

# Homogénéisation en viscoélasticité non linéaire : estimations basées sur les premiers et seconds moments des champs

M. El Bachir SECK<sup>a</sup>, Mihail GĂRĂJEU<sup>a</sup>, Renaud MASSON<sup>b</sup>

a. Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA,  
4 impasse Nikola Tesla, 13453 Marseille, France

b. CEA, DEN, Département d'Étude des Combustibles,  
13108 Saint-Paul-Lez Durance, France

## Résumé :

*Cette étude est consacrée à la modélisation du comportement mécanique effectif d'un matériau hétérogène constitué d'une matrice isotrope dans laquelle sont distribuées de façon isotrope des inclusions. Les différentes phases constitutives du composite ont un comportement viscoélastique non linéaire. Différentes méthodes de linéarisation proposées dans la littérature sont investiguées afin d'estimer le comportement macroscopique ainsi que les moyennes par phase des champs de contrainte. Une nouvelle approche de linéarisation est proposée qui améliore les méthodes classiques (Sécant, Affine, ...) dans le cas d'un chargement induit par le gonflement des phases inclusionnaires.*

**Mots clefs : Homogénéisation, Viscoélasticité non linéaire, Linéarisation Sécante, Linéarisation Affine**

## 1 Introduction

Nous cherchons dans cette étude à modéliser le comportement mécanique de matériaux hétérogènes présentant une microstructure de type "inclusions-matrice" ayant un comportement viscoélastique non linéaire. Ces phases inclusionnaires peuvent être le siège de contractions ou de gonflements différentiels (dilatations thermiques, évolution physico-chimique, transformation de phase, effet de l'irradiation) dont nous voulons étudier ici les conséquences mécaniques en modélisant l'évolution des contraintes internes induites par ce chargement.

Grâce à la théorie de l'homogénéisation, ces contraintes internes sont correctement estimées quand le comportement des constituants est élastique linéaire (voir notamment [1]). Lorsque les conditions d'usage du matériau considéré induisent des mécanismes de déformation différée (type fluage) dépendant linéairement de la contrainte (viscoélasticité linéaire), les évolutions temporelles des contraintes internes peuvent encore être déterminées par homogénéisation (principe de correspondance, voir [2]), même dans le cas où les propriétés mécaniques dépendent du temps (cas "vieillissant", voir [3]). En revanche, si les déformations élastiques ne peuvent toujours pas être négligées et que les vitesses de déformation de fluage dépendent non linéairement de la contrainte (comportement viscoélastique non linéaire), la détermination de ces évolutions temporelles reste une question ouverte.

A l'instar de [4], l'approche proposée consiste à se ramener à un comportement (viscoélastique) linéaire en linéarisant la vitesse de déformation de fluage autour d'états de contrainte homogènes par phase. Cette démarche générale est rappelée en section 2. Pour en simplifier la présentation, cette démarche est formulée dans le cas d'un matériau biphasé mais peut-être facilement étendue au cas où il y'a plusieurs phases inclusionnaires.

La méthode de linéarisation employée ainsi que le choix de ces contraintes homogènes par phase s'avérant critiques vis-à-vis des capacités prédictives du modèle ainsi construit, nous passons en revue différentes approches en section 3, ce qui nous conduit à proposer une modélisation alternative. Les estimations obtenues avec ces différentes approches sont alors comparées à une solution de référence dans le cas d'un chargement de type "gonflement différentiel" (section 4), situation qui montre très clairement les avantages de l'alternative proposée.

## 2 Présentation du problème

On considère un matériau hétérogène occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  constitué d'une phase matricielle contenant une distribution isotrope d'une phase inclusionnaire. Les phases ont un comportement viscoélastique non linéaire (compressibilité purement élastique). Le composite est soumis à des conditions de contrainte homogène sur le bord extérieur du domaine  $\Omega$  :  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  sur  $\partial\Omega$  où  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$  désigne la contrainte macroscopique égale à la moyenne dans le volume du champ de contraintes locales. La résolution du problème à l'échelle microscopique sur l'intervalle de temps  $[0; T]$  consiste à déterminer les champs mécaniques solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3\kappa_e^{(r)}} \dot{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) + \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{0m}^{(r)}(t) \quad , \quad r = 1, 2 \\ \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

Les scalaires  $\kappa_e^{(r)}$  et  $\mu_e^{(r)}$  représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement élastiques des différentes phases,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{0m}^{(1)}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{0m}^{(2)}$  caractérisent les vitesses de déformation libre dans la matrice et les inclusions respectivement. Les champs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont décomposés selon leurs parties sphériques ( $\varepsilon_m \boldsymbol{\delta}$ ,  $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$ ) et déviatoriques ( $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$ ) :

$$\sigma_m = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad , \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \quad , \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \boldsymbol{\delta}. \quad (2)$$

$\boldsymbol{\delta}$  est un tenseur d'identité d'ordre deux. La vitesse de déformation visqueuse  $\dot{\mathbf{e}}_v$  dérive d'un potentiel non linéaire (en loi puissance).

$$\dot{\mathbf{e}}_v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial U_v^{(r)}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{3\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(r)}}{2\sigma_0^{(r)}} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}-1} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad \text{où} \quad U_v^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0^{(r)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{(r)}}{n^{(r)}+1} \left( \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0^{(r)}} \right)^{n^{(r)}+1}. \quad (3)$$

Les paramètres  $\dot{\varepsilon}_0^{(r)}$ ,  $\sigma_0^{(r)}$  et  $n^{(r)}$  sont des constantes caractérisant le comportement visqueux non linéaire des phases. Pour résoudre (1), nous proposons dans cette étude de linéariser la vitesse de déformation visqueuse selon :

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(r)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \dot{\varepsilon}_0^{(r)}. \quad (4)$$

La souplesse  $\mathbf{M}_v^{(r)}$  et la déformation libre  $\varepsilon_0^{(r)}$  sont des quantités homogènes par phase dont différents choix sont étudiés dans la section 3. A chaque instant le comportement linéarisé (relation (4)) est celui d'un matériau linéaire viscoélastique avec déformations libres (celles associées au chargement et celles apparaissant avec la linéarisation (4)).

Comme dans [4], le principe de correspondance de Mandel [2] est utilisé pour la résolution du problème. Le principe de Correspondance consiste à ramener le problème viscoélastique linéaire non vieillissant à un problème d'élasticité homogène par phase en utilisant la transformée de Laplace - Carson. Ce qui permet d'établir les moyennes par phase dans l'espace de Laplace - Carson par homogénéisation.

Les solutions du problème viscoélastique qui sont des fonctions temporelles sont alors obtenues en procédant à l'inversion de la transformée de Laplace-Carson. Nous utilisons plus loin le résultat suivant (voir (4)) pour la démonstration) : dans le cas isotrope et lorsque le modèle de Mori-Tanaka [1] est utilisé pour résoudre le problème d'élasticité hétérogène obtenu par la transformée de Laplace-Carson, l'inversion des propriétés effectives est exacte et équivalente à une formulation à variables internes.

### 3 Construction de différentes méthodes d'estimation

Dans cette section nous présentons différentes méthodes de linéarisation des lois de comportement non linéaire. Ces linéarisation s'effectuent autour des premiers et/ou seconds moments des champs de contrainte. A noter que contrairement aux approches proposées dans [5] ou [6] et comme le comportement local ne dérive pas d'un seul potentiel (comportement élastique non linéaire ou purement viscoplastique dans ces références), la réponse effective est donnée par la réponse du Milieu Linéaire de Comparaison défini à chaque pas de temps par linéarisation.

Pour toutes les approches considérées ici, nous conservons le choix d'une linéarisation Sécante classique basée sur le premier moment du champ de contrainte dans les inclusions et nous cherchons à améliorer cette linéarisation dans la matrice. Le module de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(2)}$  dans l'inclusion est alors donné par <sup>1</sup> :

$$\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}) = \frac{\sigma_0^{(2)}}{3\dot{\varepsilon}_0^{(2)}} \left( \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}}{\sigma_0^{(2)}} \right)^{1-n^{(2)}}, \quad \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t)} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(2)}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> $\bar{\mathbf{Y}}^{(r)} = \langle \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rangle^{(r)}$  désigne l'opération de moyenne volumique d'un champ  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  sur l'ensemble des points constituant la phase  $(r)$  de  $\Omega$ .

## 3.1 Schémas considérés

### 3.1.1 Linéarisation Sécante

Dans la méthode Sécante classique la vitesse de déformation  $\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}$  est nulle et le tenseur des souplesses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est isotrope. Ainsi la loi de comportement linéarisée (4) dans la matrice s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_e^{(r)}} \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_v^{(1)} : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_v^{(1)} = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K}, \quad (6)$$

où  $\mathbf{K}$  désigne un projecteur isotrope sur l'espace des tenseurs déviatoriques. Dans cette approche la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans la matrice pour le calcul du module de cisaillement visqueux est le premier moment des champs de contrainte.

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)} : \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}}. \quad (7)$$

Pour le cas de chargement considéré en section 4, la moyenne du déviateur des contraintes est nulle alors que le cisaillement dans la matrice est non nul. La linéarisation Sécante conduit donc à des réponses purement élastiques dans ce cas (module de cisaillement visqueux infini dans la matrice). Un autre choix pour la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est proposé par Ponte Castañeda [7] et Suquet [8]. Dans cette approche le module visqueux est évalué autour du second moment du champ de contrainte dans la matrice afin de mettre en évidence les hétérogénéités intraphases (modèle Sécant modifié).

$$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \bar{\bar{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}}. \quad (8)$$

Nous verrons que cette quantité est non nulle pour le chargement considéré en section 4, ce qui conduit à un module de cisaillement visqueux fini.

### 3.1.2 Linéarisation Affine améliorée

L'expression de la vitesse de déformation libre dans la matrice pour toutes les approches présentées dans ce paragraphe (approches par linéarisation affine) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} = \frac{\partial U_v^{(1)}}{\partial \mathbf{s}}(\bar{\mathbf{s}}^{(1)}) - \mathbf{M}_v^{(1)} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}. \quad (9)$$

Le tenseur des souplesses  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  pour une phase matricielle obéissant à une loi de type puissance peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \otimes \frac{\bar{\mathbf{s}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{K} - \mathbf{E}^{(1)}. \quad (10)$$

$\mathbf{E}^{(1)}$  est un projecteur sur l'espace engendré par la contrainte moyenne déviatorique  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(1)}$  un projecteur qui lui est orthogonal [5]. Dans le modèle Affine [9], la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est le premier moment des champs de contrainte. Or, comme expliqué plus haut, la moyenne déviatorique des contraintes dans la matrice est nulle dans le cas de chargement considéré en section 4. C'est pourquoi,

comme le Sécant classique, le modèle Affine donne des résultats purement élastiques dans ce cas particulier.

Afin de corriger ces estimations, Ponte Castañeda [6] utilise une approche variationnelle pour déterminer une nouvelle expression de la souplesse ainsi que de la contrainte de référence. Dans cette approche, la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est une fonction du premier moment du tenseur des contraintes et de la covariance (fluctuations) définie par :

$$\mathbf{C}_{\sigma}^{(1)} = \langle (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \otimes (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}) \rangle^{(1)}. \quad (11)$$

Dans cette approche la contrainte de référence  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  est notée  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  et elle est donnée par :

$$\left( \hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 = \left( \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 \pm 2 \sqrt{\frac{9}{4} \langle (\boldsymbol{s} : \bar{\boldsymbol{s}}^{(1)})^2 \rangle^{(1)} - \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^4} + \left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Par ailleurs, la souplesse dans la matrice a la forme :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2\lambda_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}, \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{E}^{(1)}. \quad (13)$$

Les modules de cisaillement visqueux  $\mu_v^{(1)}$  et  $\lambda_v^{(1)}$  sont déterminés en utilisant des conditions de stationnarités sur le potentiel effectif dans le cas purement visqueux :

$$\begin{cases} \frac{1}{3\mu_v^{(1)}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \\ \frac{1}{3\lambda_v^{(1)}} \left( \hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)} - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} \right) = \frac{\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)}}{\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}} \frac{\partial U_v}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) - \frac{\partial U_v}{\partial \sigma_{\text{eq}}^{(1)}}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) \end{cases} \quad (14)$$

où  $\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)}$  et  $\hat{\sigma}_{\perp}^{(1)}$  représentent respectivement les composantes de la contrainte de référence  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eq}}^{(1)}$  suivant les projecteurs  $\mathbf{E}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(1)}$  :

$$\hat{\sigma}_{\parallel}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \mathbf{E}^{(1)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}} \quad , \quad \hat{\sigma}_{\perp}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} : \mathbf{F}^{(1)} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}}. \quad (15)$$

Cependant cette approche de linéarisation appelée par la suite « Affine modifiée » dégénère en Sécant modifié dans le cas de contraintes déviatoriques moyennes nulles dans la matrice. Or nous verrons en section 4 que dans ce cas particulier le modèle Sécant modifié ne conduit pas à des estimations quantitativement correctes.

Dans cette étude, nous considérons à nouveau l'approche de linéarisation Affine (10) mais nous nous inspirons de [6] pour le choix de la contrainte de référence. Ainsi, le module de cisaillement visqueux dans la matrice  $\mu_v^{(1)}$  est à présent calculé autour de la contrainte de référence (12) définie par Ponte Castañeda [6],  $\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$ . L'approche ainsi obtenue est appelée par la suite « Affine amélioré ».

## 3.2 Calcul des champs moyens par phase

Nous considérons dans cette section le cas où les deux phases ont les mêmes propriétés élastiques ( $\kappa_e^{(1)} = \kappa_e^{(2)} = \kappa_e$  et  $\mu_e^{(1)} = \mu_e^{(2)} = \mu_e$ ) et nous utilisons le modèle Mori-Tanaka [1] pour estimer le comportement effectif du Milieu Linéaire de Comparaison ainsi que les moyennes par phase.

### 3.2.1 Cas des approches Sécantes

Dans les modèles Sécants classique et modifié les souplesses dans les phases sont isotropes tandis que les inclusions sont distribuées de façon isotrope (forme sphérique de l'inclusion dans le problème d'Eshelby). Dans ce cas et comme expliqué en section 2 (voir aussi [3]), le comportement effectif déduit du principe de correspondance et du modèle de Mori-Tanaka est exactement défini par la loi à variables internes suivante :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m(t) = \frac{1}{3\kappa_e} \bar{\sigma}_m(t) + \bar{\varepsilon}_{0m}(t) \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{2\mu_e} \bar{\mathbf{s}}(t) + \sum_{j=1}^3 \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) \end{cases} \quad (16)$$

$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1^d, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2^d, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3^d$  sont des variables internes tensorielles caractéristiques des déformations visqueuses déviatoriques. Ces variables internes vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}_j^d(t) + \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_j^d} \frac{\mu_{\bar{\tau}_j^d}}{\mu_e} \bar{\mathbf{e}}(t) \quad , \quad 1 \leq j \leq 3 \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^d(0) = 0. \quad (17)$$

Ces variables internes sont purement déviatoriques. Les coefficients  $\bar{\tau}_j^d$  et  $\mu_{\bar{\tau}_j^d}$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) dépendent des propriétés mécaniques des phases ainsi que de leurs fractions volumiques (voir [3] pour leurs expressions détaillées).  $\bar{\varepsilon}_{0m}(t)$  représente le gonflement effectif dont l'évolution temporelle est donnée par (voir annexe A) :

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) = c^{(1)} \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) + c^{(2)} \varepsilon_{0m}^{(2)}(t). \quad (18)$$

#### • Moyennes déviatoriques

Dans ce cas biphasé (voir [3]), les contraintes moyennes déviatoriques dans la matrice  $\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)$  et dans l'inclusion  $\bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t)$  sont déterminées en prenant les moyennes par phase de la loi de comportement dans (6) et en utilisant les relations de moyennes  $c^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}(t) + c^{(2)} \mathbf{e}^{(2)}(t) = \bar{\mathbf{e}}(t)$  et  $c^{(1)} \mathbf{s}^{(1)}(t) + c^{(2)} \mathbf{s}^{(2)}(t) = \bar{\mathbf{s}}(t)$ . Les expressions analytiques de ces moyennes déviatoriques par phase s'écrivent

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} - \frac{1}{\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \right) \right] \end{cases} \quad (19)$$

#### • Moyennes sphériques

Les moyennes hydrostatiques par phase ne peuvent être établies aussi facilement que celles relatives au déviateur des contraintes en raison de la compressibilité élastique qui est choisie uniforme ici. Les équations différentielles, dont ces moyennes hydrostatiques par phase sont solutions, sont données par

le système suivant (voir annexe A).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\delta\sigma_m^{(1)}(t)) + \frac{1}{\tau_\gamma}(\delta\sigma_m^{(1)}(t)) = \frac{3c_2}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)}(\dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t)) \\ \frac{d}{dt}(\delta\sigma_m^{(2)}(t)) + \frac{1}{\tau_\gamma}(\delta\sigma_m^{(2)}(t)) = \frac{3c_1}{\left(\frac{1}{\kappa_e} + \frac{3}{4\mu_e}\right)}(\dot{\varepsilon}_{0m}^{(1)}(t) - \dot{\varepsilon}_{0m}^{(2)}(t)) \end{array} \right. \quad (20)$$

où  $\delta\sigma_m^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ) désigne l'écart des moyennes de contraintes hydrostatiques par phase à la contrainte macroscopique sphérique ( $\delta\sigma_m^{(r)}(t) = \sigma_m^{(r)}(t) - \bar{\sigma}_m(t)$ ) et  $\tau_\gamma$  le temps caractéristique

$$\tau_\gamma = \left( \frac{4}{3\kappa_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \mu_v^{(1)}(\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}). \quad (21)$$

$\check{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  étant défini par (7) dans le cas du modèle Sécant classique ou (8) dans le cas Sécant modifié.

### • Évolutions temporelles des premiers et seconds moments

Le second moment des champs de contrainte dans cette méthode de linéarisation Sécante s'écrit

$$\left( \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) \right)^2 = \frac{3}{2} S_1(t) \quad \text{avec} \quad S_1(t) = \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}. \quad (22)$$

Pour déterminer l'évolution temporelle de  $S_1(t)$ , nous reprenons la méthode proposée dans [1] dans le cas incompressible. Cette méthode consiste à utiliser le lemme de Hill [10] et la loi de comportement linéarisée (6). Comme dans [11], nous remarquons que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une contrainte déviatorique homogène dans l'inclusion. Dans le cas compressible considéré ici, nous supposons en outre que les contraintes sphériques sont homogènes dans les deux phases de sorte que le lemme de Hill conduit à :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(S_1)} S_1(t) = M(t), \quad (23)$$

le second membre  $M(t)$  de cette équation différentielle étant une fonction donnée par :

$$M(t) = \frac{1}{c^{(1)}} \dot{\bar{\varepsilon}}(t) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \frac{c^{(2)}}{c^{(1)}} \left( \frac{1}{2\mu_e} \dot{\bar{\mathbf{s}}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(2)}(\bar{\mathbf{s}}^{(2)})} \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) \right) - \sum_{I=1}^2 \frac{c_I}{c_1} \left( \frac{1}{\kappa_e} \dot{\sigma}_{Im}(t) \sigma_{Im}(t) + 3\sigma_{Im}(t) \dot{\varepsilon}_{0m}^{(I)}(t) \right). \quad (24)$$

A noter que le comportement effectif (équations (16) à (18)) dépend des modules sécants des deux phases et donc des évolutions de la norme équivalente de la moyenne des contraintes dans les inclusions ainsi que dans la matrice (Sécant classique) ou du moment d'ordre deux dans la matrice (Sécant modifié), évolutions elles-mêmes données par les relations (19) à (24). A chaque instant, on doit donc résoudre un problème non linéaire dont les deux inconnus scalaires sont à chaque instant  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}(t)$  ainsi que  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t)$  (Sécant classique) ou  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t)$  (Sécant modifié).

### 3.2.2 Cas de l’Affine amélioré

Dans ce cas, la souplesse dans la matrice  $\mathbf{M}_v^{(1)}$  est anisotrope. Ainsi le comportement macroscopique du Milieu Linéaire de Comparaison est anisotrope ce qui alourdit la résolution, notamment l’inversion de la transformée de Laplace-Carson. Le comportement effectif peut toujours être représenté par une loi à variables internes mais l’inversion de la transformée de Laplace-Carson n’est plus exacte mais approchée (voir annexe B). De même, la forme générale des évolutions des moyennes des contraintes hydrostatiques ne peut être déterminée si simplement. En revanche, comme la moyenne de la vitesse de déformation déviatorique est liée à la moyenne des contraintes déviatoriques par un tenseur isotrope  $\mathbf{M}^{(1)}$  défini par :

$$\mathbf{M}^{(1)} = \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}} \mathbf{K}, \quad (25)$$

on peut utiliser la même méthode que précédemment pour déterminer les évolutions des moyennes déviatoriques dans chacune des phases :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = \frac{2}{c^{(1)}} \left( \frac{n^{(1)}}{\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} - \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)}\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} \right) \right] \\ \bar{\mathbf{s}}^{(2)}(t) = \frac{2}{c^{(2)}} \left( \frac{1}{\mu_v^{(2)}(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)})} - \frac{n^{(1)}}{\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \right)^{-1} \left[ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) - c^{(1)}\dot{\mathbf{e}}_0^{(1)}(t) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t)}{\mu_e} + \frac{n^{(1)}\bar{\mathbf{s}}(t)}{\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \right) \right] \end{cases} \quad (26)$$

Par ailleurs, en reprenant le lemme de Hill avec cette approche, l’évolution du second moment  $S_1(t)$  dans la matrice a la forme :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{1}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} S_1(t) + \frac{3(n^{(1)} - 1)}{4\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \frac{\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}}{(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2} + \dot{\mathbf{e}}_0^{(1)} : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) = M(t) \quad (27)$$

Dans le cas viscoélastique linéaire (Milieu Linéaire de Comparaison), le terme :

$$\frac{\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)}}{(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})^2}, \quad (28)$$

est difficile à calculer. On a donc recours à une approximation : on suppose qu’en tout point de la matrice et à chaque instant, le déviateur de la contrainte local est proportionnel à sa moyenne sur la matrice de sorte que :

$$\langle (\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t))^2 \rangle^{(1)} \simeq (\bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t) : \bar{\mathbf{s}}^{(1)}(t)) (\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \rangle^{(1)}) = \left( \frac{2}{3} \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t) \right)^2 \langle \sigma_{\text{eq}}^2(t) \rangle^{(1)}. \quad (29)$$

Finalement, le second moment des champs  $S_1(t)$  est solution de l’équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{4\mu_e} \dot{S}_1(t) + \frac{n}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} S_1(t) = M(t), \quad (30)$$



tandis que l'expression de la contrainte de référence dans la matrice en utilisant (29) conduit à :

$$\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)} = \sqrt{\left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 + \left(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}\right)^2 \left(1 \pm 2 \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}}} - 1}\right)}. \quad (31)$$

Comme pour les modèles Sécants, on doit résoudre à chaque instant un problème non linéaire dont les deux inconnues scalaires sont à présent  $\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{(2)}(t)$  ainsi que  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}(t)$ .

### 3.3 Synthèse

A ce stade nous disposons donc de cinq approches : celles s'appuyant sur une linéarisation Sécante (classique ou modifié) ou encore celles s'appuyant sur une linéarisation tangente autour des moyennes par phase (Affine) et deux variantes construites à partir de la relation (9) : Affine modifié (13), (11) et amélioré (10), (12).

## 4 Comparaison des différentes approches

### 4.1 Chargement considéré

Nous considérons ici le chargement particulier d'un gonflement différentiel : à l'instant initial une déformation libre est imposée instantanément (réponse élastique) aux inclusions puis maintenue constante, le bord étant libre de contrainte ( $\bar{\sigma}(t) = 0$ ). Lorsque la déformation imposée est positive la phase inclusionnaire est mise en compression tandis que le phénomène opposé se produit (mise en traction) en cas de déformation libre négative. Dans ce cas de chargement, la déformation macroscopique est purement sphérique ( $\bar{\epsilon}(t) = 0$ ) car, dû à l'isotropie,  $\bar{\sigma}(t)$  et  $\bar{\epsilon}(t)$  ont les mêmes espaces invariants. Les contraintes moyennes déviatorique par phase  $\bar{s}^{(1)}(t)$  et  $\bar{s}^{(2)}(t)$  sont également nulles à tout instant pour tous les modèles considérés (seconds membres de (19) ou (26) nuls).

Pour les faibles fractions volumiques d'inclusions considérées ici (de l'ordre de 10%), les interactions entre les inclusions sont faibles de sorte que la microstructure peut-être modélisée en utilisant le modèle de la sphère composite. Cette sphère composite possède un rayon intérieur  $a$  délimitant la phase inclusionnaire de la phase matricielle et un rayon extérieur  $b$  ( $c^{(2)} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ ) sur lequel est appliqué le chargement macroscopique. Si  $(r)$  désigne à présent le rayon dans le système de coordonnées sphériques attaché à cette sphère composite, le comportement mécanique des constituant est celui défini en section 2 pour la phase inclusionnaire ( $r \leq a$ ) ou matricielle ( $a \leq r \leq b$ ). Dans [12], des solutions exactes ont pu être établies pour le cas particulier de chargement considéré dans cette section (gonflement dans l'inclusion et bord extérieur libre de contrainte).

Le champ de déplacement est radial en raison de la symétrie du problème :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u(r, t)\mathbf{e}_r$ . Les équations d'équilibre et de compatibilité associées aux conditions à l'interface et au bord extérieur ont permis d'établir la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion :

$$\sigma_m^{(2)}(t) = - \int_a^b \frac{1}{r} \sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t) dr. \quad (32)$$

$\sigma_{\text{eq}}^{(1)}$  désignant la distribution de la contrainte équivalente dans la matrice, dont l'expression analytique

est donnée par ( $n^{(1)} > 1$ ) :

$$\sigma_{\text{eq}}^{(1)}(r, t) = \left[ \frac{3\mu_e \dot{\varepsilon}_0^{(1)} (n^{(1)} - 1)}{(\sigma_0^{(1)})^{n^{(1)}} \left(1 + \frac{4\mu_e}{3\kappa_e}\right)} t + \left( \frac{6\mu_e \varepsilon_{0m}^{(2)} a^3}{\left(1 + \frac{4\mu_e}{3\kappa_e}\right) r^3} \right)^{1-n^{(1)}} \right]^{\frac{1}{1-n^{(1)}}}. \quad (33)$$

## 4.2 Déclinaisons des approches proposées en section 3 pour ce cas de chargement

Parmi tous les modèles considérés en section 3, il n'en reste que trois qui sont indépendants lorsque les moyennes des déviateurs des contraintes sont nulles. En effet, dans ce cas particulier le modèle Sécant classique est équivalent au modèle Affine et le modèle Sécant modifié est équivalent au modèle Affine modifié. Par ailleurs, la vitesse de déformation libre  $\dot{\varepsilon}_0^{(1)}$  associée à la linéarisation dans le modèle « Affine améliorée » devient nulle tandis que la souplesse dans la matrice devient isotrope selon :

$$\mathbf{M}_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}) = \frac{n^{(1)}}{2\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})} \mathbf{K}. \quad (34)$$

Pour ce chargement particulier, les contraintes moyennes hydrostatiques par phase pour un Milieu Linéaire de Comparaison macroscopiquement isotrope sont similaires à celles établies à la relation (20) avec un temps de relaxation  $\tilde{\tau}_\gamma$  dans ce cas de chargement particulier qui est donné par la relation

$$\tilde{\tau}_\gamma = \left( \frac{4}{3\kappa_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \frac{\mu_v^{(1)}(\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)})}{n^{(1)}}. \quad (35)$$

Pour ce chargement particulier, ces relations (34) et (35) définissent complètement le modèle Affine amélioré. La contrainte de référence  $\hat{\sigma}_{\text{eq}}^{(1)}$  dans ce cas se réduit au second moment des champs de contrainte. Puisque le second moment des contraintes est identique pour toutes les approches proposées à  $t=0$  (solution élastique) et que  $n^{(1)} > 1$ , la pente à l'origine dans les équations du second moment (30) et des moyennes hydrostatiques (20) est plus forte avec le modèle Affine améliorée qu'avec le modèle Sécant modifié. On s'attend donc à une relaxation de contrainte plus rapide dans l'approche Affine améliorée.

## 4.3 Résultats

Pour le chargement considéré, les courbes représentatives des évolutions du second moment des contraintes ainsi que de la moyennes des contraintes hydrostatiques dans la matrice sont reportées sur les deux Figures qui suivent. Sur ces deux Figures, les estimations obtenues avec les trois approches détaillées ci-dessus sont comparées aux solutions de référence obtenues avec le modèle de la sphère composite [12]. Les données utilisées pour ces calculs sont les suivantes :  $c^{(2)} = 10^{-1}$ ,  $\mu_e = 70\text{GPa}$ ,  $\kappa_e = 161\text{GPa}$ ,  $\sigma_0^{(1)} = 1\text{GPa}$ ,  $\varepsilon_{0m}^{(2)} = 333.10^{-6}$ ,  $n^{(1)} = 3.67$ ,  $\dot{\varepsilon}_0^{(1)} = 1.2819 \text{ s}^{-1}$ .

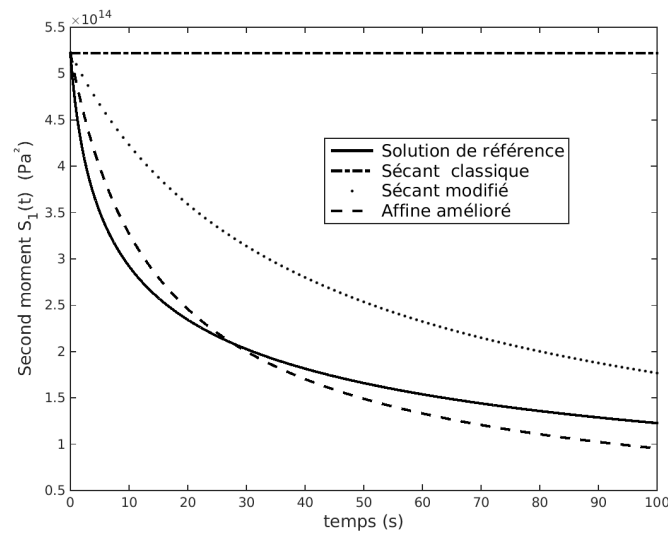


Figure 1: Évolution temporelle du second moment du champ de contraintes (22) dans la matrice pour différentes approches de linéarisation

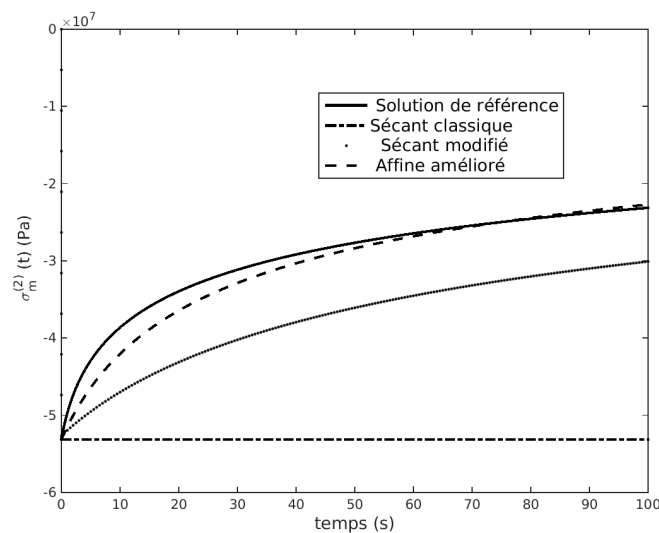


Figure 2: Évolution temporelle de la contrainte moyenne hydrostatique dans l'inclusion pour différentes approches de linéarisation

Nous observons sur la Figure 1 que la relaxation du second moment des contraintes dans la matrice est sous-estimée par l'approche Sécante modifiée, par comparaison à la solution de référence. En revanche, les prédictions de l'Affine amélioré sont proches de cette même solution de référence. Cette relaxation plus rapide obtenue avec l'Affine amélioré par comparaison au Sécant modifié est dû au préfacteur  $\frac{1}{n^{(1)}}$  sur le temps caractéristique (35). Pour la même raison, les moyennes hydrostatiques estimées avec l'Affine amélioré relaxent plus rapidement que celles prédites par la méthode de linéarisation Sécante modifiée (Figure 2).

Nous notons également que dans ce cas de chargement particulier (gonflement différentiel dans l'inclusion), la linéarisation Sécante classique autour du premier moment mène à des résultats irréalistes (module de cisaillement visqueux infini). Les estimations de ce modèle sont nettement améliorées en utilisant la

méthode de linéarisation s'appuyant sur le second moment des champs : il y'a bien relaxation des contraintes. Cependant la vitesse de relaxation reste trop faible par rapport à la solution de référence. Enfin, l'estimation de la relaxation de la moyenne des contraintes hydrostatiques dans les inclusions obtenue avec l'Affine améliorée est en bon accord avec les résultats de référence.

## 5 Conclusion

Le travail présenté dans cette étude est relatif à la modélisation micromécanique du comportement effectif de composites dont les phases possèdent un comportement viscoélastique non linéaire. La démarche d'homogénéisation, qui repose sur le principe de correspondance et le modèle de Mori-Tanaka, nous a permis d'estimer les propriétés effectives du Milieu Linéaire de Comparaison pour différentes méthodes de linéarisation proposées dans la littérature.

Dans le cas d'un chargement de type gonflements différentiels, les évolutions des contraintes internes dans les deux phases ont pu être obtenues avec les approches ainsi construites puis comparées à des résultats de référence (solution analytique - sphère composite).

Les modèles Sécant classique et Affine conduisent à des estimations irréalistes pour le cas particulier de chargement considéré. Ces estimations sont qualitativement améliorées en utilisant les modèles Sécant modifié (ou avec l'Affine modifié inspiré de l'approche [6]) mais sous-estiment les cinétiques de relaxation obtenues avec le modèle de référence. Parmi les cinq approches étudiées, seul le modèle « Affine amélioré » s'avère quantitativement correct ; les estimations obtenues avec ce modèle étant en bon accord avec les résultats de référence.

En perspectives, nous souhaitons étendre ce travail de comparaison au schéma de linéarisation proposé récemment par Ponte Castañeda [13]. Par ailleurs, des simulations en champ complet seraient également nécessaires pour confirmer les résultats de référence tout en élargissant les comparaisons à d'autres chargements.

## Remerciements

Les auteurs remercient le support financier du Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA), Aix Marseille Université (AMU) et le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) - contrat CEA-AMU-CNRS numéro 4251.

## References

- [1] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica.*, 21:571–574, 1973.
- [2] J. Mandel. Cours de mécanique des milieux continus. *Gauthier-Villars, Paris*, 1966.
- [3] J.-M. Ricaud and R. Masson. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media: Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *International Journal of Solids and Structures*, 46:1599–1606, 2009.
- [4] Masson R. and Zaoui A. Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, 47:1543–1568, 1999.
- [5] P. Ponte Castañeda. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6):827–862, 1996.
- [6] P. Ponte Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. I. Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50:737–757, 2002.
- [7] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39:45–71, 1991.
- [8] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte-Castañeda’s nonlinear variational procedure. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences Paris II*, 317:1512–1522, 1995.
- [9] Masson R., Bornert M., Suquet P., and Zaoui A. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, 48:1203–1227, 2000.
- [10] Hill. R. The essential of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 15:79–95, 1967.
- [11] Badulescu C., Lahellec N., and Suquet P. Field statistics in linear viscoelastic composites and polycrystals. *European journal of Mechanics - A/Solids* ., 49:329–344, 2015.
- [12] Seck M. El Bachir., Gărâjeu M., and R. Masson. Solutions exactes d’une sphère composite viscoélastique non linéaire sous chargement isotrope. *XIII ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, IASI*, 2016.
- [13] P. Ponte Castañeda. Stationary variational estimates for the effective response and field fluctuations in nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, 96:660–682, 2016.
- [14] Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *in Proc. US Nat. Congr. Appl. Mech. ASME 4th.*, 2:1075–1085, 1962.

## Annexes

### A Évolutions des moyennes par phase du champ de contrainte hydrostatique

Pour estimer les moyennes par phase des contraintes hydrostatiques, on considère un matériau biphasé viscoélastique linéaire constitué de phases dont le comportement est isotrope. La compressibilité du matériau est purement élastique et homogène ( $k_e$ ). En notant  $f^*(p)$  la transformée de Laplace-Carson d'une fonction du temps  $f(t)$  définie par :

$$f^*(p) = p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

La transformée de Laplace-Carson de la composante déviatorique de la fonction de relaxation est définie dans chaque phase par :

$$r = 1..2 : \quad \mu^{(r)*}(p) = \left( \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{p} \frac{1}{\mu_v^{(r)}} \right)^{-1}.$$

Les deux modules de cisaillement visqueux ( $\mu_v^{(1)}, \mu_v^{(2)}$ ) sont obtenus par linéarisation Sécante classique pour  $\mu_v^{(2)}$  tandis que  $\mu_v^{(1)}$  est défini par la relation (7) (modèle Sécant classique) ou (8) (modèle Sécant modifié).

On cherche tout d'abord l'estimation des évolutions temporelles des moyennes des contraintes hydrostatiques par phase obtenues avec le modèle de Mori-Tanaka dans le cas d'un chargement de gonflement libre : bords de  $\Omega$  libres de contrainte et chaque phase soumise à une histoire de déformation libre sphérique homogène par phase et notée  $\varepsilon_{0m}^{(r)}(t)$  ( $r = 1, 2$ ). Dans le cas d'une compressibilité homogène, le tenseur de localisation des contraintes (partie sphérique) est égal à l'unité de sorte que la déformation libre effective est donnée par simple moyenne des déformations libres locales :

$$\bar{\varepsilon}_{0m}(t) = c^{(1)} \varepsilon_{0m}^{(1)}(t) + c^{(2)} \varepsilon_{0m}^{(2)}(t). \quad (36)$$

Pour ce chargement, les transformées de Laplace-Carson des déformations (partie sphérique) dans chacune des phases sont estimées par le modèle de Mori-Tanaka selon :

$$r = 1..2 : \quad \varepsilon_m^{(r)*}(p) = \bar{\theta}_m^*(p) + \frac{3 k_e}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)} \varepsilon_{0m}^{(r)*}(p). \quad (37)$$

$\bar{\theta}_m^*(p)$  désignant la transformée de Laplace-Carson de la déformation macroscopique imposée à l'infini dans le problème de l'inclusion (sphérique) associé. Cette quantité associée au problème de l'inclusion est choisie telle que la moyenne des déformations est égale à la déformation macroscopique :

$$\bar{\varepsilon}_m^*(p) = c^{(1)} \varepsilon_m^{(1)*}(p) + c^{(2)} \varepsilon_m^{(2)*}(p). \quad (38)$$

Et comme nous avons vu que :  $\bar{\varepsilon}_m^*(p) = \bar{\varepsilon}_{0m}^*(p)$ , on obtient finalement :

$$\bar{\theta}_m^*(p) = \frac{4 \mu^{(1)*}(p)}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)} \left( c^{(1)} \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) + c^{(2)} \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) \right). \quad (39)$$

On peut ensuite calculer les transformées de Laplace-Carson des déformations (partie sphérique) de

chacune des phases et on en déduit par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma_m^{(1)*}(p) = \frac{12 k_e \mu^{(1)*}(p)}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)} c^{(2)} \left( \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) - \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) \right) \\ \sigma_m^{(2)*}(p) = \frac{12 k_e \mu^{(1)*}(p)}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)} c^{(1)} \left( \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) - \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) \right) \end{cases}$$

Si, en plus de ce chargement de gonflement libre, on impose sur  $\partial\Omega$  un historique de contrainte macroscopique (transformée de Laplace-Carson notée  $\bar{\sigma}^*(p)$ ), on obtient par superposition, par exemple pour la matrice :

$$\sigma_m^{(1)*}(p) = \bar{\sigma}^*(p) + \frac{12 k_e \mu^{(1)*}(p)}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)} c^{(2)} \left( \varepsilon_{0m}^{(2)*}(p) - \varepsilon_{0m}^{(1)*}(p) \right). \quad (40)$$

Le coefficient pondérateur

$$\frac{12 k_e \mu^{(1)*}(p)}{3 k_e + 4 \mu^{(1)*}(p)}, \quad (41)$$

étant une fraction rationnelle de la variable ( $p$ ), le retour aux fonctions du temps s'obtient aisément dans ce cas pour obtenir l'équation (20) avec :

$$\tau_\gamma = \left( \frac{4}{3\kappa_e} + \frac{1}{\mu_e} \right) \mu_v^{(1)}. \quad (42)$$

## B Loi d'évolution des variables internes dans le cas anisotrope

Dans le cas d'une souplesse visqueuse anisotrope, la transformée de Laplace-Carson de la fonction de fluage s'écrit :

$$r = 1, 2 : \quad \mathbf{M}^{(r)*}(p) = \mathbf{M}_e^{(r)} + \frac{1}{p} \mathbf{M}_v^{(r)}. \quad (43)$$

Pour ( $p$ ) donné, le module effectif obtenu par homogénéisation d'un composite biphasé hétérogène élastique de souplesses ( $\mathbf{M}^{(1)*}(p)$ ,  $\mathbf{M}^{(2)*}(p)$ ) et possédant la même microstructure que le matériau viscoélastique non linéaire étudié ici est noté  $\bar{\mathbf{L}}^*(p)$ . On décompose ce module en une série de Dirichlet

$$\bar{\mathbf{L}}^*(p) = \sum_{i=1}^{i=N_c} \bar{\mathbf{L}}_i \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_i}}, \quad (44)$$

avec ( $\bar{\tau}_1 \dots \bar{\tau}_{N_c}$ )  $N_c$  temps de relaxation et, en notant  $\bar{\mathbf{L}}_e$  le module élastique effectif, avec la condition :

$$\bar{\mathbf{L}}_e = \sum_{i=1}^{i=N_c} \bar{\mathbf{L}}_i. \quad (45)$$

Ce développement en série de Dirichlet peut dans certaines situations être exact. C'est par exemple le cas lorsque les souplesses tout comme la distribution spatiale des phases sont isotropes et que le modèle de Mori-Tanaka est utilisé pour estimer le module effectif. Dans le cas général, la relation (44) est une approximation, les coefficients  $i = 1..N_c$  :  $\bar{\mathbf{L}}_i$ ,  $\bar{\tau}_i$  pouvant être déterminées par la méthode proposée par [14].

Finalement, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^*(p) &= \bar{\mathbf{L}}^*(p) \bar{\varepsilon}^*(p) \\
 &= \sum_{i=1}^{i=N_c} \bar{\mathbf{L}}_i \frac{p}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_i}} \bar{\varepsilon}^*(p) \\
 &= \bar{\mathbf{L}}_e \left( \bar{\varepsilon}^*(p) - \underbrace{\sum_{i=1}^{i=N_c} \frac{1}{p + \frac{1}{\bar{\tau}_i}} \bar{\mathbf{L}}_e^{-1} \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\varepsilon}^*(p)}_{\bar{\alpha}_i^*(p)} \right).
 \end{aligned}$$

ou encore, de façon équivalente dans l'espace temporel :

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\mathbf{L}}_e \left( \bar{\varepsilon}(t) - \sum_{i=1}^{i=N_c} \bar{\alpha}_i(t) \right), \quad (46)$$

les  $N_c$  variables internes tensorielles  $\bar{\alpha}_i(t)$  étant définies par :

$$i = 1..N_c : \quad \dot{\bar{\alpha}}_i + \frac{1}{\bar{\tau}_i} \bar{\alpha}_i = \frac{1}{\bar{\tau}_i} \bar{\mathbf{L}}_e^{-1} \bar{\mathbf{L}}_i \bar{\varepsilon}(t) \quad , \quad \bar{\alpha}_i(0) = 0. \quad (47)$$

Ces expressions généralisent dans le cas anisotrope celles établies dans le cas isotrope (voir [4]).