

La famille des méthodes AK pour l'analyse de fiabilité : synthèse des récentes avancées

N. Lelièvre^a, P. Beaurepaire^a, C. Mattrand^a, N. Gayton^a

a. Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA Clermont, Institut Pascal, F-63000 Clermont-Ferrand, France

Résumé :

En analyse de fiabilité, les efforts numériques sont souvent un frein pour parvenir à une estimation précise de la probabilité de défaillance. En effet, les méthodes de simulation requièrent un trop grand nombre d'appels à la réponse du système étudié souvent coûteuse et les méthodes d'approximation locale de l'état limite peuvent provoquer de larges erreurs. L'utilisation des métamodèles permet de pallier à ces difficultés. Ce papier se concentre sur le métamodèle de Krigeage et plus particulièrement sur la méthode adaptative basée sur le Krigeage, AK-MCS et ses développements. Ce papier propose un état de l'art des différentes avancées des méthodes AK proposées dans la littérature.

Mots clefs : Méthodes AK, Krigeage, Probabilité de défaillance, Classification

1 Introduction

L'analyse de fiabilité prend une place de plus en plus importante que ce soit dans le monde académique ou dans le monde industriel. L'un des objectifs de cette analyse est d'estimer la probabilité de défaillance du système étudié. L'une des difficultés majeures de cette analyse est le temps de calcul. Les méthodes d'analyses de fiabilité usuelles (simulations de Monte Carlo, tirages d'importance, *subset simulations*,...) requièrent, en effet, des temps de calcul considérables d'autant plus que la réponse du système est coûteuse. Des méthodes d'approximation ont donc été proposées (*First and Second Order Reliability Methods*). Cependant, approximant localement l'état limite par des fonctions linéaires ou quadratiques, ces méthodes peuvent provoquer de larges erreurs sur l'estimation de la probabilité de défaillance.

L'utilisation croissante des métamodèles en analyse de fiabilité permet de pallier à ces difficultés. Un métamodèle est un modèle mathématique simplifié de la réponse souvent coûteuse du système étudié. Deux étapes sont nécessaires : la calibration du métamodèle et l'utilisation d'une méthode de fiabilité usuelle sur ce métamodèle. La calibration est réalisée à partir d'un plan d'expériences (ensemble de points dans l'espace physique) et de la réponse du système évaluée sur celui-ci. Plusieurs métamodèles ont été proposés dans la littérature comme, entre autre, les surfaces de réponse polynomiales [11], les réseaux de neurones [25], le Krigeage [23], les *support vector machine* [29]

ou le chaos polynomial [13, 31]. L'estimation de la probabilité de défaillance est faite sur le métamodèle calibré au préalable [5]. Un biais d'estimation associé au métamodèle peut donc être introduit. Des méthodes plus avancées ont été proposées pour tenter de réduire ce biais [1, 4, 14, 19]. Ce papier se concentre sur le Krigeage et plus particulièrement sur une méthode adaptative basée sur le Krigeage intitulée AK-MCS [9] pour *Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulations*. Cette méthode sera décrite en Section 2. Les différentes avancées réalisées à partir de cette méthode seront ensuite présentées en Section 3. Des conclusions seront enfin tirées en Section 4.

2 La méthode AK-MCS

Le krigeage [18, 23] est un métamodèle utilisé dans un grand nombre de disciplines [21, 26, 27, 30]. Il cherche à approximer la réponse du système étudié par la réalisation d'un processus aléatoire gaussien. Ainsi, la variance peut être évaluée en chaque point de la population à classer et offre donc une mesure de l'erreur possible de calibration du métamodèle. Des méthodes adaptatives ont été proposées dans la littérature comme par exemple *Efficient Global Reliability Method* [3] ou les méthodes AK [9] sur lesquelles ce papier se concentre.

La méthode AK est une méthode de classification basée sur le krigeage. En analyse de fiabilité, elle a donc pour objectif de classer une population dans le domaine de sûreté ou dans le domaine de défaillance. Les différents choix de population à classer ont formés la famille des méthodes AK. La méthode AK-MCS, pionnière de cette famille, a été proposée par Echard et al. [9]. Elle débute par le choix d'un premier plan d'expériences (DoE) de taille réduite et cherche ensuite à ajouter itérativement des points à ce DoE dans le but d'améliorer le métamodèle par l'intermédiaire d'une fonction d'apprentissage notée U (Eq. (3)). Cette dernière constitue une des originalités de la méthode AK-MCS. La procédure de cette méthode est décrite par les étapes suivantes :

Soit H une fonction de performance définie dans l'espace standard.

1. **Génération d'une population de Monte Carlo P à classer de taille N .**
2. **Sélection du premier plan d'expériences de taille N_E .**
3. **Boucle d'enrichissement du métamodèle de krigeage**
 - (a) **Construction du métamodèle de krigeage noté \hat{H} .** Le métamodèle est construit à partir du plan d'expériences.
 - (b) **Calcul de la probabilité de défaillance** par l'Eq. (1) :

$$p_f = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\hat{H}}(\mathbf{u}^{(j)})}{N} \quad (1)$$

où $\mathbb{1}_{\hat{H}}(\mathbf{u}^{(j)})$ est la fonction indicatrice définie par :

$$\mathbb{1}_{\hat{H}}(\mathbf{u}^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } H(\mathbf{u}^{(j)}) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

(c) **Évaluation de la fonction d'apprentissage** U par l'Eq. (3) :

$$U(\mathbf{u}) = \frac{|\mu_{\hat{H}}(\mathbf{u})|}{\sigma_{\hat{H}}(\mathbf{u})} \quad (3)$$

où $\mu_{\hat{H}}(\mathbf{u})$ et $\sigma_{\hat{H}}(\mathbf{u})$ sont respectivement la moyenne et l'écart type de Krigeage au point \mathbf{u} .

(d) **Évaluation du critère d'arrêt d'apprentissage** par l'Eq. (4) :

$$\min(U) \leq 2 \quad (4)$$

Si ce critère d'arrêt est respecté, l'enrichissement est terminé et la méthode passe à l'étape 4, sinon elle continue à l'étape 3e.

(e) **Enrichissement du plan d'expériences.** Le point possédant la valeur minimale de la fonction d'apprentissage est ajouté au plan d'expériences. La méthode reprend ensuite au début de l'étape 3.

4. **Fin.** L'estimation de la probabilité de défaillance du problème étudiée est donnée par la probabilité de défaillance évaluée lors de la dernière boucle d'apprentissage.

3 Le développement des méthodes AK

La méthode AK-MCS a été développée selon plusieurs directions durant les dernières années. La Figure 1 présente les développements de cette méthode. L'utilisation de la fonction d'apprentissage U proposée par Echard et al. [9] est le point commun de toutes ces méthodes. Les améliorations en analyse de fiabilité sont les plus nombreuses cependant la méthode a aussi été utilisée et développée pour d'autres domaines comme l'optimisation sous incertitudes et la métrologie.

3.1 Analyse de fiabilité

La méthode AK-MCS a été tout d'abord développée en remplaçant les simulations de Monte Carlo par des méthodes de simulation avancées. En effet, la méthode AK-IS [10] utilise les tirages d'importance pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. Cette méthode demande donc de trouver le point de défaillance le plus probable (MPP) et utilise une analyse FORM (*First Order Reliability Method*) pour cette recherche. Néanmoins, cet algorithme ne permet de trouver qu'un unique MPP. C'est pourquoi, bien qu'elle soit très efficace sous les bonnes conditions pour estimer des probabilités de défaillance faibles, cette méthode peut engendrer de grandes erreurs d'estimations si plusieurs MPP existent.

La méthode AK-LS [22] propose d'utiliser les tirages directionnels pour remplacer les simulations de Monte Carlo. Cette méthode est très efficace pour résoudre des problèmes possédant un domaine de défaillance complexe. En effet, les tirages directionnels vont explorer l'espace dans toutes les directions et rechercher l'intersection de ces directions avec l'état limite.

Enfin, la méthode AK-SS [17] utilise les *subset simulations* pour évaluer la probabilité de défaillance. L'efficacité des *subset simulations* pour atteindre des faibles probabilités de défaillance n'est plus à démontrer, ainsi la méthode AK-SS est aussi efficace pour atteindre cet objectif.

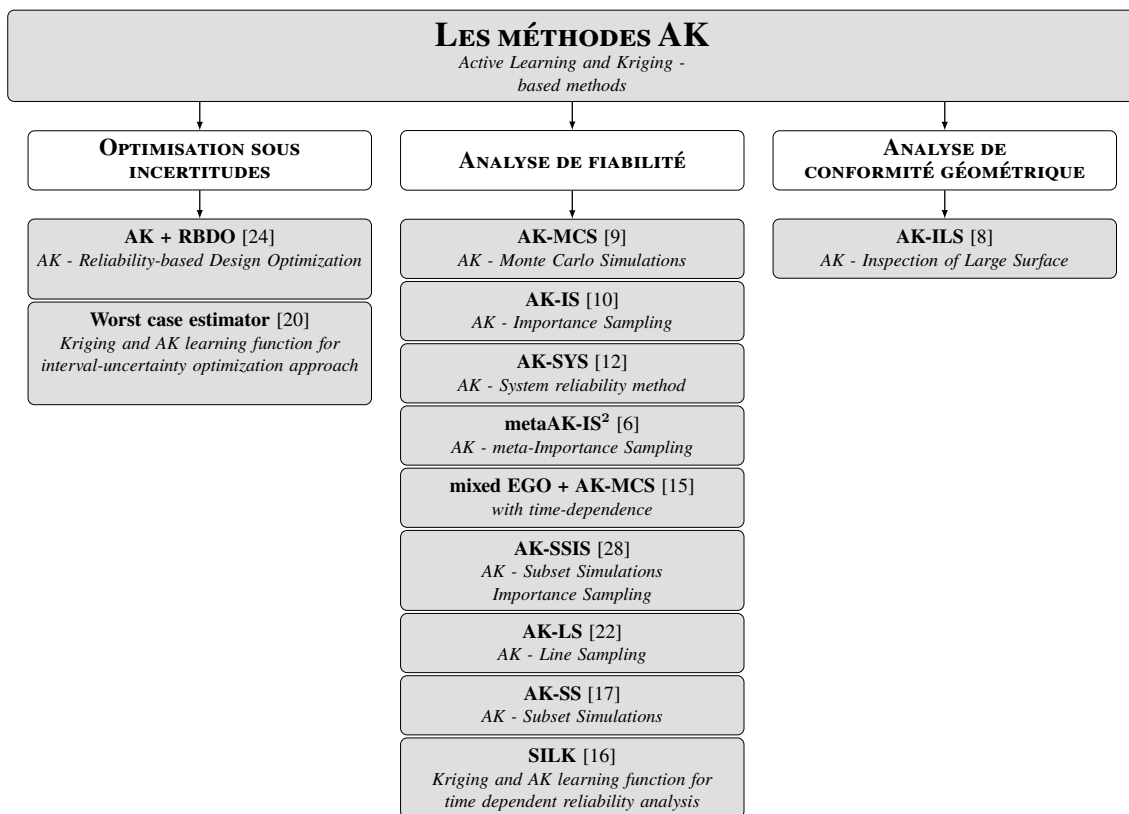


FIGURE 1 – État de l’art des méthodes AK

La méthode AK-MCS a aussi été développée avec l’utilisation de méthodes d’analyse de fiabilité moins usuelles. Cadini et al. [6] proposent, par exemple, d’améliorer la méthode AK-IS en remplaçant l’algorithme FORM par l’algorithme metaIS [7] dans la méthode metaAK-IS². L’algorithme metaIS semble plus performant que FORM pour la recherche des MPP ce qui rend la méthode AK-IS d’autant plus efficace.

La méthode AK-SSIS [28] met en jeu à la fois les *subset simulations* et les tirages d’importances. En effet, la méthode des chaînes de Markov Monte Carlo, traditionnellement utilisée dans les *subset simulations* [2], est remplacée par un tirage d’importance. La méthode AK-SSIS montre une bonne efficacité à atteindre les faibles probabilités de défaillance.

La méthode AK-MCS a aussi été améliorée dans le but de prendre en compte les dépendances temporelles de certains problèmes. Ainsi, Hu and Du [15] proposent une méthode combinant la méthode mixed EGO et AK-MCS et Hu and Mahadevan [16] présentent la méthode SILK.

Enfin, Fauriat and Gayton [12] se sont intéressés aux analyses de fiabilité système. Ils proposent trois méthodes permettant de résoudre ce problème. La plus efficace, intitulée AK-SYS, cherche à identifier les fonctions de performance les plus influentes sur la probabilité de défaillance et ne viennent pas évaluer les fonctions avec des impacts moindres. Cette technique permet donc de réduire les efforts numériques considérables dus aux multiples fonctions de performance.

En analyse de fiabilité, différents problèmes peuvent être rencontrés. Le Tableau 1 présente donc les méthodes AK les plus adaptées pour résoudre ces problèmes.

TABLE 1 – Association des méthodes et des types de problèmes

| Types de problèmes | Faible probabilité de défaillance | Etat limite complexe | Fiabilité système | Dépendance en temps |
|------------------------|-----------------------------------|----------------------|-------------------|---------------------|
| AK-MCS | | ✓ | | |
| AK-IS | ✓ | | | |
| AK-SYS | | | ✓ | |
| metaAK-IS ² | ✓ | ✓ | | |
| mixed EGO + | | | | ✓ |
| AK-MCS | | | | |
| AK-SSIS | ✓ | | | |
| AK-LS | | ✓ | | |
| AK-SS | ✓ | | | |
| SILK | | | | ✓ |

3.2 Autres analyses

La méthode AK-MCS a aussi été adaptée pour résoudre d'autres types de problème. En effet, Moustapha et al. [24] présentent un algorithme permettant de résoudre des problème de RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*) utilisant la méthode AK-MCS. La calibration du méta-modèle se fait en deux étapes : la première est l'apprentissage présenté dans AK-MCS, c'est-à-dire sur la globalité de l'espace puis un apprentissage plus local dans les zones d'intérêt où l'optimisation est effectuée. Cette algorithme permet donc d'obtenir un métamodèle très précis dans les zones intéressantes pour l'optimisation. Liu et al. [20] proposent une méthode utilisant un méta-modèle de Krigeage couplé à la fonction d'apprentissage de AK pour évaluer le pire des cas dans des problèmes d'optimisation de structures sous contrainte de fiabilité comportant des intervalles de confiance.

La méthode AK a aussi été développée pour résoudre des problèmes de métrologie. En effet, Dumas et al. [8] proposent la méthode AK-ILS permettant de contrôler la conformité de larges surfaces. Ce type de problèmes est aussi un problème de classification puisque les surfaces doivent être classées ; deux catégories sont possibles : les surfaces conformes et les surfaces non-conformes.

4 Conclusions

Ce papier présente un rapide état de l'art des méthodes AK. Il montre que les méthodes AK ont été amplement développées dans le domaine de l'analyse de fiabilité. En effet, neuf méthodes ont été proposées pour résoudre des problèmes divers. Cependant, elles ont aussi été développées dans d'autres domaines comme l'optimisation sous incertitude et la métrologie.

Références

- [1] S.-K. Au. Augmenting approximate solutions for consistent reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 22(1) :77 – 87, 2007.
- [2] S.-K. Au and Beck J.L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263 – 277, 2001.

- [3] B.J. Bichon, M.S. Eldred, L.P. Swiler, S. Mahadevan, and J.M. McFarland. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. *AIAA Journal*, 46(10) :2459–2468, 2008.
- [4] J.-M. Bourinet, F. Deheeger, and M. Lemaire. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines. *Structural Safety*, 33(6) :343 – 353, 2011.
- [5] C.G. Bucher and U. Bourgund. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Journal of Structural Safety*, 7(1) :57–66, 1990.
- [6] F. Cadini, F. Santos, and E. Zio. An improved adaptive kriging-based importance technique for sampling multiple failure regions of low probability. *Reliability Engineering & System Safety*, 131 :109 – 117, 2014.
- [7] V. Dubourg, B. Sudret, and F. Deheeger. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 33 :47 – 57, 2013.
- [8] A. Dumas, B. Echard, N. Gayton, O. Rochat, J.-Y. Dantan, and S. Van Der Veen. AK-ILS : An active learning method based on kriging for the inspection of large surfaces. *Precision Engineering*, 37(1) :1 – 9, 2013.
- [9] B. Echard, N. Gayton, and M. Lemaire. AK-MCS : An active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*, 33(2) :145 – 154, 2011.
- [10] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, and N. Relun. A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models. *Reliability Engineering & System Safety*, 111 :232 – 240, 2013.
- [11] L. Faravelli. Response-surface approach for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(12) :2763–2781, 1989.
- [12] W. Fauriat and N. Gayton. AK-SYS : An adaptation of the ak-mcs method for system reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, 123 :137 – 144, 2014.
- [13] R.G. Ghanem and P.D. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [14] F. Grooteman. Adaptive radial-based importance sampling method for structural reliability. *Structural Safety*, 30(6) :533 – 542, 2008.
- [15] Z. Hu and X. Du. Mixed efficient global optimization for time-dependent reliability analysis. *Journal of Mechanical Design*, 137, 2015.
- [16] Z. Hu and S. Mahadevan. A single-loop kriging surrogate modeling for time-dependent reliability analysis. *Journal of Mechanical Design*, 138(6) :061406–061406–10, 2016.
- [17] X. Huang, J. Chen, and H. Zhu. Assessing small failure probabilities by AK-SS : An active learning method combining kriging and subset simulation. *Structural Safety*, 59 :86 – 95, 2016.

- [18] D. Krige. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *J. of the Chem. Metal. and Mining Soc. of South Africa*, 52(6) :119–139, 1951.
- [19] J. Li, J. Li, and D. Xiu. An efficient surrogate-based method for computing rare failure probability. *J. Comput. Phys.*, 230(24) :8683 – 8697, 2011.
- [20] Y. Liu, H.K. Jeong, and M. Collette. Efficient optimization of reliability-constrained structural design problems including interval uncertainty. *Computers & Structures*, 177 :1 – 11, 2016.
- [21] A. Lucifredi, C. Mazzieri, and M. Rossi. Application of multiregressive linear models, dynamic kriging models and neural network models to predictive maintenance of hydroelectric power systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(3) :471 – 494, 2000.
- [22] A. Lv, Z. Lu, and P. Wang. A new learning function for kriging and its applications to solve reliability problems in engineering. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5) : 1182 – 1197, 2015.
- [23] G. Matheron. The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied Probability*, 5(3) :439–468, 1973.
- [24] M. Moustapha, B. Sudret, J.-M. Bourinet, and B. Guillaume. Quantile-based optimization under uncertainties using adaptive kriging surrogate models. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54(6) :1403–1421, 2016.
- [25] M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, and N.D. Lagaros. Structural reliability analysis of elastic-plastic structures using neural networks and monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(1) :145 – 163, 1996.
- [26] V. Picheny, T. Wagner, and D. Ginsbourger. A benchmark of kriging-based infill criteria for noisy optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3) :607–626, 2013.
- [27] J.W. Quinn, S.J. Mooney, D.M. Sheehan, J.O. Teitler, K.M. Neckerman, T.K. Kaufman, G.S. Lovasi, M.D.M. Bader, and A.G. Rundle. Neighborhood physical disorder in new york city. *Journal of Maps*, 12(1) :53–60, 2016.
- [28] C. Tong, Z. Sun, Q. Zhao, Q. Wang, and S. Wang. A hybrid algorithm for reliability analysis combining kriging and subset simulation importance sampling. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29 :3183–3193, 2015.
- [29] V. Vapnik. *Estimation of Dependences Based on Empirical Data : Springer Series in Statistics (Springer Series in Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1982.
- [30] A.M. Vicedo-Cabrera, A. Biggeri, L. Grisotto, F. Barbone, and D. Catelan. A bayesian kriging model for estimating residential exposure to air pollution of children in a high-risk area in italy. *Geospatial Health*, 8(1) :87–95, 2013.
- [31] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4), 1938.