées et la présentation d'un ensemble de cas tests numériques, utilisant des données synthétiques, illustreront la stratégie proposée.*

**Mots clefs : Mesures de champs, Traitement d'images, Algorithme de déconvolution, Méthode FFT.**

## 1 Contexte et motivations

Les techniques d'imagerie en mécanique des solides et les méthodes de caractérisation qui en découlent sont en pleine expansion en laboratoire comme pour nombreuses applications industrielles. Dans des domaines variés de la physique, les méthodes récentes de mesure de champs permettent de contrôler expérimentalement le comportement d'un milieu donné sous l'action d'une sollicitation externe, et ce afin d'obtenir des mesures internes de champs physiques, tels que déplacement ou déformation, température ou encore, potentiel électrique. À partir de telles mesures, l'objectif général vise à reconstruire quantitativement des distributions de paramètres matériaux constitutifs d'intérêts, qui caractérisent le milieu ou l'échantillon d'étude.

Dans ce contexte, des méthodes d'identifications se développent rapidement, en particulier pour des applications en mécanique des solides, voir [1] ainsi que [2] pour une étude comparative de méthodes existantes. Plus précisément, nous pouvons distinguer différentes classes de méthodes qui utilisent des mesures de champs en déplacement ou en déformations : (i) la méthode dite *finite element model updating* (FEMU) [3], (ii) la méthode de l'écart à la relation de comportement [4], (iii) la méthode des champs virtuels [5], ou encore (iv) la méthode de l'écart à l'équilibre [6].

## 2 Objectifs et méthode

### 2.1 Introduction

Dans le contexte considéré, les données disponibles constituent typiquement une collection d'images numériques. La plupart des méthodes évoquées au paragraphe précédent sont fondées sur une approche par éléments finis et l'emploi d'algorithmes d'optimisation, voir par exemple [3, 4, 6]. L'originalité de l'approche proposée ici est d'adopter le point de vue des méthodes de traitement d'images (sans maillage), ce qui permet de se placer strictement au niveau de la mesure disponible (l'image) et d'effectuer un post-traitement direct de celle-ci.

Plus spécifiquement, le problème inverse d'identification des propriétés matérielles est abordé dans cette étude via la formulation intégrale du problème direct considéré, qui permet de relier les champs mesurés aux champs de paramètres constitutifs. Ainsi, sur la base de développements asymptotiques dans le cas de matériaux de faibles contrastes ou, dans le cas général, en utilisant un algorithme de déconvolution d'image (implémenté dans le domaine de Fourier) la stratégie proposée permet de reconstruire les paramètres matériaux constitutifs par une analyse directe des mesures de champs, c'est à dire des images, disponibles. Dans le cas général, l'algorithme proposé est construit sur une méthode itérative de gradient qui utilise de façon centrale la transformée de Fourier rapide afin d'optimiser les performances de calcul. Cette méthodologie sera décrite dans le cadre simplifié des problèmes de conductivité thermique ou électrique tout en étant généralisable à l'élasticité comme nous le verrons.

### 2.2 Formulation intégrale

Considérons un milieu élastique périodique de volume élémentaire représentatif  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ , avec  $d = 2$  ou  $3$ , et caractérisé par le tenseur d'élasticité  $\mathcal{L} \in L_{\text{per}}^\infty(\mathcal{V}, \overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}(\overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}\mathbb{R}^d))$ . Le milieu est considéré tel que la longueur caractéristique des inhomogénéités soit faible devant celle du domaine  $\mathcal{V}$ . Les équations du problème sont les suivantes :

$$\nabla \wedge [\nabla \wedge \varepsilon(\mathbf{x})]^t = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

où  $\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}\mathbb{R}^d$  est le champ de déformation périodique,  $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{V} \rightarrow \overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}\mathbb{R}^d$  est le champ de contrainte associé qui satisfait des conditions d'anti-périodicité sur la frontière  $\partial\mathcal{V}$ . La première équation dans (1) traduit les conditions de compatibilités géométriques ; la loi de comportement et l'équation d'équilibre s'expriment au moyen des produits doublement et simplement contractés, notés :  $\cdot$  respectivement. Par ailleurs, nous supposons que le chargement mécanique extérieur est compatible avec l'application d'un champ de déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon} \in \overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}\mathbb{R}^d$  tel que

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} \varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \bar{\varepsilon}. \quad (2)$$

Ainsi, le champ de déformation solution est décomposable sous la forme  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon} + \nabla_{\text{sym}}\mathbf{u}(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{u}$  désigne la fluctuation  $\mathcal{V}$ -périodique du champ de déplacement.

En introduisant un tenseur d'élasticité de référence  $\mathcal{L}_0 \in \overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}(\overset{2}{\otimes}_{\text{sym}}\mathbb{R}^d)$  et notant  $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0$ , l'utilisation d'une approche perturbative « à la Eshelby », permet de démontrer que la solution  $\varepsilon$  du

problème d'élasticité (1)–(2) satisfait l'équation intégrale dite de Lippmann-Schwinger [7, 8] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\boldsymbol{\Gamma}_0 * (\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} : \boldsymbol{\varepsilon})](\mathbf{x}) \quad (3)$$

où  $*$  désigne un produit de convolution en espace et  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  est l'opérateur de Green périodique associé à  $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ . Cet opérateur est tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\Gamma}_0 * \boldsymbol{\tau}](\mathbf{x})$  constitue un champ de déformation compatible dans  $\mathcal{V}$  satisfaisant  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ . Il est à noter que l'opérateur  $\boldsymbol{\Gamma}_0$  est connu analytiquement dans le domaine de Fourier [8] si bien que le calcul du produit de convolution dans (3) peut être contourné par l'application des transformées de Fourier directe et inverse. Ainsi, c'est la formulation intégrale (3) et son expression duale dans le domaine de Fourier qui constituent le point de départ des deux approches proposées.

## 2.3 Formules de reconstruction analytiques

Dans une première approche, nous considérons le cas de matériaux de faibles contrastes tels que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + \delta\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) \quad \text{avec } \|\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}\| = o(\|\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\|). \quad (4)$$

Dans ce contexte, l'équation intégrale (3) peut être approchée au premier ordre par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\boldsymbol{\Gamma}_0 * (\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})](\mathbf{x}) + o(\|\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}\|). \quad (5)$$

Nous considérons par ailleurs le cas de matériaux élastiques isotropes, pour lesquels  $\boldsymbol{\mathcal{L}}$  s'exprime au moyen des champs de modules de compressibilité et de cisaillement  $\kappa, \mu \in L^\infty_{\text{per}}(\mathcal{V}, \mathbb{R}_+^*)$  et des projecteurs tensoriels associés, i.e.  $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = d\kappa(\mathbf{x})\boldsymbol{\mathcal{J}} + 2\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\mathcal{K}}$ .

Dans [9], nous démontrons que dans le cas considéré de matériaux isotropes de faibles contrastes, des formules de reconstructions locales et analytiques peuvent être obtenues en exploitant algébriquement les propriétés de l'opérateur  $\boldsymbol{\Gamma}_0$ . Ces formules sont données sans démonstration ci-dessous.

Supposons  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  un champ de déformation macroscopique purement sphérique et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  le champ de déformation local correspondant. Ce dernier satisfait alors au premier ordre l'équation locale suivante :

$$\kappa(\mathbf{x}) = \kappa_0 + \frac{\lambda_J^{-1}}{d} \left[ 1 - \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})] \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]}{d\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2} \right] + o(\|\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}\|), \quad (6)$$

où  $\lambda_J^{-1} = d\kappa_0 + 2(d-1)\mu_0$  avec  $\kappa_0, \mu_0$  les modules élastiques de référence.

Pour des champs macroscopiques purement déviatoriques  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}$ , pour  $i = 1, \dots, n_K$ , et tels que

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{n_K} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} \otimes \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}}{\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\|^2} \quad \text{with} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)} = \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\| \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)}\| \delta_{ij}.$$

alors, au premier ordre, les champs de déformations locaux correspondants  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}(\mathbf{x})$  satisfont l'équation locale

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 + \frac{\lambda_K^{-1}}{2} \sum_{i=1}^{n_K} \left[ 1 - \frac{\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}(\mathbf{x})] : \text{dev}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}]}{\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\|^2} \right] + o(\|\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}\|), \quad (7)$$

avec  $\lambda_K^{-1} = \frac{2\mu_0(d\kappa_0 + 2(d-1)\mu_0)}{d(d-1)(\kappa_0 + 2\mu_0)}$  et  $n_K = 2$  ou  $5$  pour  $d = 2$  ou  $3$  respectivement.

Ainsi, les formules de reconstruction locales (6) et (7) obtenues permettent de convertir *analytiquement* des cartes de champs de déformation en cartes de modules élastiques. Notons que la sommation sur  $n_K$  champs dans l'équation (7) disparaît dans le cas des matériaux macroscopiquement isotropes.

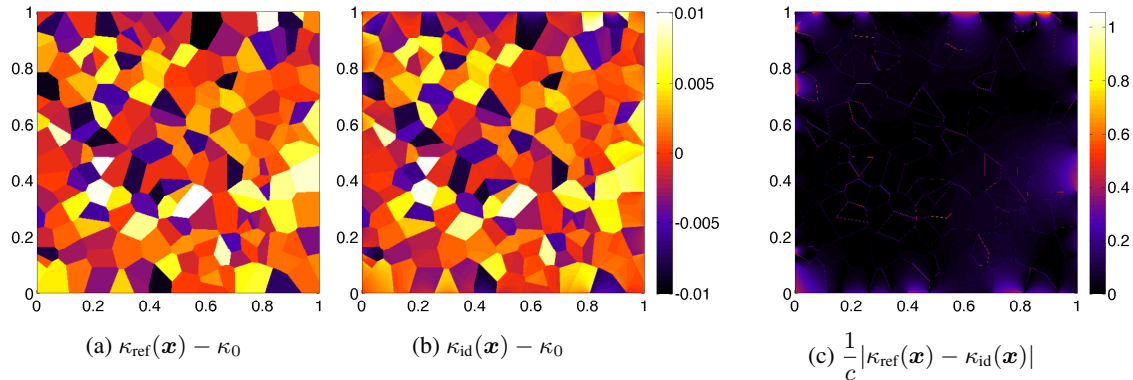


FIGURE 1 – (a) Distribution cible de module élastique avec contraste  $c = 10^{-2}$ , (b) Distribution identifiée par conversion du champ de déformation local, et (c) carte d'erreur relative sur la reconstruction.

Ces formules de reconstructions analytiques seront discutées sur un ensemble de cas numériques avec données synthétiques. La figure 1 montre un exemple type de reconstruction où une distribution cible de paramètre matériaux (Fig. 1a) est identifiée (Fig. 1b) par conversion directe d'une carte locale de champ de déformation mesuré.

## 2.4 Méthode de déconvolution d'images

Pour des matériaux de contraste quelconque, la relation (4) et l'approximation (5) ne sont plus valides. Nous considérons alors l'équation intégrale (3) que nous réécrivons sous la forme d'une équation intégrale dont l'inconnue est le champ  $\delta\mathcal{L}$  de paramètre constitutif du matériau que l'on souhaite reconstruire. En effet, pour tout point  $\mathbf{x}$  dans l'image de la cellule  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{A}[\delta\mathcal{L}](\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

où  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon} - \varepsilon(\mathbf{x})$ . Dans cette equation, le second membre  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  dépend uniquement du chargement imposé et des mesures de champs disponibles  $\varepsilon(\mathbf{x})$ . Par ailleurs, d'après l'équation (3), l'opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  est un opérateur de convolution dont le noyau dépend d'une part de l'opérateur de Green  $\Gamma_0$  du milieu considéré et d'autre part de la mesure de champ de déformation  $\varepsilon(\mathbf{x})$  disponible.

Enfin, afin d'exploiter la connaissance analytique  $\hat{\Gamma}_0$  de l'opérateur de Green dans le domaine de Fourier et pour contourner le calcul (coûteux numériquement) du produit de convolution, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est réécrit au moyen des transformées de Fourier directe et inverse de la façon suivante :

$$\mathcal{A}[\delta\mathcal{L}](\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{\Gamma}_0 : \mathcal{F}[\delta\mathcal{L} : \varepsilon] \right](\mathbf{x}). \quad (9)$$

Notons, que si  $n = 1, \dots, N$  mesures de déformation  $\varepsilon^{(n)}$  sont disponibles, alors nous pouvons formuler un opérateur  $\mathcal{A}^{(n)}$  et un second membre  $\mathbf{b}^{(n)}$  correspondant à chacune de ces expériences en effectuant les substitutions appropriées dans leurs expressions respectives.

L'approche proposée vise à résoudre le problème linéaire (8) ou, d'une façon plus générale, un ensemble de problèmes linéaires dans le cas où de multiples expériences sont utilisées. Ainsi, dans [10], nous

proposons une méthode de résolution fondée sur une formulation aux moindres carrés et la minimisation associée suivante :

$$\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\delta\tilde{\mathcal{L}}} \sum_{n=1}^N \|\mathcal{A}^{(n)}[\delta\tilde{\mathcal{L}}] - \mathbf{b}^{(n)}\|^2 \quad (10)$$

où la norme désigne une norme sur les images de mesures de champs. De plus, afin d'utiliser la formulation (9) dans le domaine de Fourier, nous proposons d'utiliser un algorithme itératif utilisant la construction de sous-espaces de Krylov. En particulier, nous avons choisi de travailler avec l'algorithme LSQR qui est bien adapté à la résolution de problèmes inverses de grandes tailles [11].

Nous discuterons l'approche proposée dans le cadre des problèmes de conductivité (thermique ou électrique) qui autorise un formalisme simplifié mais analogue au problème d'élasticité. Nous illustrerons l'approche proposée sur un ensemble de cas tests numériques pour des configurations isotropes et anisotropes. Les figures 2 et 3 montre un exemple de reconstruction obtenues par déconvolution des images de mesures de champs avec l'approche proposée. Par ailleurs, dans le cas de données bruitées, nous montrerons que l'approche proposée peut être facilement couplée à une méthode de régularisation spectrale, c'est à dire dans le domaine de Fourier, qui permet d'ajuster le degré de résolution sur la solution en fonction du niveau de bruit estimé.

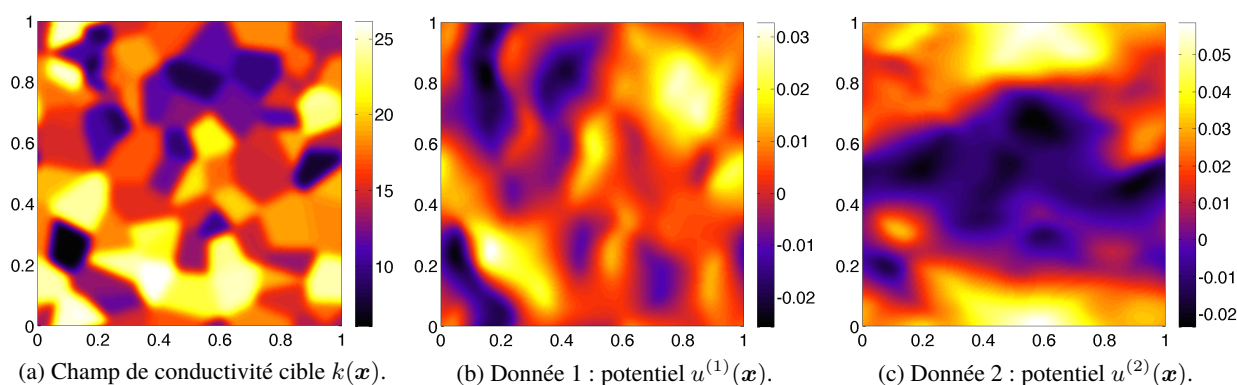


FIGURE 2 – Champ de conductivité de référence à identifier et images de mesures de champ simulées pour deux expériences 1 et 2 avec  $\bar{\epsilon}^{(1)} = (1, 0)$  et  $\bar{\epsilon}^{(2)} = (0, 1)$ .

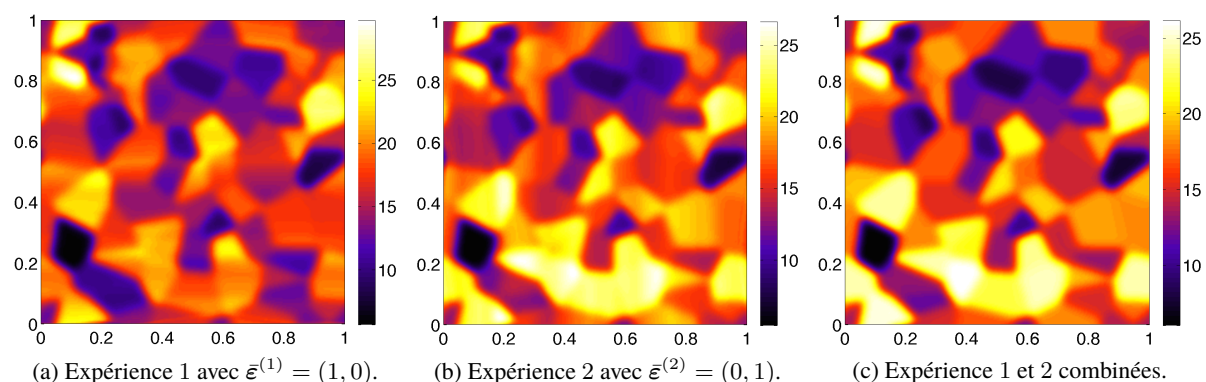


FIGURE 3 – Champs de conductivité reconstruits à convergence par l'algorithme proposé et obtenus pour différentes combinaisons des mesures de champs simulées et associées aux expériences considérées.

### 3 Conclusions

Les méthodes proposées permettent de reconstruire quantitativement des paramètres matériaux cibles par traitement d'images de mesures de champs. Une première méthode analytique repose sur des formules de reconstruction locales qui sont obtenues dans le cas de matériaux de faibles contrastes. Pour des matériaux de contrastes arbitraires une deuxième méthode repose sur la déconvolution de l'ensemble des images de mesures de champs disponibles. Ses principaux attraits sont les suivants :

- Méthode sans maillage fondée sur le traitement d'images 2D (pixels) ou 3D (voxels).
- Approche rapide et facilement parallélisable en raison d'une utilisation intensive de la transformée de Fourier rapide, ce qui représente un réel intérêt pour une identification « en ligne ».
- De multiples expériences peuvent être aisément combinées afin d'améliorer la qualité des reconstructions.
- Le bruit susceptible d'affecter les mesures est efficacement contrôlé dans le domaine de Fourier, le processus de régularisation s'effectuant via troncature spectrale.
- Un ensemble de configurations matérielles peuvent être abordées : modèles de conductivité ou élastiques, configurations matérielles isotropes ou anisotropes.
- Possible mise en œuvre d'une identification de propriétés matérielles « en ligne » via l'implémentation de la méthode sur cartes graphiques.

### Références

- [1] M. Grédiac and F. Hild, editors. Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics. John Wiley & Sons, Inc., 2013.
- [2] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, 2008.
- [3] R. Mahnken and E. Stein. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136 :225–258, 1996.
- [4] G. Geymonat and S. Pagano. Identification of mechanical properties by displacement field measurement : a variational approach. *Meccanica*, 38 :535–545, 2003.
- [5] S. Avril and F. Pierron. General framework for the identification of elastic constitutive parameters from full-field measurements. *Int. J. of Solids and Struct.*, 44 :4978–5002, 2007.
- [6] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. A finite element formulation to identify damage fields : The equilibrium gap method. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 61 :189–208, 2004.
- [7] J. R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Advances in Applied Mechanics*, 21 :1–78, 1981.
- [8] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] C. Bellis. Converting strain maps into elasticity maps for materials with small contrast. *J. Mech. Phys. Solids*, 2016.
- [10] C. Bellis, M. Trabelsi, F. Fremy. Reconstructing material properties by deconvolution of full-field measurement images. The conductivity case. *Inverse Problems*, 2017.
- [11] P. Hansen. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.