Factorisation harmonique et reconstruction du tenseur d'élasticité

M. Olive[a], B. Kolev[b], B. Desmorat[c], R. Desmorat[d]

a. LMT-Cachan (ENS Cachan, CNRS, Université Paris Saclay), F-94235 Cachan Cedex, France - marc.olive@math.cnrs.fr

b. Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France - boris.kolev@math.cnrs.fr

c. Sorbonne Université, UMPC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190, Institut d'Alembert,F-75252 Paris Cedex 05, France - boris.desmorat@upmc.fr

d. LMT-Cachan (ENS Cachan, CNRS, Université Paris Saclay), F-94235 Cachan Cedex, France - desmorat@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

Nous donnons des formules de reconstructions équivariantes *de la partie harmonique d'ordre* 4 *du tenseur d'élasticité, orthotrope ou isotrope transverse, à l'aide de tenseurs d'ordre* 2*. Cette reconstruction s'obtient par l'intermédiaire de tenseurs* covariants *et d'un produit associatif et commutatif défini sur les tenseurs harmoniques, appelé* produit harmonique*. Une telle reconstruction* équivariante *est encore possible dans le cas d'un tenseur harmonique d'ordre* 4 *trigonal ou tétragonal, mais elle fait intervenir un tenseur covariant cubique d'ordre* 4*.*

Abstract :

We propose equivariant reconstruction *formulae of fourth order harmonic part of elasticity tensor, orthotropic or transversly isotropic, using only second order tensors. We make use of* covariant tensors *and of an associative and commutative product defined over harmonic tensors, named the* harmonic product*. In the trigonal and tetragonal case, such an equivariant reconstruction still exists, making use of a fourth order cubic covariant remainder.*

Mots clefs : Anisotropie ; Factorisation harmonique ; produit harmonique ; Reconstruction tensorielle ; Tenseurs covariants.

Introduction

Que ce soit pour établir des fonctionnelles d'énergie en élasticité linéaire anisotrope [5], ou bien dans les modélisations de situations d'endommagement [3], il peut être important d'obtenir des expressions indépendantes des coordonnées du tenseur d'élasticité. Dès les années 1990, Boehler, Kirilov et Onat [2] ont mis en évidence l'intérêt des *polynômes invariants* d'un tenseur d'élasticité. Ces travaux faisaient suites à des travaux initiés par Rivlin, Spencer et al. [6] au sujet de *bases d'intégrités* (familles géneratrices de polynômes invariants), dans le cas d'espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à deux. Pour le tenseur d'élasticité (en 3D), une telle base est composée de 297 invariants [4]. Un tel résultat - qui n'est pas du tout immédiat - s'obtient essentiellement en deux étapes (dont les multiples détails se trouvent dans [4]). La première consiste à effectuer une décomposition harmonique du tenseur d'élasticité, et la deuxième consiste à exploiter des résultats issus de la *théorie classique des invariants.*

La décomposition harmonique d'un tenseur d'élasticité $\mathbf{E}$ permet d'identifier $\mathbf{E}$ avec un quintuplet

$$(\alpha, \beta, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{H})$$

où α, β sont des constantes, $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$ sont des covariants d'ordre 2 harmoniques (totalement symétriques et de trace nulle) et $\mathbf{H}$ est un tenseur harmonique d'ordre 4.

Nous proposons alors de *factoriser* la partie harmonique $\mathbf{H}$ du tenseur $\mathbf{E}$ dans certaines *classes de symétrie* de $\mathbf{H}$: le cas orthototrope, isotrope transverse, trigonal et tétragonal. Pour cela, nous définissons le *produit harmonique* $\mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_2$ de tenseurs harmoniques $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$. Par ce produit harmonique, nous pouvons réinterpréter un théorème de Sylvester permettant de décomposer un tenseur harmonique à l'aide des *multipoles de Maxwell* : pour tout tenseur harmonique $\mathbf{H}$ d'ordre 4, il existe 4 vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v}_4$ tels que

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}_1 * \mathbf{v}_2 * \mathbf{v}_3 * \mathbf{v}_4.$$

Cette factorisation n'est pas unique et peu constructive. Pour contourner cette difficulté, nous exploitons des *covariants* d'ordre 2 et les différentes classes de symétrie du tenseur $\mathbf{H}$, ce qui nous permet de reconstruire de façon équivariante un tel tenseur dans les classes déjà citées.

Décomposition harmonique

Un tenseur $\mathbf{E}$ du type de l'élasticité, ayant les symétries mineures et majeures, admet la décomposition harmonique suivante [1] :

$$\mathbf{E} = \alpha\, \mathbf{1} \otimes_{(4)} \mathbf{1} + \beta\, \mathbf{1} \otimes_{(2,2)} \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes_{(4)} \mathbf{a}' + \mathbf{1} \otimes_{(2,2)} \mathbf{b}' + \mathbf{H}. \tag{1}$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre 2 et où $(\mathbf{c})'$ dénote la partie déviatorique d'un tenseur $\mathbf{c}$ symétrique d'ordre 2 ($\mathbf{c}' := \mathbf{c} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{c})\mathbf{1}$).

Les produits tensoriels symétrisé de Young $\otimes_{(4)}$ et $\otimes_{(2,2)}$ entre deux tenseurs symétriques du second ordre $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont définis par

$$(\mathbf{a} \otimes_{(4)} \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{6}\big(a_{ij}b_{kl} + b_{ij}a_{kl} + a_{ik}b_{jl} + b_{ik}a_{jl} + a_{il}b_{jk} + b_{il}a_{jk}\big),$$
$$(\mathbf{a} \otimes_{(2,2)} \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{6}\big(2a_{ij}b_{kl} + 2b_{ij}a_{kl} - a_{ik}b_{jl} - a_{il}b_{jk} - b_{ik}a_{jl} - b_{il}a_{jk}\big).$$

Le produit tensoriel $\otimes_{(4)}$ est le produit tensoriel symétrique, noté aussi $\odot$.

Dans la décomposition harmonique (1), α, β sont des scalaires et $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ sont des tenseurs harmoniques d'ordre 2 (i.e symétriques déviatoriques) définis par

$$\alpha = \frac{1}{15}\left(\mathrm{tr}\mathbf{d} + 2\mathrm{tr}\mathbf{v}\right) \qquad \mathbf{a}' = \frac{2}{7}\left(\mathbf{d}' + 2\mathbf{v}'\right)$$
$$\beta = \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}\mathbf{d} - \mathrm{tr}\mathbf{v}\right) \qquad \mathbf{b}' = 2\left(\mathbf{d}' - \mathbf{v}'\right)$$

avec $\mathbf{d} := \mathrm{tr}_{12}\mathbf{E}$ (tenseur de dilatance) et $\mathbf{v} := \mathrm{tr}_{13}\mathbf{E}$ (tenseur de Voigt), et où tr est l'opération de trace.

La partie harmonique $(\mathbf{E})_0 := \mathbf{H}$ est la *projection orthogonale* de $\mathbf{E}$ sur l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre 4. Plus précisément

$$(\mathbf{E})_0 = \mathbf{E} - \alpha\, \mathbf{1} \otimes_{(4)} \mathbf{1} - \beta\, \mathbf{1} \otimes_{(2,2)} \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes_{(4)} \mathbf{a}' - \mathbf{1} \otimes_{(2,2)} \mathbf{b}'. \qquad (2)$$

Produit harmonique

Soient deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de $\mathbb{R}^3$. On en déduit le tenseur $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ d'ordre 2 et le *produit symétrique*

$$\mathbf{v}_1 \odot \mathbf{v}_2 := \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1)$$

qui est donc un tenseur d'ordre 2 symétrique $\mathbf{c}$ dont on peut considérer sa *partie harmonique* (i.e sa partie déviatorique)

$$\mathbf{c}' := \mathbf{c} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{c})\mathbf{1}$$

On peut ainsi définir le *produit harmonique* $\mathbf{v}_1 * \mathbf{v}_2$ par

$$\mathbf{v}_1 * \mathbf{v}_2 := (\mathbf{v}_1 \odot \mathbf{v}_2)'.$$

Dans le cas de deux tenseurs harmoniques $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ d'ordre 2, on peut suivre un processus similaire : on commence par construire le tenseur totalement symétrique $\mathbf{h}_1 \odot \mathbf{h}_2$, puis on ne conserve que sa partie harmonique, ce qui donne ainsi

$$\mathbf{h}_1 * \mathbf{h}_2 := \mathbf{h}_1 \odot \mathbf{h}_2 - \frac{2}{7}\,\mathbf{1} \odot (\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1\mathbf{h}_2) + \frac{2}{35}\mathrm{tr}(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2)\,\mathbf{1} \odot \mathbf{1}.$$

Notons qu'il est possible de définir le produit harmonique de deux tenseurs harmoniques $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ d'ordre quelconque.

Factorisation harmonique

Théoreme 4.1 (Sylvester) *Pour tout tenseur harmonique $\mathbf{H}$ d'ordre n, il existe n vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ de l'espace tels que*

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}_1 * \ldots * \mathbf{v}_n.$$

Ces vecteurs ne sont pas uniques : toute famille $\lambda_i\mathbf{v}_i$ avec le produit des λ_i qui vaut 1 est encore solution.

Pour obtenir une telle famille de vecteur, on considère le *polynôme homogène*

$$\mathrm{h}(x_1, x_2, x_3) := \mathbf{H}_{i_1 i_2 i_3 i_4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

puis la *forme binaire* (polynôme homogène à deux variables complexes)

$$\mathbf{f}(u,v) := \mathrm{h}\left(\frac{u^2-v^2}{2}, \frac{u^2+v^2}{2i}, uv\right), \quad (u,v) \in \mathbb{C}^2$$

et à toute racine $\alpha \in \mathbb{C}$ on associe un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (de norme 1) défini par

$$v_1 = \frac{2}{|\alpha|^2+1}\Re(\alpha), \quad v_2 = \frac{2}{|\alpha|^2+1}\Im(\alpha), \quad v_3 = \frac{|\alpha|^2-1}{|\alpha|^2+1}$$

Si l'on pose $\mathbf{h}_1 = \mathbf{v}_1 * \mathbf{v}_2$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{v}_3 * \mathbf{v}_3$ on a alors la factorisation harmonique

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_1 * \mathbf{h}_2$$

du tenseur harmonique d'ordre 4 à l'aide de tenseurs harmoniques d'ordre deux $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ (symétriques déviatoriques). A nouveau la factorisation n'est pas unique.

Formules de reconstruction par des covariants

Pour tout tenseur harmonique $\mathbf{H}$ d'ordre 4, on définit des *covariants* d'ordre 2 :

$$\mathbf{d}_2(\mathbf{H}) := \mathrm{tr}_{13}\mathbf{H}^2, \quad \mathbf{d}_3(\mathbf{H}) := \mathrm{tr}_{13}\mathbf{H}^3, \quad \mathbf{d}_4(\mathbf{H}) := \mathbf{d}_2^2(\mathbf{H}), \quad \mathbf{d}_5(\mathbf{H}) := \mathbf{d}_2(\mathbf{H})(\mathbf{H}\mathbf{d}_2(\mathbf{H})).$$

où pour $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ d'ordre 4 et $\mathbf{b}$ d'ordre 2 :

$$(\mathbf{AB})_{ijkl} := \mathbf{A}_{ijpq}\mathbf{B}_{pqkl}, \quad (\mathbf{Ab})_{ij} := \mathbf{A}_{ijpq}\mathbf{b}_{pq}.$$

Rappelons ici que pour toute nouvelle orientation du matériau correspondant à une rotation g du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, on obtient un nouveau tenseur $\overline{\mathbf{H}}$ défini par :

$$\overline{H}_{ijkl} := g_{ip}g_{jq}g_{kr}g_{ls}H_{pqrs}$$

où on a adopté la convention d'Einstein sur les indices répétés. Cela définit en fait une *action* du groupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, noté $g \star \mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}}$. On définit de même une action de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sur tout espace de tenseurs.

Les tenseurs $\mathbf{d}_k$ sont des covariants car ils définissent des applications *équivariantes* de l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre 4 vers l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\mathbf{d}_k(g \star \mathbf{H}) = g \star \mathbf{d}_2$$

On définit enfin les *invariants* : $J_k := \mathrm{tr}(\mathbf{d}_k(\mathbf{H}))$.

Remarque : De même, les tenseurs de dilatation $\mathbf{d}(\mathbf{E}) = \mathrm{tr}_{12}\mathbf{E}$ *et de Voigt* $\mathbf{v}(\mathbf{E}) = \mathrm{tr}_{13}\mathbf{E}$ *sont des covariants du tenseur d'élasticité.*

Cas isotrope transverse

Théoreme 5.1 *Pour tout tenseur harmonique* $\mathbf{H}$ *d'ordre* 4 *isotrope transverse, on a*

$$\mathbf{H} = \frac{63}{25}\frac{1}{J_3(\mathbf{H})}\,\mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) * \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}).$$

Cas orthotrope

Pour tout tenseur harmonique $\mathbf{H}$ d'ordre 4 orthotrope, on note

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \begin{pmatrix} \lambda_2+\lambda_3 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & \lambda_3+\lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_2+\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\,\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\,\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\,\lambda_3 \end{pmatrix}$$

sa représentation de Kelvin, qui est sa représentation matricielle dans la base des tenseurs d'ordre 2

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$$

où $\mathbf{e}_i$ est une base orthonormée qui correspond aux axes d'orthotropie du tenseur. On note

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{H}) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et on définit les invariants rationnels suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{9(3J_7 - 3J_2J_5 + 3J_3J_4 - J_2^2J_3)}{2(6J_6 - 9J_2J_4 - 20J_3^2 + 3J_2^3)}, \\ \sigma_2 &= \frac{4}{7}\sigma_1^2 - \frac{1}{14}J_2, \\ \sigma_3 &= -\frac{1}{24}J_3 + \frac{1}{7}\sigma_1^3 - \frac{1}{56}\sigma_1 J_2. \end{aligned}$$

qui, évalués sur la forme normale, sont

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \sigma_2 &:= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ \sigma_3 &:= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta_3 &:= (\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_3-\lambda_1)^2, \\ \sigma_{eq} &:= \sqrt{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}, \\ \mathcal{L} &:= \frac{1}{\sigma_{eq}^3}\left(\sigma_1^3 - \frac{9}{2}\sigma_1\sigma_2 + \frac{27}{2}\sigma_3\right), \end{aligned}$$

la dernière quantité $\mathcal{L}$ étant l'*invariant de Lode*.

Lemme 5.1 *Soit* $\mathbf{H}$ *un tenseur harmonique d'ordre* 4 *orthotrope. Alors la partie déviatorique*

$\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H})$ *du tenseur covariant* $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{H})$ *d'ordre* 2 *s'écrit*

$$\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\Delta_3}\left(\alpha_2 \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) + \alpha_3 \mathbf{d}_3'(\mathbf{H}) - 54\sigma_3\, \mathbf{d}_4'(\mathbf{H}) + 11\sigma_2\, \mathbf{d}_5'(\mathbf{H})\right) \tag{3}$$

où

$$\alpha_2 := 2(112\sigma_1^2\sigma_3 + 21\sigma_1\sigma_2^2 - 270\sigma_2\sigma_3), \qquad \alpha_3 := 8(14\sigma_1\sigma_3 - 11\sigma_1^2\sigma_2 + 15\sigma_2^2).$$

Théoreme 5.2 *Pour tout tenseur harmonique orthotrope* $\mathbf{H}$ *d'ordre* 4 *on a*

$$\mathbf{H} = h_1\, \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H}) * \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H}) + 2h_2\, \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H}) * (\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H})^2)' + h_3\, (\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H})^2)' * (\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H})^2)',$$

où $\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{H})$ *est défini par* (3) *et les trois invariants* h_k *sont donnés par*

$$h_1 := \frac{5\sigma_1 + 7\mathcal{L}\sigma_{eq}}{2(1-\mathcal{L}^2)\sigma_{eq}^2}, \quad h_2 := -\frac{3(5\mathcal{L}\sigma_1 + 7\sigma_{eq})}{2(1-\mathcal{L}^2)\sigma_{eq}^3}, \quad h_3 := \frac{9(5\sigma_1 + 7\mathcal{L}\sigma_{eq})}{2(1-\mathcal{L}^2)\sigma_{eq}^4}.$$

Cas tétragonal

Théoreme 5.3 *Pour tout tenseur tétragonal harmonique* $\mathbf{H}$ *d'ordre* 4 *on a*

$$\mathbf{H} = \frac{28K_4^3(5J_5 + \sqrt{K_{10}})}{L_{10}^2}\, \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) * \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) + \boldsymbol{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\mathbf{H}) = \left(1 + \frac{14J_5(5J_5 + \sqrt{K_{10}})}{L_{10}}\right)\mathbf{H} - \frac{14K_4(5J_5 + \sqrt{K_{10}})}{L_{10}}\,(\mathbf{H}^2)_0$$

est un covariant cubique, $(\mathbf{H}^2)_0$ *étant la partie harmonique de* $\mathbf{H}^2$ *(voir Eq.* (2)*) et*

$$K_4 = 3J_4 - J_2^2 > 0, \qquad K_{10} = 2J_2K_4^2 - 35J_5^2 > 0, \qquad L_{10} = K_{10} - 25J_5^2 \neq 0.$$

Cas trigonal

Théoreme 5.4 *Pour tout tenseur trigonal harmonique* $\mathbf{H}$ *d'ordre* 4 *on a*

$$\mathbf{H} = \frac{224K_4^3(10J_5 + \sqrt{K_{10}})}{M_{10}^2}\, \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) * \mathbf{d}_2'(\mathbf{H}) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(\mathbf{H})$$

où

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(\mathbf{H}) = \left(1 + \frac{7J_5(10J_5 + \sqrt{K_{10}})}{M_{10}}\right)\mathbf{H} + \frac{14K_4(10J_5 + \sqrt{K_{10}})}{3M_{10}}\,(\mathbf{H}^2)_0$$

est un covariant cubique, $(\mathbf{H}^2)_0$ *étant la partie harmonique de* $\mathbf{H}^2$ *(voir Eq.* (2)*) et*

$$K_4 = 3J_4 - J_2^2 > 0, \qquad K_{10} = 2J_2K_4^2 - 35J_5^2 > 0, \qquad M_{10} = K_{10} - 100J_5^2 \neq 0.$$

Références

[1] Backus, G. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors. Rev. Geophys., 8 (1970) 633–671

[2] Boehler, J.-P. and Kirillov, Jr., A. A. and Onat, E. T. On the polynomial invariants of the elasticity tensor. J. Elasticity, 2 (1994) 97–110

[3] F. A. Leckie and E. T. Onat, Physical Non-Linearities in Structural Analysis, J. Hult and J. Lemaitre eds, Springer Berlin, 1980, 140–155.

[4] Olive, M., Kolev, B. and Auffray, N., A minimal integrity basis for the elasticity tensor, Available at https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01323543, Preprint in Arch. Rational Mech. Anal., 2016.

[5] Spencer, A., Constitutive theory for strongly anisotropic solids, A. J. M. Spencer Ed., CISM Courses and Lectures No. 282, Springer Wien., 1 (1984) 1–32.

[6] Spencer, A. J. M. and Rivlin, R. S., Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. I, Arch. Rational Mech. Anal., 9 (1962), pp. 45–63.