

Analyse des instabilités d'un écoulement de stagnation autour d'un cylindre horizontal chauffé

S. Mouloud^a, F. Nait Bouda^b, F. Mendil^a, D. Sadaoui^a.

a.Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME), Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie.

b.Laboratoire de Physique Théorique (LPT), Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie.

Résumé :

L'objectif de la présente étude est d'examiner l'influence des effets hydrodynamiques et thermiques sur l'instabilité d'un écoulement de couche limite bidimensionnel de stagnation autour d'un cylindre horizontal chauffé ; l'écoulement extérieur impactant étant ascendant et orthogonal à l'axe du cylindre. L'écoulement de base qui est régi par un système de deux équations différentielles couplées, après la réduction des équations de quantité de mouvement et d'énergie et l'utilisation d'une analyse de similarité, est résolu numériquement en utilisant le solveur `bvp4c` dans le logiciel MATLAB. La stabilité linéaire de l'écoulement de base est alors analysée en se servant de la décomposition en modes normaux des perturbations, le paramètre de contrôle étant le nombre de Richardson. Le problème aux valeurs propres résultant est alors résolu numériquement après une discrétisation par la méthode pseudo-spectrale de type Laguerre, plus appropriée pour ce type de problème. Les résultats de stabilité obtenus, notamment à travers les courbes neutres de stabilité marginale ainsi que les courbes de dispersion, montrent que la stabilité linéaire de l'écoulement dépend de la nature du fluide.

Abstract:

The purpose of this study is to examine the influence of the effects, both hydrodynamic and thermal, on the instability of a two-dimensional stagnation flow on a heated horizontal cylinder; the external flow was considered ascending and orthogonal to the axis of the cylinder. The basic flow, which is governed by a system of two coupled differential equations after reducing the governing equations and the use of a similarity analysis, is solved numerically using the `bvp4c` solver in the MATLAB software. The linear stability is then analyzed by using the normal mode decomposition for the perturbations; Richardson number is chosen to be the control parameter of the stability. The problem with the resulting eigenvalues is then solved numerically after a discretization by the pseudo-spectral method employing Laguerre's polynomials, more appropriate for this type of problem. The stability results obtained, in particular through the neutral curves characterizing the marginal stability as well as the dispersion curves, show that the linear stability of the flow depends on the nature of the fluid.

Mots clefs : Couche limite, Cylindre chauffé, Stabilité linéaire, Point stagnation.

1 Introduction

Les substrats en forme cylindrique en situation d'impact avec les fluides sont très courants en industrie d'où le choix de la présente étude, mais également car l'écoulement de couche limite se développant le long de la paroi cylindrique présente une zone instable notamment après le décollement de la couche limite. La convection thermique dans ces conditions présente alors un caractère complexe où des instabilités hydrodynamiques se conjuguent aux instabilités thermiques. L'intérêt porté à ce type de problème apparaît à travers le grand nombre d'études fondamentales réalisées depuis plus quarante années. Le cas de la convection naturelle en régime laminaire se développant sur un cylindre horizontal a intéressé beaucoup d'auteurs comme par exemple Churchill et al. [1] et Kuehen [2] lesquelles études ont abouti à des expressions simples du Nusselt en régime laminaire et turbulent, pour la première citée, et à des conditions d'application de l'approximation de Boussinesq, pour la seconde. Pour la convection mixte, les travaux de Markin [3] ont montré que les pulsations de l'écoulement incident ont un effet bénéfique sur la convection dans la zone dynamique instable alors que la face amont du cylindre est peu sensible aux perturbations de petites échelles. Plus tard, les études de Badr [4] et de Amouche et al. [5] ont porté une contribution appréciable sur le plan théorique. Plusieurs aspects ont ensuite été traités couvrant la nature du fluide et du substrat [6-10]. Aussi, Varaprasad Patnaik et al [11] se sont intéressés à l'évolution des tourbillons en fonction de Richardson à l'aval d'un cylindre chauffé.

Comme le montre la littérature l'évolution de la couche limite se développant sur un cylindre chauffé est bien connue (et modélisée) dans des configurations idéales (parois parfaitement lisses, absence de perturbations extérieures, etc). Dans la réalité, des perturbations se superposent à l'écoulement idéal. Lorsque les perturbations s'amplifient significativement, la nature de l'écoulement est profondément modifiée, il y a transition de l'état laminaire à l'état turbulent. L'objectif des études de stabilité est précisément de prévoir l'évolution des perturbations et de déterminer les points critiques. La stabilité d'un écoulement sur une plaque horizontale a été étudiée par plusieurs auteurs. Criminal et al. [12] ont étudié l'évolution des perturbations tridimensionnelles, Amaouche et al. [13,14] ont examiné l'influence des effets thermiques et l'effet d'un champ magnétique constant sur l'instabilité thermique d'un écoulement incident sur une plaque horizontale, ils ont constaté que l'effet thermique déstabilise l'écoulement, mais avec le champ magnétique l'écoulement devient moins instable. Plus récemment, Nait Bouda et al. [15] ont examinés les effets de transfert de masse sur l'instabilité thermique de l'écoulement de couche limite au point de stagnation. La stabilité hydrodynamique d'un écoulement autour d'un cylindre a été étudiée par Mittal [16], il constate que la stabilité de l'écoulement dépend du nombre de Reynolds.

2 Ecoulement de base

On considère un écoulement de couche limite en convection mixte induit par un écoulement incident (u_∞ , T_∞), vertical ascendant, sur un cylindre horizontal isotherme de rayon a . On suppose que la température T_w sur la surface du cylindre est uniforme, de tel sorte que le cylindre peut être soit chauffé ou refroidi par convection à partir d'un fluide de température T_∞ . Les coordonnées orthogonales x et y sont mesurées le long de la surface du cylindre, en partant du point de stagnation correspondant à $x = 0$, le modèle physique est schématisé à la figure 1.

On recherche, en premier, la solution de l'écoulement de base considéré stationnaire et bidimensionnel. Les équations correspondantes, de type couche limite, se présentent comme suit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \bar{\nu}_e \frac{d\bar{u}_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Avec comme conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad T = T_w, \quad \text{si } y = 0 \\ \bar{u} \rightarrow \bar{u}_e(x), \quad T \rightarrow T_\infty, \quad \text{si } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

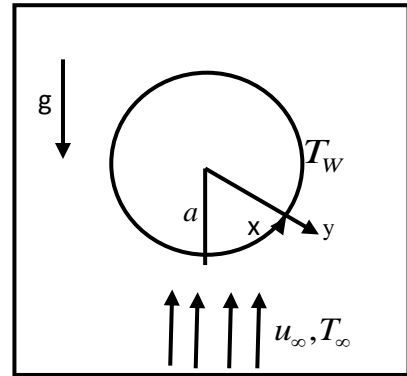


Fig1. Schéma du problème physique

\bar{u} et \bar{v} sont les composantes de vitesse le long des axes x et y respectivement, T est la température locale du fluide, g l'accélération de la pesanteur, ν la viscosité cinématique, α_m la diffusivité thermique, β le coefficient d'expansion thermique et les indices w et ∞ indiquent, respectivement, les conditions à la paroi et à l'extérieur de la couche limite.

Suivant Merkin [3] et Nazar et al. [6], $\bar{u}_e(x)$ est donnée par l'expression :

$$\bar{u}_e(x) = U_\infty \sin(x/a)$$

Les échelles adimensionnelles sont les suivants :

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = R_e^{1/2} (y/a), \quad u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \quad v = R_e^{1/2} (\bar{v}/a), \quad u_e(\xi) = \bar{u}_e(x)/U_\infty, \\ \theta(\xi, \eta) = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty) \end{aligned} \quad (6)$$

En remplaçant les variables (6) dans les équations (1-3), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = u_e \frac{du_e}{d\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda \theta \sin(\xi), \quad (8)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (9)$$

Où : Pr est le nombre de Prandtl et λ le nombre de Richardson (paramètre de convection mixte) donnés par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_m}, \quad \lambda = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a}{U_\infty^2} = \frac{Gr}{Re^2} \quad (10)$$

Avec : $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2}$, nombre de Grashof

Les conditions limites sans dimension deviennent :

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{si } \eta = 0 \\ u \rightarrow u_e = \sin(\xi), \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{si } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12)$$

Pour résoudre les équations (7-9) sous réserve des conditions aux limites (12), on introduit la solution sous la forme proposée par Merkin [3] et Ping Cheng [17] soit : $\psi = \xi f(\xi, \eta)$ et $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\xi, \eta)$ (13)

Où ψ est la fonction de courant adimensionnelle définie de la manière habituelle :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} . \quad (14)$$

On obtient les équations suivantes (prime désigne une différenciation par rapport à η) :

$$f''' + ff'' - f'^2 + \frac{\sin \xi \cos \xi}{\xi} + \lambda \frac{\sin \xi}{\xi} \theta = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (15)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = \xi \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (16)$$

Les conditions aux limites correspondantes deviennent :

$$f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{si } \eta = 0 \quad (17)$$

$$f' \rightarrow \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{si } \eta \rightarrow \infty$$

On s'intéressant à l'écoulement au voisinage immédiat de stagnation, correspondant à $\xi = 0$, les équations (15– 16) sont réduites aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 + \lambda \theta = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = 0 \quad (19)$$

Avec les conditions aux limites :

$$f = f' = 0, \quad \theta = 1, \quad \text{si } \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{si } \eta \rightarrow \infty \quad (20)$$

3 Analyse de la stabilité linéaire

Afin d'examiner les conditions critiques d'apparitions des instabilités une analyse de stabilité de la solution de base au voisinage du point de stagnation est menée en adoptant l'approche linéaire ceci en se limitant aux perturbations de faibles amplitudes. L'écoulement instantané est alors décomposé en une superposition de l'écoulement de base (u, v, w, p, θ) et d'une perturbation $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$ comme suit :

$$(u, v, w, p, \theta)(\xi, \eta, z, t) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{\theta})(\xi, \eta) + (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\theta})(\xi, \eta, z, t) \quad (21)$$

En introduisant la décomposition (21) dans les équations du mouvement tridimensionnel tout en négligeant les termes non linéaires devant les termes linéaires, on obtient le système d'équations aux perturbations suivant :

$$\left(R - \nabla^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right) \tilde{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \tilde{v} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tilde{w} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = 0 \quad (22)$$

$$\left(R - \nabla^2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \right) \tilde{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \tilde{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \tilde{w} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} + \lambda(\tilde{\theta}) = 0 \quad (23)$$

$$\left(R - \nabla^2 + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \tilde{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \tilde{u} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

$$\left(R - \frac{1}{Pr} \nabla^2 \right) \tilde{\theta} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \tilde{u} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \eta} \tilde{v} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \tilde{w} = 0 \quad (25)$$

Avec R un opérateur différentiel défini par $R = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta}$

La solution de système d'équations (22-25) caractérisant l'écoulement perturbé peut être recherchée en considérant des perturbations sous forme de modes normaux de type Gortler-Hammerlin, Theofilis et al. [18], données par :

$$\left(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{\theta} \right) (\xi, \eta, z, t) = \left(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p} \right) (\eta) \exp(ikz + \omega t) \quad (26)$$

Etant donné que l'approche stabilité temporelle est choisie dans cette étude le nombre d'onde k est considéré réel et la fréquence ω est complexe a priori. Les amplitudes de perturbations regroupées dans le vecteur $\hat{q}(\eta)$ seront alors les inconnues du nouveau système d'équations à résoudre qui se présente comme suit :

$$\hat{u} + D\hat{v} + ik\hat{w} = 0 \quad (27)$$

$$\left(D^2 + fD - 2f' - k^2 \right) \hat{u} - f''\hat{v} = \omega\hat{u} \quad (28)$$

$$\left(D^2 + fD + f' - k^2 \right) \hat{v} - D\hat{p} - \lambda\hat{\theta} = \omega\hat{v} \quad (29)$$

$$\left(D^2 + fD - k^2 \right) \hat{w} + ik\hat{p} = \omega\hat{w} \quad (30)$$

$$-Pr\hat{\theta}'\hat{v} + \left(D^2 + fPrD - k^2 \right) \hat{\theta} = Pr\omega\hat{\theta} \quad (31)$$

Le nombre d'inconnues dans le système d'équations (27-31) est réduit en éliminant du système la pression \hat{p} et la composante de vitesse \hat{w} , ce qui mène au problème aux valeurs propres généralisées suivant :

$$A_1 * \hat{q} = \omega A_2 * \hat{q} \quad (32)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} J_1 - 3f' & -f'' & 0 \\ J_1 - D & J_1 J_2 & -k^2 \lambda \\ 0 & -Pr\theta' & J_2 + PrfD \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & Pr \end{pmatrix}, \hat{q} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix},$$

Avec $D = d/d\eta$, $J_1 = D^2 + f' + fD - k^2$, $J_2 = D^2 - k^2$,

La discrétisation du système d'équations se fera par le moyen de la méthode pseudo-spectrale de collocation de type Laguerre qui est la mieux adaptée au problème de couche limite. Pour tenir compte de l'atténuation exponentielle des perturbations loin de la couche limite les amplitudes sont multipliées par $\exp(-y)$ donnant lieu à un système algébrique aux valeurs propres sous la forme suivante :

$$A * \hat{Q} = \omega B * \hat{Q} \quad (33)$$

Les perturbations s'annulent à la paroi et loin de la couche limite ce qui conduit aux conditions aux limites suivantes

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{p} = D\hat{v} = \hat{\theta} = 0 \quad y = 0$$

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{p} = D\hat{v} = \hat{\theta} = 0 \quad y \rightarrow \infty$$

En se basant sur les résultats des études antérieures, notamment dans le cas d'une plaque plane, Nait-Bouda [15], on admet que la fréquence ω est réelle. La stabilité marginale correspondra alors au cas $\omega = 0$.

4 Résultats et discussions

La fig.2 représente l'influence du nombre de Richardson et du nombre de Prandtl sur le profil de base de la température au point de stagnation. On remarque que l'augmentation du nombre de Richardson ou de Prandtl entrainerait une diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique

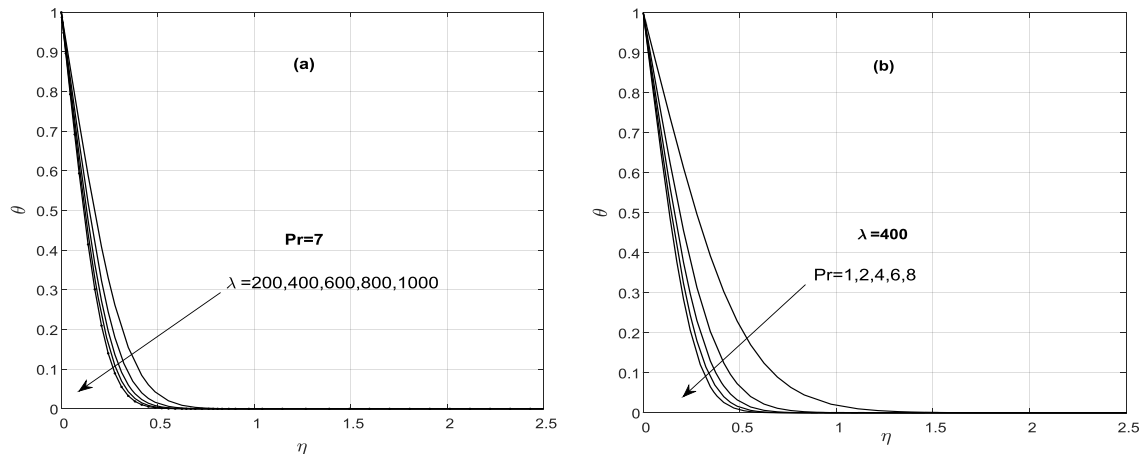


Fig.2 Influence du nombre de Richardson (a) et du nombre de Prandtl (b) sur le profil de la température

Afin d'analyser l'influence du nombre de Prandtl sur les conditions critiques d'apparition de l'instabilité (stabilité marginale), nous présentons sur la fig.3 les courbes neutres donnant le nombre de Richardson λ en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeurs de Pr . Il apparaît clairement que l'augmentation du nombre de Prandtl fait diminuer sensiblement le Richardson critique λ_c , d'une part, et conduit à l'élargissement de la zone de prévalence des modes instables, d'autre part. Ainsi, une augmentation du nombre de Prandtl a un effet déstabilisant sur l'écoulement de base.

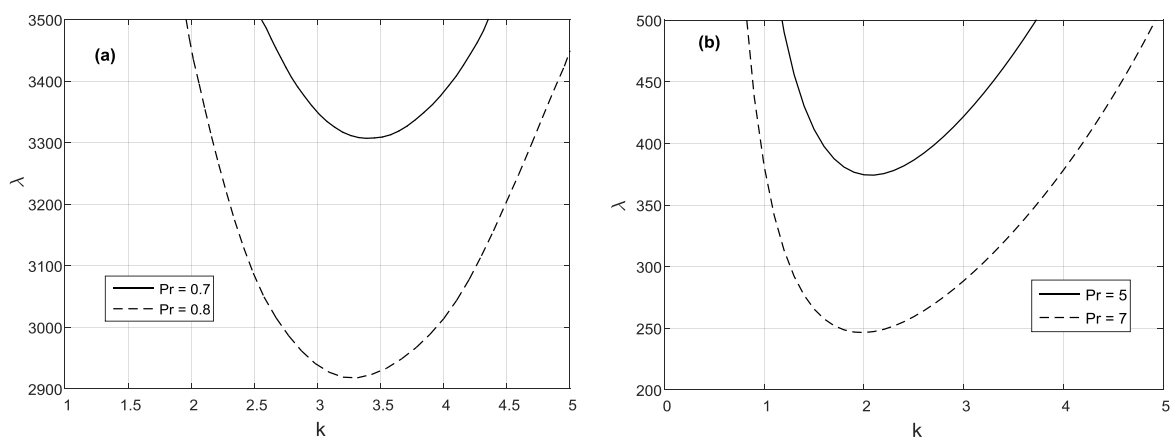


Fig.3 Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs de Pr : (a) $Pr=0.7$ et 0.8 , (b) $Pr=5$ et 7

La fig.4 montre l'évolution, au seuil de l'instabilité ($\omega=0$), des amplitudes de vitesse longitudinale \hat{u} (fig.4a) et de température $\hat{\theta}$ (fig.4b), pour les différentes valeurs de Pr variant entre 3 et 7. L'augmentation de Pr fait accroître l'amplitude $\hat{\theta}$ et décroître \hat{u} . Ceci peut s'expliquer par l'effet de l'augmentation de la diffusion visqueuse au détriment de la diffusion thermique lorsque Pr augmente faisant ainsi accroître l'instabilité thermique.

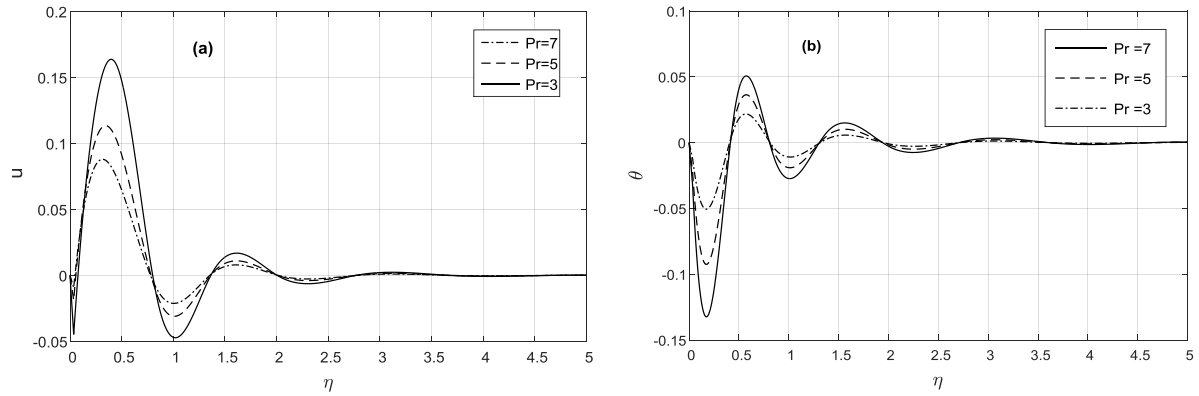


Fig.4 les amplitudes \hat{u} et $\hat{\theta}$ pour différentes valeurs de Prandtl

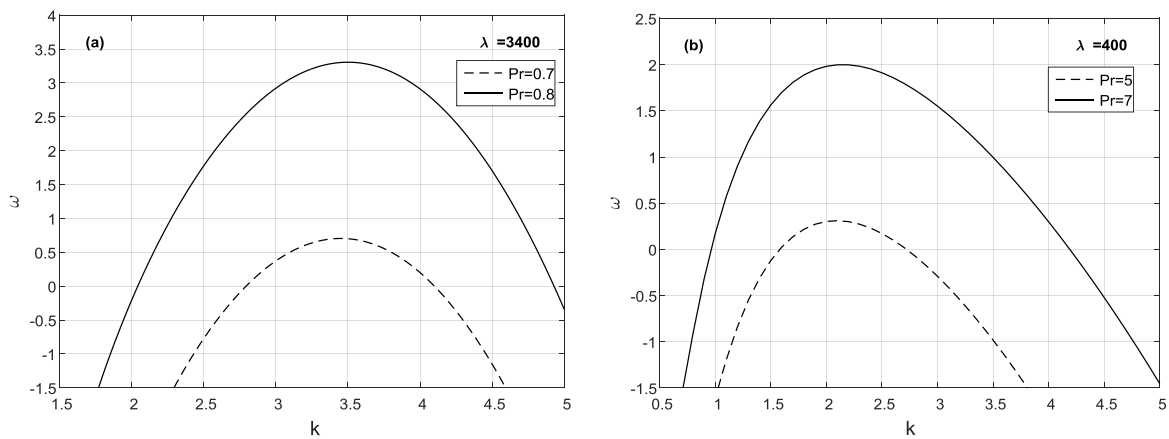


Fig.5 les courbes de dispersion pour différentes valeurs de Prandtl

La fig.5, représentant les courbes dites de dispersion, indique l'évolution du taux d'amplification temporel ω des perturbations en fonction du nombre d'onde k pour deux valeurs différentes de Pr pour deux valeurs de Richardson $\lambda=3400$ (fig.5a) et $\lambda=400$ (fig.5b), l'écoulement étant linéairement instable quand $\omega > 0$. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de la stabilité marginale. Les courbes de dispersion confirment l'observation que nous avons faite sur les courbes neutres signifiant que quand Pr augmente l'écoulement devient plus instable.

5 Conclusion :

Nous avons étudié la stabilité linéaire d'un écoulement bidimensionnel au point de stagnation sur un cylindre horizontal chauffé, en fonction du nombre de Richardson pour des différentes valeurs de Prandtl. On constate que l'écoulement est de plus en plus instable quand Pr augmente, c'est à dire quand l'épaisseur de la couche limite thermique se réduit. Pour des valeurs de Pr supérieur à l'unité, l'augmentation de Pr fait accroître l'amplitude de la perturbation de la température $\hat{\theta}$ et décroître celle de la vitesse \hat{u} qui est synonyme de l'accroissement de l'instabilité thermique en raison de la diminution de la diffusion thermique face la diffusion visqueuse.

Références

- [1] S.W. Churchill, H. H. S. Chu, Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a Horizontal cylinder, *Int. J. Heat and Mass Transfer*.18 1049-1053,1975.
- [2] T. H. Kuehn, numerical solution to the Navier-Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 23971-979,1980.
- [3] J. H. Merkin. Mixed Convection From A Horizontal Circular Cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*,2073-77,1977.
- [4] H. M. Badr, A Theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross stream, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 26 639-453,1983.
- [5] M. Amaouche, J.L. Peube, Convection mixte autour d'un cylindre horizontal. Influence des variations des propriétés physiques avec la température, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 29 1293-1300,1986.
- [6] R. Nazar, N. Amin, I. Pop, Mixed Convection Boundary-Layer Flow From A Horizontal Circular Cylinder In Micropolar Fluids: Case Of Constant Wall Temperature, *International Journal of Numerical Methods for Heat & FluidFlow*. 13(1): 86-109, 2003.
- [7] R. Nazar, N. Amin, I. Pop, Mixed convection boundary-layer flow from a horizontal circular cylinder with a constant surface heat flux. *Heat and Mass Transfer* 40 219–227,2004.
- [8] I. Anwar, N. Amin, I. Pop, Mixed Convection Boundary Layer Flow Of A Viscoelastic Fluid Over A Horizontal Circular Cylinder. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 43(9): 814-821,2008.
- [9] M. Salleh, R. Nazar, I. Pop, Mixed Convection Boundary Layer Flow Over A Horizontal Circular Cylinder With Newtonian Heating. *Int. J. Heat and Mass transfer*. 46(11-12):1411-1418,2010.
- [10] A.M. Rashad, A.J. Chamkha, M. Modather, Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal circular cylinder embedded in a porous medium filled with a nanofluid under convective boundary condition. *Computers & Fluids*,86 380–388,2013.
- [11] B.S. VaraprasadPatnaika, P.A. AswathaNarayanaa, K.N. Seetharamu, Numerical simulation of vortex shedding past a circular cylinder under the influence of buoyancy, *International Journal of Heat and Mass Transfer*.42 3495-3507,1999.
- [12] W.O. Criminale, T.L. Jackson, D.G. Lasseigne, Evolution of disturbances in stagnation point flow, *J. Fluid Mech*. 270 331-347, 1994.
- [13] M. Amaouche, D. Boukari, Influence of thermal convection on non-orthogonal stagnation point flow, *Int. J. Therm. Sci*. 42 303-310,2003.
- [14] M. Amaouche, F. NaitBouda, H. Sadat, The onset of thermal instability of a two dimensional hydromagnetic stagnation point flow, *Int. J. Heat Mass Transf*. 48 4435-4445,2005.
- [15] F. Nait-Bouda, F. Mendil, D. Sadaoui, K. Mansouri, M. Amaouche, Instability of opposing double diffusive convection in 2D boundary layer stagnation point flow, *International Journal of Thermal Sciences* 98 192-201,2015.
- [16] S. Mittal, Stability of flow past a cylinder: Energy budget of eigenmodes, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*; 63:533–547,2010.
- [17] P. Cheng, Combined free and forced convection flow about inclined surfaces in porous media, *Int. J. Heat and Mass Transfer*.20 807-814,1977.
- [18] V. Theofilis, A. Fedorov, D. Obrist, U.C. Dallmann, The extended Görtler–Hämmerlin model for linear instability of three dimensional incompressible swept attachment line boundary layer flow, *J. Fluid Mech*. 487271–313, 2003.