

Mise en relation analytique de la cinématique de l'écoulement et des performances d'un rotor caréné à Mach de vol intermédiaire

M. LAGHA, S. DUPLAA, N. BINDER, X. CARBONNEAU

Université de Toulouse, ISAE-SUPAERO
10 avenue Edouard Belin BP 54032
31055 Toulouse Cedex 4, France
massyl.lagha@isae.fr

Résumé :

Atteindre les objectifs européens de réduction des émissions polluantes nécessite de s'orienter à l'horizon 2050 vers une hybridation/électrification des aéronefs et une optimisation des missions. Cela mène vers la distribution de la propulsion via la multiplication de rotors carénés de faible diamètre présentant des performances élevées sur de larges plages de fonctionnement. Un modèle bas-ordre de rotor caréné adressant spécifiquement cette large plage de fonctionnement est absent de la littérature. Dans ce papier, une étude comparative des différents modèles existants détermine clairement leur plage de prédictivité. Ceci à travers une expression innovante du problème des rotors carénés qui permet la construction de paramètres de similitude représentant une base comparative solide des modèles. Il est établi ici que le modèle de Jardin et al. [1] présente la plage de prédictivité la plus large grâce à la surface « iso-cinétique » qu'il introduit. Ce modèle reste toutefois peu robuste et nécessite une donnée d'entrée supplémentaire liée à la surface « iso-cinétique ». Le développement d'une extension du modèle au domaine compressible permet d'accroître sa robustesse et un modèle empirique de la ligne iso-cinétique permet de s'affranchir de la donnée d'entrée supplémentaire.

Abstract :

Reaching the European long-term air transport emission reduction goals impose shifting by 2050 toward hybridation/electrification of airplanes as well as global optimization of flight missions. This implies developing distributed propulsion systems through the multiplication of small shrouded rotors operating at high efficiency within a wide range. Present literature lacks a low-order shrouded rotor model specifically designed to work on such wide operating range. In this paper, the working range of the existing models is benchmarked on the basis of similarity factors built on an innovative expression of the shrouded rotors problem. It is established here that the model of Jardin et al. [1] presents the wider working range thanks to the "homokinetic" surface definition but lacks robustness and needs an additional input that is related to the "homokinetic" surface. The extension of this model to the compressible domain increases its robustness and an empirical model of the "homokinetic" surface helps dropping the additional input.

Mots clefs : Propulsion distribuée, Rotor caréné, Modélisation, Design

Nomenclature

A : Aire de section [m^2]
 c : Corde [m]
 h_{fl} : Altitude de vol [m]
 k, K : Rapport section sur section rotor [-]
 \dot{m} : Débit massique [kg/s]
 \mathbf{n} : Vecteur unitaire normal [-]
 N : Vitesse de rotation [tr/min]
 p : Pression [Pa]
 P : Puissance [W]
 r : Constante massique de l'air [$J/kg/K$]
 R : Rayon [m]
 S : Surface [m^2]
 t : Température [K]
 T : Poussée [N]
 v, V : Vitesse [m/s]
 x : Position axiale [m]
 α : Angle d'incidence [deg]
 γ : Rapport des chaleurs spécifiques [-]
 η_p : Rendement propulsif [-]

π : Rapport des pressions totales [-]
 ρ : Masse volumique [kg/m^3]
 τ : Rapport des températures totales [-]

Indices

0 : Infini amont
 1 : Entrée
 2 : Sortie
 a : Aérodynamique
 c : Compression
 i : Grandeur totale
 r, R : Rotor
 r_1, R_1 : Amont rotor
 r_2, R_2 : Aval rotor
 s, S : Carène

Exposants

J : Jardin
 JC : Jardin Compressible
 P : Pereira
 T : Turboréacteur

1 Introduction

Le conseil consultatif européen pour la recherche et l'innovation aéronautique (ACARE) [2] ainsi que la NASA [3] imposent des objectifs ambitieux en termes de réduction des émissions polluantes. Atteindre ces objectifs passe par l'amélioration des performances des systèmes propulsifs ainsi que l'optimisation globale de la mission de l'aéronef. Cette optimisation nécessite l'apport de degrés de liberté supplémentaires au calcul de la mission qui se traduisent par une flexibilité de fonctionnement accrue du système propulsif. Ceci implique d'une part l'élargissement de l'espace de design de ces systèmes propulsifs, et d'autre part l'optimisation multipoint de leurs performances afin de permettre la maximisation de leur rendement tout au long de la mission.

Les recherches actuelles s'orientent vers l'introduction de variabilités géométriques sur les systèmes propulsifs conventionnels [4, 5]. A l'horizon 2050, l'IATA [6] préconise l'orientation vers des technologies de rupture afin d'atteindre les objectifs fixés. Parmi ces technologies, l'hybridation voire l'électrification complète des systèmes propulsifs offrent des perspectives intéressantes. Toutefois, la proportionnalité que présente la masse des moteurs électriques avec le couple qu'ils sont en mesure de délivrer [7] rend envisageable le simple remplacement des motorisations thermiques conventionnelles par une motorisation électrique. Afin d'éviter le coût de masse important qui accompagnerait une telle solution, il est indispensable d'envisager la limitation du couple mécanique des moteurs et par conséquent de la charge des rotors. Dans ce cas, le maintien d'une puissance propulsive viable passe par l'augmentation de la vitesse de rotation des moteurs. Cette vitesse de rotation accrue ne doit cependant pas s'accompagner du passage des pales du rotor en régime transsonique étant donnée que ce régime de

fonctionnement s'accompagne d'un accroissement de la charge des rotors et de ce fait du couple mécanique nécessaire à leur entraînement. Ces contraintes de faible charge et de forte vitesse de rotation imposent donc une réduction du diamètre des modules propulsifs qu'il sera nécessaire de multiplier afin d'atteindre les spécifications de poussée communément rencontrées dans l'aviation civile.

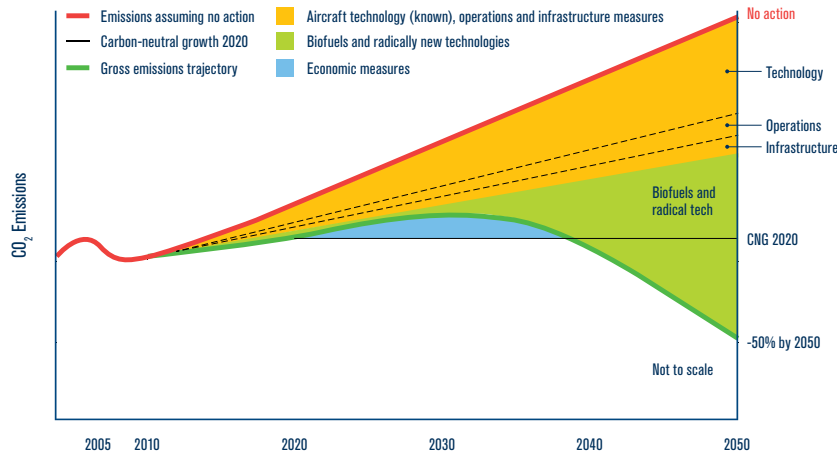
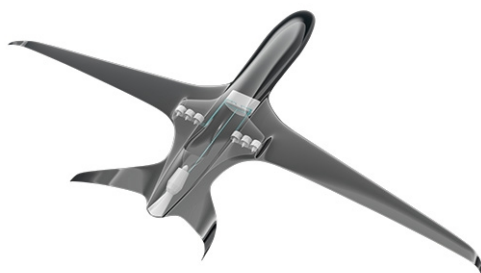
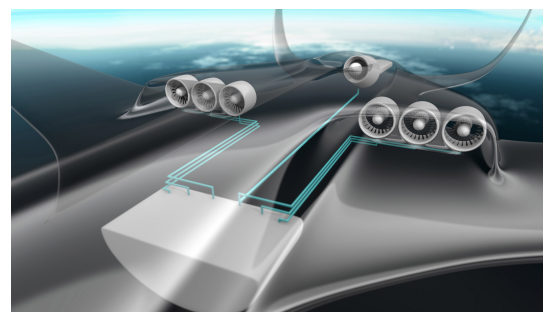


FIGURE 1 – Projection des émissions de CO₂ suivant divers scénarii [6]

Les points exposés dans le paragraphe précédent montrent le lien étroit qui existe entre l'hybridation/électrification et la distribution de la propulsion à travers la multiplication de modules propulsifs de faible diamètre. Ce concept de propulsion distribuée offre de même l'avantage d'envisager une meilleure intégration du système propulsif à la voilure permettant d'optimiser conjointement l'ensemble aéronef-système propulsif. Une piste envisagée pour la mise en pratique d'une telle intégration est l'ajout d'une carène. En plus des possibilités d'intégration qu'apporte le carénage des rotors, cela permet la diminution des pertes aérodynamiques à travers la limitation des tourbillons et contournement en bout de pale, et libère ainsi la contrainte de répartition de la charge en envergure. La contrepartie de ce carénage est l'ajout d'une trainée supplémentaire. Une solution pour limiter cette trainée est la génération d'une poussée additionnelle passive au niveau du bord d'attaque de la carène. Pour ce faire, une entrée d'air convergente et une sortie d'air divergente doivent être envisagées, à l'image des tuyères de Kort [8]. Enfin, afin de palier l'augmentation du nombre de Mach au plan rotor consécutive à cette géométrie et maintenir un fonctionnement subsonique du rotor, une diminution du Mach de vol est préconisée.



(a) Aéronef



(b) Système propulsif

FIGURE 2 – Concept d'avion à propulsion distribuée E-thrust (Airbus)

En résumé, atteindre les objectifs de réduction des émissions polluantes à l'horizon 2050 passe par

l'hybridation/électrification des aéronefs et de ce fait par la distribution de la propulsion via la multiplication de rotors carénés de faible diamètre ainsi que la diminution du Mach de vol. De plus, ces modules propulsifs doivent être dimensionnés de sorte à présenter des performances élevées sur de larges plages de fonctionnement afin d'apporter la flexibilité nécessaire à l'optimisation de la mission. Ces contraintes imposent donc le développement d'outils de design des systèmes de type rotor-carène prédictifs sur de larges plages de fonctionnement. Ce dernier point représente l'objet du présent article.

2 Positionnement et périmètre de l'étude

Stipa [9] et Kort [8] sont considérés comme pionniers dans l'étude des rotors carénés. Ils ont constaté que l'ajout d'une carène à une hélice permet l'amélioration de ses performances au point fixe et à faible vitesse d'avance. Ces travaux ont permis de poser les bases des carènes propulsives à entrée d'air convergente et sortie d'air divergente.

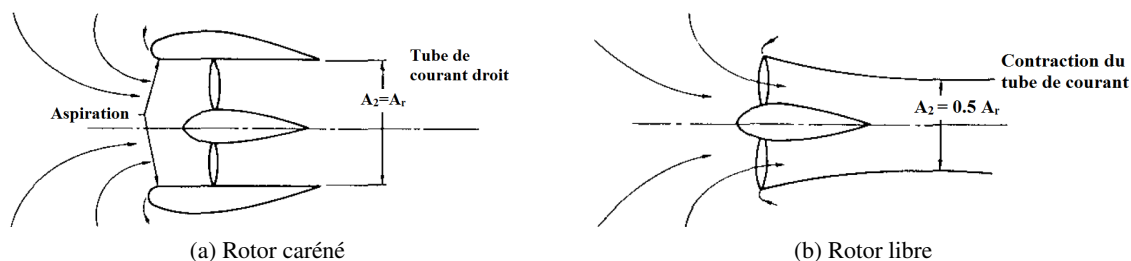


FIGURE 3 – Effet de la carène sur le tube de courant au point fixe (adapté de Black et al. [10])

Krüger [11], à travers une campagne expérimentale étendue, a démontré que la poussée additionnelle que présentent les systèmes de type rotor-carène au point fixe est liée à l'effet de la carène sur le tube de courant en aval du rotor. En effet, la section de sortie de la carène impose la forme du tube de courant, empêchant ainsi sa contraction naturelle vers la moitié de la section rotor (phénomène observé pour les hélices libres). Le bilan propulsif donne dans ce cas une poussée théoriquement d'autant plus importante que la section de sortie de la carène augmente. Black et al. [10] a confirmé ce résultat à travers une étude paramétrique exhaustive en montrant que la poussée carène est générée en bord d'attaque du profil de la carène à travers la dépression locale due au contournement de l'écoulement. Cette dépression sera plus importante à mesure que le débit admis dans le système augmente, ce qui est piloté par la section de sortie. Cette idée de section de sortie pilotant les performances du système rotor-carène au point fixe est à la base du modèle proposé par Pereira [12]. Ce modèle, ayant pour objectif la prédiction des performances des drones a été développé au point fixe. Pereira en propose toutefois une extrapolation au vol d'avance.

Krüger [11] et Black et al. [10] ont aussi rapporté dans leurs travaux la chute brutale des performances des rotors carénés dès que le Mach d'avance dépasse des valeurs environnant 0.15, en raison d'une rapide augmentation de la trainée de la carène. Cette observation a été nuancée par Mort [13] qui a pour sa part observé que la pénalité de trainée apportée par la carène aux fortes vitesses d'avance n'est pas systématique et reste grandement dépendante de la géométrie de la carène, particulièrement au niveau du bord d'attaque du profil de cette dernière. Le modèle que proposent Jardin et al. [1] prend en compte la géométrie de l'entrée d'air à travers la section d'entrée et une surface amont dite « iso-cinétique » normale aux lignes de courant et présentant des modules de vitesses constants en tout point. Ce modèle

a été développé au point fixe mais Jardin et al. en proposent une généralisation aux cas de vol d'avance en annexe de leur papier [1].

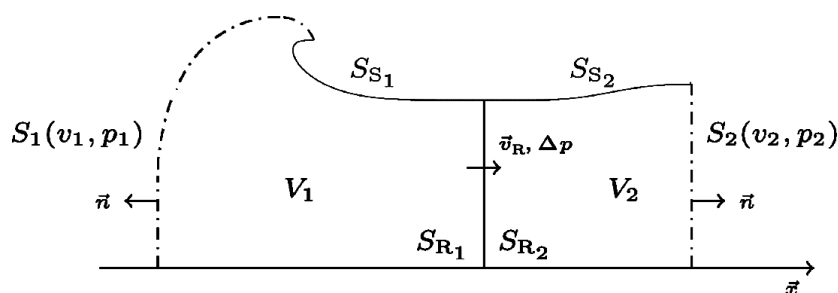


FIGURE 4 – Schéma de principe du modèle de Jardin et al. [1]

Il apparaît donc des points exposés plus haut qu'actuellement, la modélisation simple des systèmes rotor-carène se fait le plus souvent au point fixe à travers des modèles développés pour des applications aux drones [1, 12]. Même si des extensions de ces modèles au vol d'avance sont proposées, elles n'adressent pas spécifiquement cette plage de fonctionnement et leur prédictivité y reste donc limitée (cf. section 4). Ce manque de modèles développés pour le vol d'avance peut en outre s'expliquer par la possibilité d'adapter des modèles de calcul de turboréacteurs [14] au cas des rotor carénés. Toutefois, ces modèles de turboréacteurs sont le plus souvent adaptés aux Mach de vol importants de l'ordre de 0.8. Par conséquent, il existe un gap entre le point fixe/faibles vitesses d'avance et les forts Mach de vol que les divers modèles exposés n'adressent pas et où leur prédictivité reste à déterminer. C'est autour de cette zone de fonctionnement intermédiaire que s'articulent les travaux exposés dans ce papier.

Dans un premier temps, une base comparative robuste des différents modèles sera établie à travers la réduction des nombreux paramètres du problème. Cette réduction se fera par la construction de nombres adimensionnels pilotant les performances du système au premier ordre. Cette base comparative permettra de mettre en évidence les limites de chacune des modélisations existantes. De cette étude comparative, il apparaît que le modèle de Jardin et al. est celui qui capture le mieux les tendances d'évolution des performances du système malgré certaines lacunes au niveau de la robustesse. Une extension de ce modèle au régime compressible est par la suite proposée et permet de combler les lacunes observées. Une autre limite du modèle de Jardin et al. se situe dans la nécessité de renseigner le paramètre k représentatif de la surface iso-cinétique. Or ce paramètre ne peut être connu a priori, ce qui fait de ce modèle un bon outil d'analyse de performances mais pas de design. De ce fait, une modélisation empirique de la surface iso-cinétique est proposée afin de s'affranchir de l'entrée du paramètre k et ainsi répondre à l'objectif de développement d'un outil de design simple des rotors carénés prédictifs sur de larges plages de fonctionnement.

3 Réduction du problème

Le faible traitement analytique qui est fait des systèmes de type rotor-carène dans la littérature par rapport aux rotors libres est principalement dû à la grande complexité qu'apporte l'ajout d'une carène au problème. En effet, les interactions entre le rotor et la carène mènent à un problème sensiblement différent de celui d'une hélice ou d'une carène isolées. De plus, le grand nombre de variables en présence rend une étude exhaustive difficile à réaliser. Sacks et Burnell [15] ont proposé une énumération complète de ces variables qu'il est possible de trier dans deux catégories : les variables géométriques

et les variables de fonctionnement. La première catégorie peut se résumer aux variables définissant le profil de carène (corde, épaisseur, cambrure...), variables de définition du rotor (solidité, rayon, calage, vrillage, lois de profils) ainsi que les variables croisées (rapport moyeu/carter, jeu rotor-carène, position du rotor dans la carène). La seconde catégorie comprend les variables telles que les conditions de pression et de température ambiantes, la vitesse de vol, le nombre de Reynolds, l'angle d'attaque de la carène, le débit massique admis, la puissance consommée par le rotor, sa vitesse de rotation et enfin la poussée rotor et la poussée totale.

$$f(\text{carène, rotor}, \frac{R_h}{R_s}, \frac{R_s}{R_r}, \frac{x_r}{c_s}, h_{fl}, V_0, Re, \alpha_s, \dot{m}, P, N, T_r, T_t) = 0 \quad (1)$$

Dans ce papier, une modélisation simple des systèmes rotor-carène est envisagée. Par conséquent, il est fait recours à la modélisation du rotor via un disque actionneur, ce qui permet de s'affranchir de l'ensemble des variables géométriques du rotor excepté son rayon. De même le jeu entre le rotor et la carène est considéré nul, ce qui impose donc le même rayon à la carène. Le rotor et le moyeu sont positionnés à 50% de la corde du profil de carène. Le moyeu est modélisé par une ogive à rayon constant et le rapport moyeu/carter est fixé à 5%. En outre, le module propulsif est étudié en vol stationnaire donc l'angle d'attaque de la carène est nul. De plus, afin de diminuer la complexité du problème, les effets visqueux sont négligés et donc le nombre de Reynolds supposé infini.

En ce qui concerne la géométrie de la carène, la position de l'épaisseur maximale est fixée au bord d'attaque ce qui implique que l'épaisseur du profil coïncide avec le rayon au bord d'attaque qui est fixé à 5% du rayon rotor. De même, l'angle au bord de fuite est fixé à 3°. Enfin en connaissant les sections d'entrée et de sortie, il est possible de calculer simplement la corde et la cambrure du profil de carène. Par conséquent, la géométrie de la carène sera entièrement définie.

Pour ce qui est des conditions de fonctionnement, étant données les contraintes imposées par la propulsion distribuée (cf. introduction), la vitesse de rotation du rotor est indirectement imposée par un nombre de Mach relatif en bout de pale fixé à 0.95.

$$f(\underbrace{\text{carène}}_{A_1, A_2}, \text{rotor}, \underbrace{\frac{R_h}{R_s}, \frac{R_r}{R_s}, \frac{x_r}{c_s}}_{A_r}, \underbrace{h_{fl}, V_0, T_t}_{\text{données mission}}, Re \rightarrow \infty, \alpha_s \rightarrow 0^\circ, \dot{m}, P, \underbrace{N}_{M_{tip}=0.95}, T_r) = 0 \quad (2)$$

donc

$$f(A_1, A_2, A_r, \rho_0, V_0, T_t, \dot{m}, P, T_r) = 0 \quad (3)$$

A ce niveau, il est possible de faire appel au théorème π -Buckingham [16] afin de réduire le nombre de variables du problème. Ceci permet de s'affranchir d'autant de variables que de dimensions élémentaires constituant le problème (c'est-à-dire trois) en formant des groupements adimensionnels.

$$f\left(\frac{A_1}{A_r}, \frac{A_2}{A_r}, \frac{T_t}{\rho_0 A_r V_0^2}, \frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}, \frac{T_t V_0}{P}, \frac{T_r}{T_t}\right) = 0 \quad (4)$$

Il est possible de réexprimer ces mêmes grandeurs en utilisant les notations de Jardin et al. [1] pour les rapports de section et à l'aide de la définition du rendement propulsif. De même, au vu de la proximité

que présente le rapport $T_t/(\rho_0 A_r V_0^2)$ avec l'expression d'un coefficient de traction, il sera noté C_{T_0} .

$$f(K_1, K_2, C_{T_0}, \frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}, \eta_p, \frac{T_r}{T_t}) = 0 \quad (5)$$

Afin de démontrer la pertinence de ce choix de groupements adimensionnels, il est nécessaire de montrer qu'ils représentent des paramètres de similitude du système. Pour ce faire, la réponse du système rotor-carène à la variation de ces paramètres doit être étudiée. Etant donné, le nombre important de grandeurs à faire varier, le recours à un outil de calcul robuste, prédictif et rapide s'impose. Le logiciel libre Ducted Fan Design Code (DFDC) [17] développé par Drela et al. au Massachusetts Institute of Technology (MIT) a été utilisé afin de mener cette étude. DFDC modélise un écoulement potentiel axisymétrique avec une approche de type ligne portante pour le rotor et la méthode des panneaux pour la représentation de la carène et du moyeu. Pour plus de détails, le lecteur pourra se rapporter au papier de Drela et al. traitant de l'approche analytique développée dans DFDC [18].

DFDC nécessite en entrée la géométrie de la carène, une altitude de vol, une vitesse d'avance ainsi qu'une poussée globale. Il retourne ainsi le débit massique admis dans le système, la puissance mécanique consommée et la répartition des poussées entre le rotor et la carène. Ceci amène à réexprimer le problème de la manière suivante :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}, \eta_p, \frac{T_r}{T_t} = f(K_1, K_2, C_{T_0}) \quad (6)$$

A partir de là, si les grandeurs construites représentent des paramètres de similitude alors seules les variations de K_1 , K_2 et/ou C_{T_0} induiront des variations des groupements de gauche dans la relation (6). Afin de mettre cela en évidence, les spécifications de poussée totale, de section rotor, de vitesse d'avance et d'altitude de vol ont été modifiées à iso- C_{T_0} et des valeurs fixées de K_1 et K_2 . Les tableaux 1 à 3 résument les résultats obtenus. Le choix des points de fonctionnement a été établi de sorte à refléter des nombres de Mach et des altitudes représentatives d'une mission d'un avion civil. Les tableaux 1 et 2 sont établis pour une même géométrie de carène à des altitudes différentes. Le tableau 3 représente pour sa part les résultats obtenus pour une géométrie de carène différente calculés aux mêmes valeurs de C_{T_0} que le tableau 1.

C_{T_0}	10				0.035			
T_t [N]	60	30	30	60	60	30	30	60
A_r [cm ²]	1253	627	1253	627	1253	627	1253	627
V_0 [m/s]	6.25	6.25	4.42	8.84	105.62	105.62	74.68	149.37
$\frac{T_r}{T_t}$ [%]	58.63	58.67	58.70	58.72	104.75	105.10	105.13	105.17
η_p [%]	42.67	42.63	42.80	42.20	82.03	81.75	82.38	79.88
$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}$ [-]	3.97	3.97	3.97	3.98	1.15	1.15	1.15	1.15

Tableau 1 – Mise en évidence des similitudes pour $K_1 = 1.150$, $K_2 = 1.095$ et $h_{fl} = 0$ m

Les valeurs mises en gras sont représentatives d'un point de référence vis-à-vis duquel la poussée globale, la section rotor et la vitesse d'avance varient deux à deux à iso- C_{T_0} . Il est possible de constater à partir des tableaux 1 et 2 que les sorties ne varient que très peu à iso-géométrie de carène et C_{T_0} quelques soit l'altitude de vol. Les faibles variations observées sont liées à la dispersion numériques.

Toutefois, une variation plus importante peut être constatée sur les valeurs de rendement propulsif aux fortes vitesses d'avance pouvant aller jusqu'à 10% d'écart. Ces écarts sont liés à l'augmentation du

C_{T_0}	10				0.02			
T_t [N]	60	30	30	60	50	30	30	50
A_r [cm ²]	1253	627	1253	627	1253	627	1253	627
V_0 [m/s]	7.56	7.56	5.35	10.69	154.37	169.11	119.58	218.32
$\frac{T_r}{T_t}$ [%]	58.57	58.60	58.87	58.30	117.14	117.33	117.63	117.62
η_p [%]	42.52	42.47	42.48	42.16	73.20	72.26	74.00	62.44
$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}$ [-]	3.97	3.97	3.97	3.98	1.13	1.13	1.13	1.13

Tableau 2 – Mise en évidence des similitudes pour $K_1 = 1.150$, $K_2 = 1.095$ et $h_{fl} = 3810$ m

C_{T_0}	10				0.035			
T_t [N]	60	30	30	60	60	30	30	60
A_r [cm ²]	1253	627	1253	627	1253	627	1253	627
V_0 [m/s]	6.25	6.25	4.42	8.84	105.62	105.62	74.68	149.37
$\frac{T_r}{T_t}$ [%]	54.83	54.97	54.90	54.98	106.55	106.10	106.67	106.10
η_p [%]	43.01	42.86	43.11	42.47	72.60	72.92	73.15	70.99
$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}$ [-]	4.21	4.21	4.21	4.22	1.27	1.27	1.27	1.27

Tableau 3 – Mise en évidence des similitudes pour $K_1 = 1.25$, $K_2 = 1.19$ et $h_{fl} = 0$ m

nombre Mach de vol. En effet, les calculs étant effectués à iso-Mach relatif en bout de pale, l'augmentation du nombre de Mach amont et donc du Mach au plan rotor induit une diminution de la vitesse de rotation du rotor. De plus, à mesure que le nombre de Mach amont augmente, la trainée de la carène augmente et nécessite donc d'être compensée par une poussée rotor de plus en plus importante afin d'atteindre la spécification de poussée globale. La conjugaison de ces deux effets implique une augmentation non linéaire du chargement du rotor reflétée par un couple mécanique de plus en plus important menant vers un effondrement du rendement propulsif.

D'autre part, la comparaison des tableaux 1 et 3 permet de constater que l'effet de la géométrie de la carène sur les sorties du problème est d'un ordre plus faible que celui de C_{T_0} .

L'invariance constatée du coefficient de débit, du rendement propulsif (mis à part à forts Mach de vol) et de la répartition des poussées pour des valeurs fixées de C_{T_0} , K_1 et K_2 démontre que les groupements adimensionnels construits représentent bien des grandeurs de similitude. Ces paramètres définissent donc entièrement le fonctionnement du système rotor-carène et représentent de ce fait une base de comparaison pertinente des différents modèles.

4 Limites des modélisations existantes

Comme souligné dans la section 2, les modèles bas-ordre des rotor carénés qui se démarquent dans la littérature sont ceux de Pereira et Jardin et al. [1, 12] pour le point fixe d'une part, et l'adaptation des modèles de turboréacteurs pour le vol d'avance [14] d'autre part.

Les modèles de Pereira et Jardin et al. dérivent de la théorie de Froude et en reprennent donc les principales hypothèses, à savoir : le fluide est supposé non visqueux et l'écoulement monodimensionnel, stationnaire, incompressible, irrotationnel et adiabatique.

Le modèle de Pereira introduit la section de sortie de la carène et base dessus le bilan de masse. Puis par conservation de la quantité de mouvement entre l'entrée et la sortie du système il est possible d'écrire :

$$T_t^P = \dot{m}(V_2 - V_0) = \rho_0 K_2 A_r V_2 (V_2 - V_0) \quad (7)$$

à partir de là, il est possible d'exprimer la vitesse en sortie en fonction de la vitesse d'avance, de la poussée globale et de K_2 :

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(V_0 + \sqrt{V_0^2 + \frac{4T_t}{\rho_0 K_2 A_r}} \right) \quad (8)$$

après cela, avec l'hypothèse que la sortie d'air est adaptée, l'application des relations de saut du disque actionneur au niveau du rotor et du théorème de Bernoulli de part et d'autre du rotor donne :

$$T_r^P = A_r \Delta p = \frac{A_r \rho_0}{2} (V_2^2 - V_0^2) \quad (9)$$

donc

$$\frac{T_r^P}{T_t^P} = \frac{V_2 + V_0}{2K_2 V_2} \quad (10)$$

Dans le modèle de Jardin et al. un travail similaire est effectué en considérant cette fois le système représenté dans la figure 4. Ainsi, le bilan de quantité de mouvement entre l'entrée représentée par la surface iso-cinétique S_1 et la sortie du système, il est obtenu sous l'hypothèse d'une sortie d'air adaptée :

$$T_t^J = \dot{m} (V_2 - V_1) - A_1 (p_1 - p_0) \quad (11)$$

ce qui donne après application du théorème de Bernoulli entre l'entrée et l'amont du rotor et entre l'aval du rotor et la sortie, l'injection du bilan de masse et quelques manipulations :

$$T_t^J = \frac{\rho_0 A_r}{2} \left[\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r} \right)^2 \left(\frac{2}{K_2} - \frac{1}{k^2 K_1} \right) - K_1 V_0^2 \right] \quad (12)$$

où $k = A'_1/A_1$ représente le rapport entre l'aire de la surface iso-cinétique et l'aire de sa projection suivant l'axe x [1]. Pour sa part, le rotor reste modélisé de la même manière que dans le modèle de Pereira ce qui permet d'écrire en exprimant les grandeurs suivant les notations de Jardin et al. :

$$\frac{T_r^J}{T_t^J} = \frac{\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r} \right)^2 \left(\frac{1}{K_2} \right)^2 - V_0^2}{\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r} \right)^2 \left(\frac{2}{K_2} - \frac{1}{k^2 K_1} \right) - K_1 V_0^2} \quad (13)$$

Le modèle turboréacteur reprend les mêmes hypothèses que celles énoncées plus haut mais considère l'écoulement compressible au vu des Mach de vol importants pour lesquels ce modèle est développé. L'entrée du système est ici modélisée par une section plane projetée à l'amont du système dont la taille est fonction du Mach de vol et de la charge du rotor (cf. figure 5).

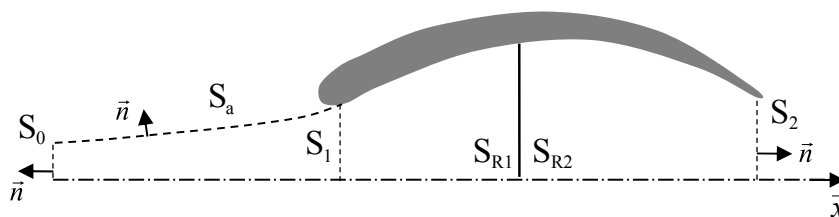


FIGURE 5 – Schéma de principe du modèle turboréacteur

Le bilan de quantité de mouvement entre l'entrée et la sortie du système donne dans ce cas un résultat similaire à celui du modèle de Jardin et al. (cf. équation (12)). Ce qui, exprimé à l'aide des nombres de

Mach aux plans 0 et 1 donne :

$$T_t^T = \dot{m}(V_2 - V_0) - p_1 A_1 (1 + \gamma M_1^2) + p_0 A_0 (1 + \gamma M_0^2) - p_0 (A_0 - A_1) \quad (14)$$

la poussée du rotor est aussi obtenue par un bilan de quantité de mouvement entre les surfaces S_{R_1} et S_{R_2} . Toutefois, l'aspect compressible de l'écoulement empêche dans ce cas le recours au théorème de Bernoulli et à l'égalité des vitesses de part et d'autre du rotor. Ceci ajoute au problème un degré de liberté supplémentaire qu'il est nécessaire de compenser par l'entrée de la puissance consommée par le rotor exprimée comme suit :

$$P^T = \dot{m} c_p (t_{i_2} - t_{i_1}) = \dot{m} \frac{\gamma r}{\gamma - 1} t_{i_0} (\tau_c - 1) \quad (15)$$

cela permet le calcul du rapport des températures totales au niveau du rotor τ_c et d'en déduire à l'aide des relations isentropiques le taux de compression du rotor :

$$\pi_c = \frac{p_{i_2}}{p_{i_1}} = \left(\frac{t_{i_2}}{t_{i_1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \tau_c^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (16)$$

une fois ces grandeurs connues, le calcul des nombres de Mach en aval du rotor devient possible et de ce fait le calcul de la poussée du rotor comme suit :

$$T_r^T = A_r [(p_{r_2} + \rho_{r_2} V_{r_2}^2) - (p_{r_1} + \rho_{r_1} V_{r_1}^2)] \quad (17)$$

suite à quelques manipulations, il est ainsi possible d'exprimer le rapport des poussées de la manière suivante :

$$\frac{T_r^T}{T_t^T} = \frac{A_r [p_{r_2} (1 + \gamma M_{r_2}^2) - p_{r_1} (1 + \gamma M_{r_1}^2)]}{\dot{m}(V_2 - V_0) - p_1 A_1 (1 + \gamma M_1^2) + p_0 A_0 (1 + \gamma M_0^2) - p_0 (A_0 - A_1)} \quad (18)$$

A partir des relations (10), (13) et (18) il est possible d'évaluer la réponse des différents modèles à une variation de C_{T_0} , K_1 et/ou K_2 et ainsi les comparer aux résultats obtenus via DFDC qui seront considérés comme référence. Dans le cas du modèle de Jardin et al. le rapport k doit être entré. Aussi, comme indiqué plus haut le modèle turboréacteur nécessite l'entrée de la puissance consommée. Ces deux derniers paramètres seront évalués à l'aide du calcul numérique effectué sur DFDC puis rentrés dans les modèles correspondants. La relation (6) est donc ici réexprimée de la manière suivante :

$$\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}, \frac{T_r}{T_t} = f(K_1, K_2, C_{T_0}, \eta_p) \quad (19)$$

La variation de C_{T_0} a été obtenue à l'aide de la variation de la vitesse de vol à iso-poussée globale. Les résultats obtenus pour diverses géométries de carène étant assez similaires, seuls les résultats pour $K_1 = 1.150$ et $K_2 = 1.095$ sont exposés dans la figure 6. Cette figure montre l'évolution de la répartition de poussée entre le rotor et la carène ainsi que l'évolution du coefficient de débit.

A partir de l'évolution de la poussée rotor, il apparaît clairement que le modèle de Pereira est très peu prédictif pour des faibles valeurs de C_{T_0} (équivalentes à de fortes valeurs de Mach de vol à iso-poussée globale et section rotor). Ce comportement s'explique par la relation (8) qui montre qu'à faible valeurs de C_{T_0} le rapport V_2/V_0 tend vers une valeur constante correspondant à $1/K_2$. Ce modèle n'est donc pas

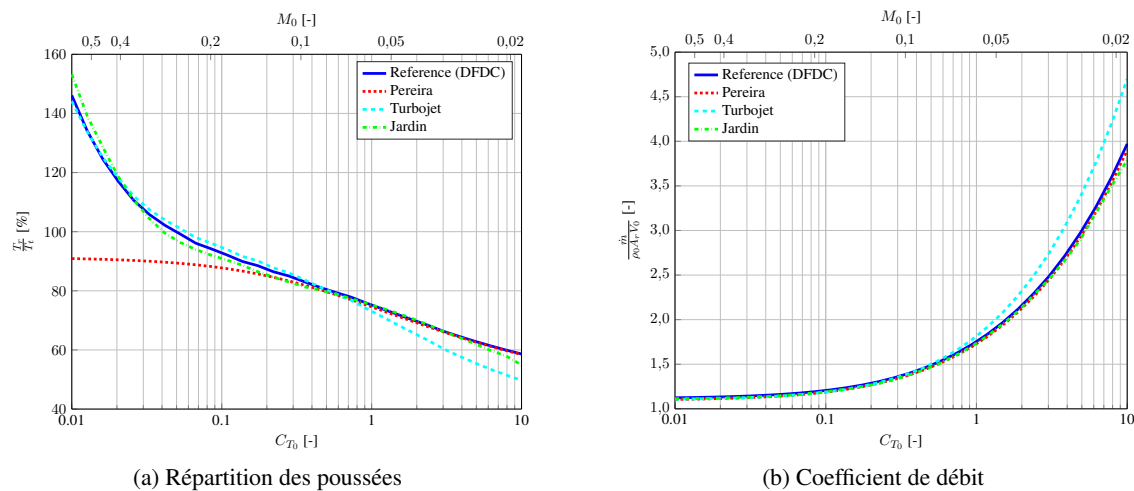


FIGURE 6 – Mise en évidence des limites des modèles pour $K_1 = 1.150$, $K_2 = 1.095$ et $h_{fl} = 0 m$

en mesure de saisir la trainée carène aux forts Mach de vol.

Contrairement au modèle de Pereira, la prédictivité du modèle turboréacteur baisse aux fortes valeurs de C_{T_0} et donc aux faibles Mach de vol ici. Cela est lié principalement à la construction de la surface d'entrée du système (cf. figure 5) qui n'est pas adaptée à la trajectoire des lignes de courant aux faibles Mach de vol. Cette contrainte sur la surface d'entrée mène vers une évaluation erronée du débit massique en le surévaluant, ce qui mène vers une surévaluation de la poussée carène.

Le modèle de Jardin et al. présente les meilleurs résultats malgré la présence de quelques écarts. Ces écarts sont liés à la méthode d'évaluation du facteur k à partir du calcul numérique sur DFDC qui peut présenter quelques oscillations numériques. Cette prédictivité accrue que présente le modèle de Jardin et al. peut être reliée à la modélisation de la surface d'entrée du système par la surface iso-cinétique. Ceci attribue au modèle la possibilité de s'adapter aux différents Mach de vol contrairement aux modèles de Pereira et turboréacteur qui représentent des états asymptotiques de cette surface iso-cinétique. En effet, dans le modèle de Pereira la surface iso-cinétique peut être considérée comme projetée à l'infini amont, tandis qu'elle est limitée à la surface plane S_0 sur laquelle le Mach est imposé dans le modèle turboréacteur.

Il est important de souligner ici que, malgré des évolutions de coefficient de débit similaires entre les modèles de Pereira et Jardin et al., les résultats du calcul des poussées rotor diffèrent alors même qu'elles sont calculées à l'aide de la même formule (9). Ceci s'explique par la divergence rapide que connaît le terme $(V_2^2 - V_0^2)$ aux fortes vitesses de vol. Ainsi, la variation même minime sur l'évaluation du débit massique et donc sur la vitesse V_2 induit une variation importante de la poussée rotor. L'évaluation du débit dans le cas du modèle de Jardin et al. se fait au travers de la relation (12). De ce fait, la poussée rotor évaluée dans le modèle de Jardin et al. dépend fortement du paramètre k . Or ce paramètre est inconnu a priori et reste difficile à évaluer même a posteriori. Le modèle de Jardin et al. présente donc une marge d'amélioration importante, notamment vis-à-vis de ce facteur k .

5 Améliorations du modèle de Jardin et al.

Comme indiqué dans la section précédente, le calcul de la répartition des poussées entre le rotor et la carène est fortement dépendant du facteur k dans le modèle de Jardin. Ce facteur étant inconnu à

priori, cela rend difficile le recours à ce modèle en tant qu'outil de design des rotors carénés. De plus, le facteur k étant difficile à déterminer précisément, la robustesse du modèle en tant qu'outil d'analyse de performances reste discutable.

Dans cette section une amélioration de la robustesse du modèle par rapport au facteur k à travers son extension au régime compressible sera proposée. Après cela, le facteur k n'étant pas une variable indépendante du problème, sa modélisation semi-empirique à partir des données d'entrée est possible et sera exposée.

5.1 Extension au régime compressible

Il a été mis en avant dans la section précédente que la forte dépendance du calcul de la poussée rotor au facteur k est liée à la divergence rapide du terme $(V_2^2 - V_0^2)$ lorsque la vitesse de vol augmente (cf. relation (9)). Or ce terme $(V_2^2 - V_0^2)$ apparaît à l'utilisation du théorème de Bernoulli et l'hypothèse d'égalité des vitesses amont et aval au niveau du rotor. Par conséquent, afin de s'affranchir de la forte dépendance de la poussée rotor au facteur k il est nécessaire de reconsidérer ces hypothèses. Une solution permettant d'atteindre cet objectif serait l'extension du modèle au domaine compressible où le recours au théorème de Bernoulli n'est plus possible et où l'égalité des vitesses au niveau du rotor n'est pas imposée.

L'expression du modèle de Jardin et al. dans le domaine compressible s'apparente à une expression intermédiaire entre le modèle classique de Jardin et al. et le modèle turboréacteur. En cela, la poussée rotor ainsi que la puissance consommée s'expriment de la même manière que pour le modèle turboréacteur à travers les relations (17) et (15) respectivement.

En ce qui concerne la poussée globale, le bilan de quantité de mouvement entre la surface iso-cinétique et la sortie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$T_t^{JC} = A_r [\gamma p_2 M_2^2 K_2 - p_1 (1 + \gamma M_1^2) K_1 + p_0 K_1] \quad (20)$$

puis en faisant appel aux bilans de masse aux différents plans et après quelques manipulations il est possible d'obtenir :

$$T_t^{JC} = A_r p_0 (K_1 + \gamma M_2^2 K_2) - \dot{m} \sqrt{t_{i_0} r} \frac{\Phi(M_1)^{-\frac{1}{2}}}{k \sqrt{\gamma}} \quad (21)$$

où

$$\Phi(M_j) = \frac{M_j^2 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_j^2)}{(1 + \gamma M_j^2)^2} \quad (22)$$

ainsi en réexprimant de la même manière la poussée rotor il est possible d'écrire :

$$\frac{T_r^{JC}}{T_t^{JC}} = \frac{\dot{m} \sqrt{\frac{t_{i_0} r}{\gamma}} \left[\sqrt{\tau_c} \Phi(M_{r_2})^{-\frac{1}{2}} - \Phi(M_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right]}{A_r p_0 (K_1 + \gamma M_2^2 K_2) - \dot{m} \sqrt{t_{i_0} r} \frac{\Phi(M_1)^{-\frac{1}{2}}}{k \sqrt{\gamma}}} \quad (23)$$

Les relations (21) et (23) ont été utilisées afin d'évaluer la répartition des poussées et le coefficient de débit en fonction de C_{T_0} . Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus précédemment avec le modèle de Jardin et al. incompressible. La figure 7 met en évidence les améliorations qu'apporte l'extension du modèle au domaine compressible.

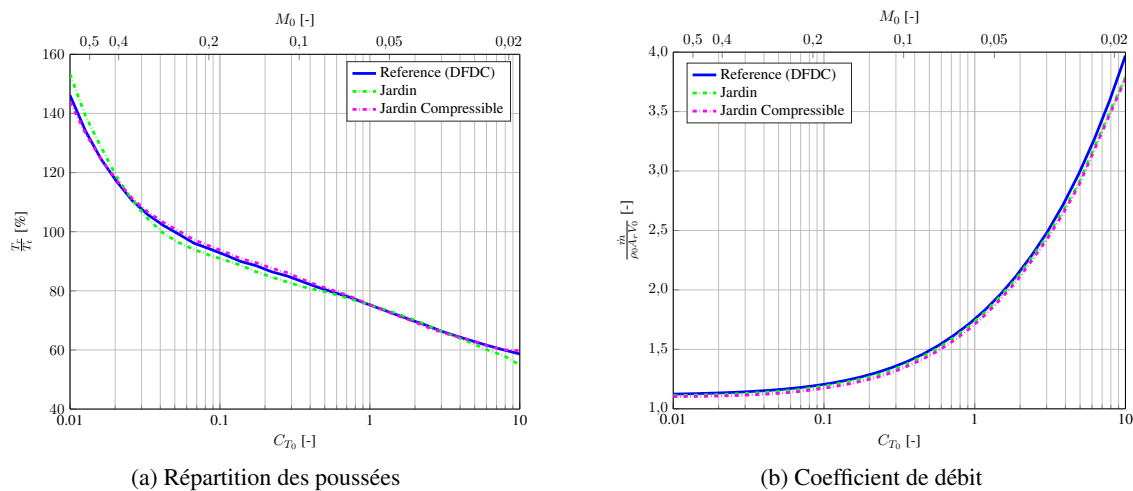


FIGURE 7 – Comparaison des modèles Jardin incompressible/compressible pour $K_1 = 1.150$, $K_2 = 1.095$ et $h_{fl} = 0$ m

Tout d’abord, il est intéressant de souligner que l’introduction du paramètre k et donc de la surface iso-cinétique évite la surévaluation du débit massique à faible Mach de vol observée sur le modèle turboréacteur. D’autre part, les oscillations de la poussée rotor sont absentes dans l’expression compressible du modèle pour des valeurs similaires de facteur k . Cela démontre que l’objectif d’accroître la robustesse du modèle vis-à-vis du facteur k est atteint à travers cette expression compressible du problème.

En plus de rendre le modèle plus robuste, son extension au domaine compressible présente d’autres avantages. D’une part cela permet de prédire les effets de la compressibilité comme l’apparition d’ondes de choc dans le système. D’autre part, même si cela ne rentre pas dans le cadre de cette étude, cela permet d’étendre la validité du modèle aux rotors plus fortement chargés et présentant des taux de compression de l’ordre de ceux des soufflantes des turbofans modernes. Enfin, l’introduction de la compressibilité rend possible la modélisation de la poussée additive de carène aux forts Mach de vol liée à l’augmentation de la pression dynamique à l’entrée d’air. Ce phénomène purement compressible a pour effet de décharger le rotor et de permettre un gain de rendement à iso-poussée globale [14]. Cet effet n’est cependant pas visible sur les résultats présentés en raison de l’entrée de la puissance consommée qui est calculée via DFDC de manière incompressible.

5.2 Modélisation de la surface iso-cinétique

Dans l’expression réduite du problème de modélisation des systèmes rotor-carène présentée à travers la relation (5), le facteur k représentatif de la surface iso-cinétique est absent. Cela est lié au fait que ce facteur ne représente pas une variable indépendante du problème. En effet, la construction même de la surface iso-cinétique la rend dépendante du débit admis dans le système et de la forme du tube de courant et donc de la carène [1]. Il est donc naturel de chercher une corrélation entre ces variables indépendantes et le facteur k sous la forme :

$$k = f\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0}, K_1, K_2\right) \quad (24)$$

de même le théorème de π -Buckingham autorise la composition des groupements adimensionnels [16], ce qui permet d'écrire :

$$k = f\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0} \frac{K_2}{K_1}, K_1, K_2\right) \quad (25)$$

En étudiant l'évolution du facteur k en fonction des paramètres décrits par la relation (25) il apparaît que k dépend au premier ordre du paramètre $(\dot{m}K_2)/(\rho_0 A_r V_0 K_1)$. Ce résultat est mis en évidence sur la figure 8 où l'ensemble des valeurs du facteur k sont reprises, pour une évolution de C_{T_0} allant de 0.01 à 10, K_1 allant de 1.15 à 1.30 et K_2 évoluant entre 1.05 et 1.25.

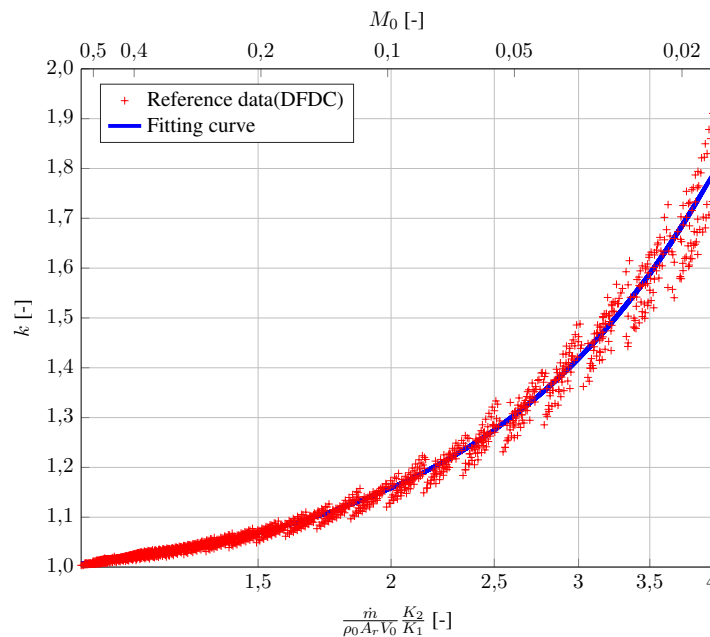


FIGURE 8 – Ajustement de l'évolution du facteur k en fonction du groupement adimensionnel composé

L'augmentation de la dispersion des points à faible Mach de vol est un effet qui peut être attribué à une mauvaise évaluation numérique de la surface iso-cinétique. En effet, comme exposé par Jardin et al. [1], la surface iso-cinétique est une surface de modélisation théorique dont l'existence dans l'écoulement réel ne peut qu'être approchée par une surface quasi iso-cinétique. Cette surface quasi iso-cinétique se distingue de l'infinité des surfaces en tout point normales aux lignes de courant par une déviation relative moyenne minimale des vitesses locales par rapport à la moyenne des vitesses sur la surface. Or, en raison des forts gradients de vitesse liés au contournement du bord d'attaque du profil de carène, les valeurs de déviations relatives moyennes minimales aux faibles Mach de vol sont plus importantes que celles rencontrées à fort Mach de vol. En l'occurrence ici, les calculs donnent 4% de déviation pour le plus fort Mach contre 18% pour le plus faible Mach. En considérant cette déviation comme indicateur de l'« iso-cinécité » de la surface déterminée, il est aisé de conclure que les facteurs k obtenus aux faibles Mach de vol sont bien moins représentatifs de la surface iso-cinétique théorique que ceux obtenus aux fort Mach de vol.

La figure 8 met aussi en évidence le résultat de l'ajustement des données obtenues via la méthode des moindres carrés par une fonction exponentielle s'exprimant comme suit :

$$k = c + a \exp\left(\frac{\dot{m}}{\rho_0 A_r V_0} \frac{K_2}{K_1}\right)^b \quad \text{avec } a = 4.948e^{-2}, b = 2.032, c = 0.956 \quad (26)$$

Afin de mettre en évidence la validité de la relation (26), celle-ci a été injectée au modèle de Jardin et al. étendu au domaine compressible afin de calculer la répartition des poussées et le coefficient de débit. La figure 9 met en évidence la comparaison des résultats obtenus avec ceux du même modèle où les valeurs du facteur k ont directement été renseignées.

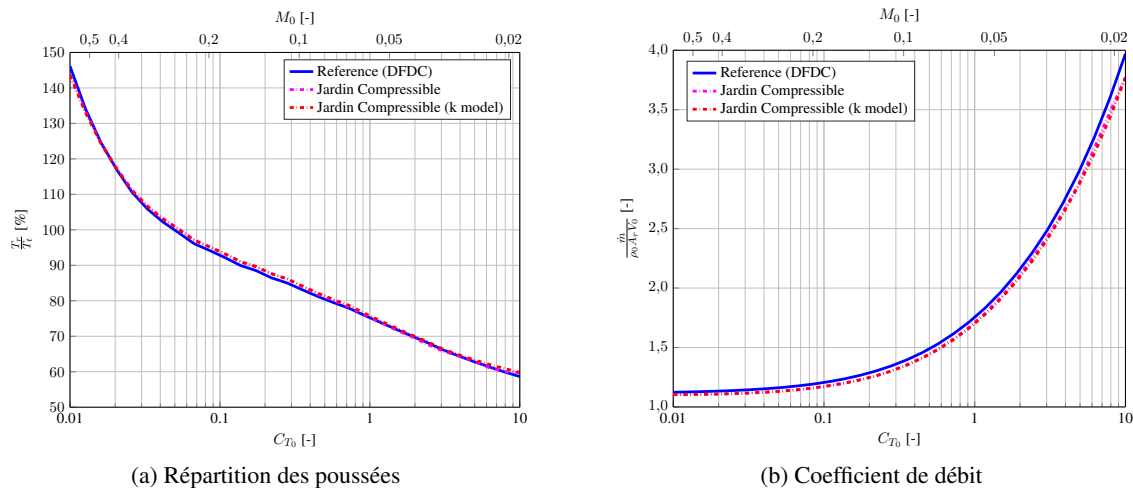


FIGURE 9 – Comparaison des modèles Jardin compressible pour $K_1 = 1.150$, $K_2 = 1.095$ et $h_{f1} = 0$ m avec et sans modélisation du facteur k

Il apparaît très clairement, à partir de la figure 9 que le recours au modèle empirique établi par la relation (26) n'altère en rien les sorties du modèle. Cela permet non seulement de valider le modèle empirique proposé mais aussi de confirmer la robustesse accrue du modèle vis-à-vis du facteur k .

6 Discussion

Les travaux présentés dans ce papier s'intéressent à la plage de prédictivité des modélisations bas-ordre des rotors carénés, en raison de l'intérêt que présente ce type de système propulsif pour la propulsion distribuée et donc l'électrification/hybridation des aéronefs.

Tout d'abord, une énumération des modèles existants et leur positionnement par rapport à la littérature scientifique et la compréhension de la physique des rotors carénés a été effectuée. Ensuite, une base comparative des différents modèles a été proposée. Ceci à travers une expression innovante du problème des rotors carénés ayant permis de dégager les grandeurs de similitude du système. A partir de ces grandeurs, une comparaison solide des différents modèles existant a pu être effectuée. Cela a permis de démontrer la faible prédictivité du modèles de Pereira aux fortes vitesses d'avance et du modèle turboréacteurs aux faibles vitesses d'avance. Le modèle de Jardin, à l'aide de l'introduction de la surface iso-cinétique, est le modèle qui présente la plus large plage de prédictivité. Toutefois, la forte sensibilité que présente ce modèle au facteur k et la nécessité de le lui renseigner limite son usage en tant qu'outil de design. Ces lacunes du modèle de Jardin et al. ont été comblées dans la dernière partie de ce papier à travers l'extension du modèle au domaine compressible et la proposition d'un modèle empirique pour s'affranchir de l'entrée du facteur k .

Il semble toutefois important ici d'apporter quelques nuances à certains des résultats présentés car la discussion autour de ces points reste ouverte et les travaux en cours.

D'une part, l'influence de l'augmentation du nombre de Mach de vol sur l'évolution du rendement propulsif observée dans la section 3 peut s'apparenter à une mauvaise construction du groupement adimensionnel qui représente le rendement du système. Au vu de l'interprétation proposée de cette évolution du rendement, plus de lumière devra être apportée sur l'évolution du couple mécanique en fonction des autres paramètres de similitude pour conclure sur cette réduction du problème. De plus, une campagne expérimentale est indispensable afin d'entériner les résultats établis.

D'autre part, les résultats du modèle de Jardin et al. étendu au domaine compressible démontrent que ce modèle amélioré est aussi prédictif que DFDC si une évaluation correcte de la puissance consommée lui est renseignée. Afin de s'assurer de la prédictivité complète de ce modèle face au problème tel qu'exprimé par la relation (6), il est nécessaire de s'affranchir de l'entrée de la puissance et d'être ainsi en mesure de proposer une fermeture différente au degré de liberté supplémentaire apporté par la compressibilité de l'écoulement. De plus, il sera nécessaire de s'assurer que le modèle de fermeture de la puissance proposé soit cohérent avec le phénomène de poussée additive de carène liée à l'augmentation de la pression dynamique avec le Mach de vol. L'ensemble doit de même être éprouvé à l'aide d'une expérience ou d'un calcul numérique plus haute fidélité que DFDC.

Enfin, afin de confirmer la validité du modèle empirique du facteur k , une méthode plus précise de son évaluation devra être développée. Cela permettrait d'isoler les effets numériques et ainsi permettre une étude de sensibilité qui confirmerait l'ordre d'influence faible des facteurs K_1 et K_2 .

Références

- [1] T. Jardin, G. Grondin, J. Gressier, C. Huo, N. Doué, and R. Barènes. Revisiting Froude's Theory for Hovering Shrouded Rotor. *AIAA Journal*, pages 1–9, 2015.
- [2] European Commission. Flightpath 2050 Europe's Vision for Aviation. Technical report, European Union, 2011.
- [3] U.S. Government. U.S. Aviation Greenhouse Gas Emissions Reduction Plan. Technical report, 2015.
- [4] K. Zarati, S. Duplaa, X. Carbonneau, and N. Tantot. Engine performance and surge margins optimization by means of nozzles variability. In *22nd ISABE Conference*, Phoenix, AZ, 2015.
- [5] A. Joksimović, S. Duplaa, Y. Bousquet, X. Carbonneau, and N. Tantot. Local and global analysis of a variable pitch fan turbofan engine. In *European Turbomachinery Conference*, Stockholm, 2017.
- [6] IATA, DLR, and Georgia Tech. IATA Technology Roadmap. Technical report, IATA, 2013.
- [7] A. Boglietti, A. Cavagnino, A. Tenconi, and S. Vaschetto. Key design aspects of electrical machines for high-speed spindle applications. *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)*, pages 1735–1740, 2010.
- [8] L. Kort. Combined device of a ship's propeller enclosed by a nozzle, 1936.
- [9] L. Stipa. Experiments with Intubed Propellers. Technical report, NACA, Rome, 1932.
- [10] D. M. Black, H. S. Wainauski, and C. Rohrbach. Shrouded propellers - A comprehensive performance study. In *5th Annual Meeting and Technical Display*, Annual Meeting. AIAA, oct 1968.
- [11] W. Krüger. On wind tunnel tests and computations concerning the problem of shrouded propellers. Technical report, NACA, 1949.
- [12] J. L. Pereira. *Hover and wind-tunnel testing of shrouded rotors for improved micro air vehicle design*. Phd, University of Maryland, College Park, 2008.

- [13] K. W. Mort. Performance characteristics of a 4-foot- diameter ducted fan at zero angle of attack for several fan blade angles. Technical report, NASA, 1965.
- [14] R.-R. plc. *The Jet Engine*. Rolls-Royce, 1996.
- [15] A. H. Sacks and J. A. Burnell. Ducted propellers - a critical review of the state of the art. Technical report, Division of Hiller Aircraft Corporation, 1959.
- [16] E. Buckingham. On Physically Similar Systems : Illustrations of the Use of Dimensional Equations. *Physical Review*, 4(4) :345–376, oct 1914.
- [17] M. Drela and H. Youngren. Ducted Fan Design Code (DFDC). Consulté le 28 avril 2017. <http://web.mit.edu/drela/Public/web/dfdc/>.
- [18] M. Drela and H. Youngren. Axisymmetric Analysis and Design of Ducted Rotors. Technical report, 2005.