

Analyse de bifurcation d'un écoulement incompressible et visqueux par un algorithme associant la méthode asymptotique numérique et une méthode des frontières immergées

A. Monnier*, Y.Guevel*, G. Girault^{†*}, J.M. Cadou*

* Univ. Bretagne Sud, FRE CNRS 3744, IRDL, F-56100 Lorient, France

[†] Centre de recherche, Ecoles de Saint-Cyr Coëtquidan, F-56381 Guer, France

e-mail : {antoine.monnier ;jean-marc.cadou ;gregory.girault}@univ-ubs.fr

Résumé :

La détection des instabilités en interaction fluide-structure est une problématique présente dans de nombreux domaines industriels ou de recherche. Cette problématique nécessite des méthodes et des outils de simulation numérique précis et robustes. Dans cette étude, on s'intéresse à l'analyse de bifurcation d'un écoulement incompressible en présence d'obstacles pour laquelle un algorithme spécifique est proposé. Celui-ci fait appel à une description de l'écoulement et des interfaces solide/fluide par une méthode des frontières immergées. Celle-ci est enrichie à l'aide de techniques de forçage discret et continu basées, respectivement, sur les méthodes de Ghost-Cell et de pénalisation des équations de Navier-Stokes. L'analyse de bifurcation est effectuée par la Méthode Asymptotique Numérique associant une discrétisation spatiale par éléments finis à des techniques de perturbation et de continuation. La précision et l'efficacité du solveur proposé sont évaluées par comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de la littérature. Ils démontrent le bien-fondé de la démarche adoptée.

Abstract :

Detection of instabilities in fluid-structure interaction is still a challenging task in many industrial or research fields. This requires accurate and robust numerical simulation methods and tools. In this study, we are interested in the bifurcation analysis of an incompressible flow in the presence of obstacles for which a specific algorithm is proposed. The latter uses a description of the flow and the fluid/solid interfaces by an immersed boundary method (IBM). The IBM is enriched using discrete and continuous forcing techniques based, respectively, on the Ghost-Cell method and penalization of the Navier-Stokes equations. Bifurcation analysis is performed using the Asymptotic Numerical Method associating a finite element spatial discretization with perturbation and continuation techniques. Precision and efficiency of the proposed solver are evaluated by comparing the results with those from the literature. They demonstrate the suitability of the presented approach.

Mots clefs : Méthode asymptotique numérique ; Méthode de frontières immergées ; Méthode de pénalisation ; Méthode Ghost-Cell ; Interaction fluide-structure ; Méthode Level-Set ; analyse numérique de bifurcation

1 Introduction

En mécanique des fluides, l'analyse de bifurcation reste une tâche difficile à mener. Elle consiste à déterminer les valeurs critiques d'un paramètre de charge (par exemple, le nombre de Reynolds Re) pour lesquelles l'écoulement stationnaire ou périodique en temps évolue significativement. Ainsi l'évolution du paramètre de charge peut conduire à l'apparition de solutions stationnaires multiples (bifurcation stationnaire) ou à la transition d'un état stationnaire vers un état périodique (bifurcation de Hopf).

D'un point de vue mathématique, il s'agit de déterminer la valeur critique du paramètre de charge pour laquelle la matrice jacobienne associée au problème possède une valeur propre complexe à partie réelle nulle (bifurcation stationnaire) ou purement imaginaire (bifurcation de Hopf). Pour cela, on peut réaliser un suivi des valeurs propres avec l'utilisation d'algorithmes spécifiques (par exemple : ARPACK [1]) qui consiste à calculer explicitement les valeurs propres de la matrice jacobienne pour un ensemble de valeurs du paramètre de charge. De tels calculs, pour des systèmes à grand nombre d'inconnues, nécessitent des temps de simulation extrêmement longs, voire prohibitifs. Une autre alternative consiste à faire appel aux algorithmes de continuation basés sur le suivi d'un indicateur de bifurcation. Pour toutes les valeurs du paramètre de charge, la solution du problème est calculée (par exemple avec l'algorithme de Newton-Raphson) et l'évolution de l'indicateur de bifurcation est obtenue.

En mécanique des fluides, la simulation numérique fait appel à des discrétisations spatiales qui peuvent s'avérer extrêmement difficiles à réaliser, surtout si la géométrie de l'écoulement est complexe, soit par sa forme, soit par la présence d'obstacles qui peuvent être fixes ou mobiles. Dans ce dernier cas, l'interaction fluide-structure doit être prise en compte. Des méthodes spécifiques sont nécessaires, telles que la méthode ALE ou les méthodes de frontières immergées doivent être utilisées.

Avec la méthode ALE, il est aisé de traduire naturellement les descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement adaptées, soit au fluide, soit au solide. Il est aussi facile de prendre en compte les conditions d'interface et aux limites. Cependant, si les transformations (déplacements et/ou déformations) du solide sont trop importantes, des distorsions de maillage sont à prévoir et des étapes de remaillage doivent être réalisées.

Les méthodes de frontières immergées reposent quant à elle sur une description purement eulérienne. La position du solide est renseignée par une méthode de suivi (marqueur lagrangien) ou de capture (méthode de la Level-Set). Ainsi, la méthode de la Level-Set consiste à introduire une variable supplémentaire (par exemple la distance signée du noeud à la frontière) dont l'évolution est obtenue par résolution d'une équation de transport, conjointement à la résolution des équations du mouvement du fluide. La présence de l'obstacle au sein du fluide est prise en compte soit par un traitement particulier du calcul des flux dans les cellules du maillage coupées par la frontière (méthode Cut-Cell), soit par l'ajout de termes de force au sein

des équations du mouvement du fluide. Dans ce cas, les termes de force de la première méthode citée peuvent être ajoutés avant ou après la discrétisation spatiale, on parle alors respectivement de forçage continu ou discret.

Les méthodes à forçage continu utilisant une interpolation classique pour calculer l'incompressibilité ne permettent pas la conservation de la masse et de l'énergie. Il faut donc changer l'opérateur de la divergence ou leur adjoindre des méthodes supplémentaires comme la Ghost-Cell (GC). Cette technique additionnelle permet, d'une part, de conserver la masse et l'énergie du fluide et, d'autre part, de décrire plus précisément les frontières immergées.

Parmi les méthodes de forçage continu, la méthode de la pénalisation permet de rendre un élément du maillage quasiment imperméable, en conservant un sens physique à l'équation. La méthode Ghost-Cell permet d'imposer rigoureusement les conditions d'interface sur les frontières immergées par interpolation spatiale des inconnues nodales en faisant la distinction entre nœuds solides et nœuds fluides.

Dans cette étude, on se propose de mener l'analyse de bifurcation d'un écoulement visqueux incompressible par l'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). La discrétisation spatiale du problème repose sur la méthode des éléments finis. La prise en compte d'obstacles au sein du fluide est réalisée par un algorithme spécifique. Celui-ci fait appel à une pénalisation des équations de Navier-Stokes et l'utilisation de la méthode Ghost-Cell, tandis que la position de la frontière est capturée par la méthode de la Level-Set.

Les éléments théoriques, les équations à résoudre ainsi que les techniques numériques utilisées sont présentées dans le paragraphe 2. Enfin, dans le paragraphe 3, les résultats numériques relatifs à des écoulements bidimensionnels dans une conduite et autour d'un cylindre à section carrée sont présentés. Ils permettent de conclure sur la pertinence de l'approche proposée.

2 Elements de théorie

2.1 Description de l'écoulement du fluide

Les lois fondamentales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible conduisent aux équations de Navier-Stokes (NS). Dans cette étude, la discrétisation spatiale repose sur la méthode des éléments finis. Ainsi, la formulation faible des équations de NS peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_D \quad (1)$$

Dans cette équation, \mathbf{U} désigne le vecteur inconnu $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)^T$ obtenu par concaténation des composantes du vecteur vitesse et de la pression. Le terme $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}})$ désigne l'opérateur de masse associé à l'accélération, $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ désigne l'opérateur linéaire associé aux termes de pression et diffusion visqueuse et $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ désigne l'opérateur quadratique de convection. Les conditions de Dirichlet imposées sur le contour du domaine conduisent à l'apparition du vecteur \mathbf{F}_D qui se comporte comme une force fictive [2, 3].

2.2 Prise en compte des obstacles au sein de l'écoulement

Les méthodes de frontières immergées (IBM) permettent de s'affranchir de la problématique du remaillage. Il faut cependant enrichir le modèle d'une nouvelle inconnue pour suivre l'évolution de la frontière, telle que le permet, par exemple, l'utilisation de la méthode de la Level-Set. Les IBM proposent d'ajouter une force pour prendre en compte l'imposition de conditions aux limites. Dans cette étude, le forçage continu et le forçage discret sont utilisés conjointement [4]. Les éléments solides sont pénalisés avant discrétisation par une force $\mathbf{f} = \frac{1}{K}(\mathbf{u}_{IB} - \mathbf{u})$ inversement proportionnelle au coefficient d'imperméabilité K [5, 6] qui fait tendre l'équation de NS vers une équation de Darcy pour modéliser l'écoulement du fluide dans le solide se déplaçant à une vitesse \mathbf{u}_{IB} .

Pour le forçage discret, la méthode La méthode GC permet d'imposer les conditions aux limites au lieu exact de la frontière. On impose aux nœuds fantômes du solide (c'est-à-dire, au sein d'un élément fini, les nœuds ayant au moins un nœud fluide dans son voisinage) une vitesse \mathbf{u} obtenue par interpolation spatiale des vitesses nodales purement fluides telle que les conditions d'interface soient respectées. Le problème à résoudre se présente sous la forme :

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_{IB}) - \lambda \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_f = 0 \quad (2)$$

Dans le cas d'obstacles immobiles, il faut calculer \mathbf{U}_{IB} afin de respecter la vitesse relative nulle et donc de respecter la condition de non-glissement à l'interface. L'opérateur linéaire \mathbf{L}_{χ_s} prend en compte les termes de pénalisation et \mathbf{F}_f désigne le vecteur pseudo-force créé par le forçage discret de la méthode GC.

2.3 Analyse numérique de bifurcation

La résolution du problème (2) repose sur l'utilisation de la MAN. Cette méthode consiste à rechercher la solution sous la forme d'une série polynomiale $\mathbf{X}(a) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^N a^i \mathbf{X}_i$ où $\mathbf{X} = \{\mathbf{U}, \lambda\}^T$ est le vecteur des inconnues, $a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1$ désigne le paramètre de chemin et N est l'ordre de troncature de la série. Ainsi, le problème non-linéaire initial se transforme en une séquence de N systèmes linéaires ayant le même opérateur $\mathbf{L}_t^{\mathbf{U}_0}$ évalué au point solution \mathbf{X}_0 . Le domaine de validité de la série est calculé pour la valeur $a_{max} = (\eta \|\mathbf{X}_1\| / \|\mathbf{X}_N\|)^{1/(N-1)}$ où η est une tolérance utilisateur (de l'ordre de 10^{-7} en général). Le procédé de continuation consiste à utiliser la solution obtenue en a_{max} au pas actuel (j) comme solution initiale pour le pas suivant ($j + 1$).

Pour l'analyse de bifurcation stationnaire, on utilise le critère défini par Cochelin et Médale [7]. Ce critère consiste, d'une part, à détecter l'émergence d'une série géométrique $\tilde{\mathbf{X}}$ au sein de la série polynomiale et, d'autre part, à effectuer un "nettoyage" pour obtenir une série "optimale" $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$. L'exploitation des informations contenues dans la série $\hat{\mathbf{X}}$ permet de calculer très efficacement la valeur critique λ_c du paramètre de charge ainsi que la solution \mathbf{U}_c à la bifurcation. Des techniques de branchement basées sur la MAN permettent la continuation des solutions post-bifurquées à partir du point de bifurcation [8, 9].

L'analyse de bifurcation de Hopf fait appel à l'algorithme défini dans [10]. Il consiste à rechercher la solution $\mathbf{U} = \mathbf{U}_s + \Delta\mathbf{U}$ où \mathbf{U}_s désigne la solution au problème stationnaire associé aux équations (2) et où $\Delta\mathbf{U}$ désigne la perturbation menant au régime périodique en temps définie par $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{V}e^{i\omega t}$. Dans cette expression \mathbf{V} désigne le mode de l'écoulement et ω la pulsation associée. Ainsi, partant d'une solution stationnaire définie par $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{U}_s, \lambda_s\}^T$, la recherche d'une bifurcation de Hopf consiste à résoudre l'équation $\mathbf{L}_t^{\mathbf{U}_s}(\mathbf{V}) + i\omega\mathbf{M}(\mathbf{V}) = 0$ munie de ses conditions aux limites.

Afin de résoudre ce problème, un indicateur de bifurcation est introduit. Celui-ci a la propriété de s'annuler à la bifurcation. Le problème devient alors : $\mathbf{L}_t^{\mathbf{U}_s}(\mathbf{V}) + i\omega\mathbf{M}(\mathbf{V}) = \mu\mathbf{F}^{\text{rnd}}$ où μ est l'indicateur et \mathbf{F}^{rnd} est un vecteur aléatoire. L'utilisation de la MAN permet d'obtenir par continuation l'évolution de la courbe indicateur μ en fonction de la pulsation ω .

Cet indicateur devant être calculé pour une solution stationnaire $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{U}_s, \lambda_s\}^T$ et le coût de calcul associé à cet indicateur étant élevé, on adjoint au calcul de l'indicateur un algorithme de Newton. Ainsi, les minimas de l'indicateur sont sélectionnés et servent de valeurs initiales pour l'algorithme de Newton. Les études [10, 11] montrent que les minimas de l'indicateur permettent à l'algorithme de Newton de converger et d'obtenir la pulsation ω_H et la solution \mathbf{U}_H au point de bifurcation.

3 Validation numérique

L'ensemble des simulations repose sur des maillages à 57 156 éléments finis (EF) soit 462 122 degrés de libertés (DDL). Les éléments finis retenus sont des quadrangles à 9 noeuds, à interpolation polynomiale quadratique en vitesse et linéaire en pression. Une technique de pénalisation est retenue afin de respecter la condition Inf-Sup d'incompressibilité [12, 13]. Sur la figure 1, on représente les maillages retenus pour cette étude, sur laquelle on distingue les frontières immergées qui définissent les parois de la conduite et du cylindre.

Des essais numériques ont été réalisés afin d'étudier la sensibilité de la méthodes par rapport aux valeurs des différents paramètres numériques. Ainsi, la pénalisation du solide doit être la plus grande possible tout en restant cohérente avec la pénalisation en pression de la condition Inf-Sup. Ainsi, la valeur d'imperméabilité $K = 10^{-6}$ semble être une valeur satisfaisante permettant la pénalisation du solide et la minimisation des flux de vitesse à travers l'obstacle.

La méthode de la Ghost-Cell repose sur l'interpolation des vitesses aux noeuds fluides pour calculer la vitesse à imposer aux noeuds fantômes. Le nombre de noeuds fantômes que l'on doit prendre en compte par élément a été étudié. Les résultats les plus précis sont obtenus quand tous les noeuds solides d'un élément fantôme sont utilisés.

L'algorithme proposé est appliqué pour l'analyse de bifurcation d'écoulements académiques largement étudiés dans la littérature. Ainsi, on analyse l'écoulement 2D dans une conduite présentant une expansion et une contraction [14]. Les résultats obtenus (bifurcations stationnaires primaire à $Re_{c1} = 41,8$ et secondaire à $Re_{c2} = 106$) sont cohérents avec les résultats de référence. Les méthodes de continuation permettent d'établir le diagramme de la figure 2.

L'écoulement autour d'un obstacle de forme carrée est analysé. On retrouve la bifurcation de Hopf avec des paramètres critiques $Re_H = 44,26$ et $St_H = 0,109$ en accord avec les résultats de la littérature. L'écoulement pour un Reynolds $Re > Re_H$ est présenté en figure 3.

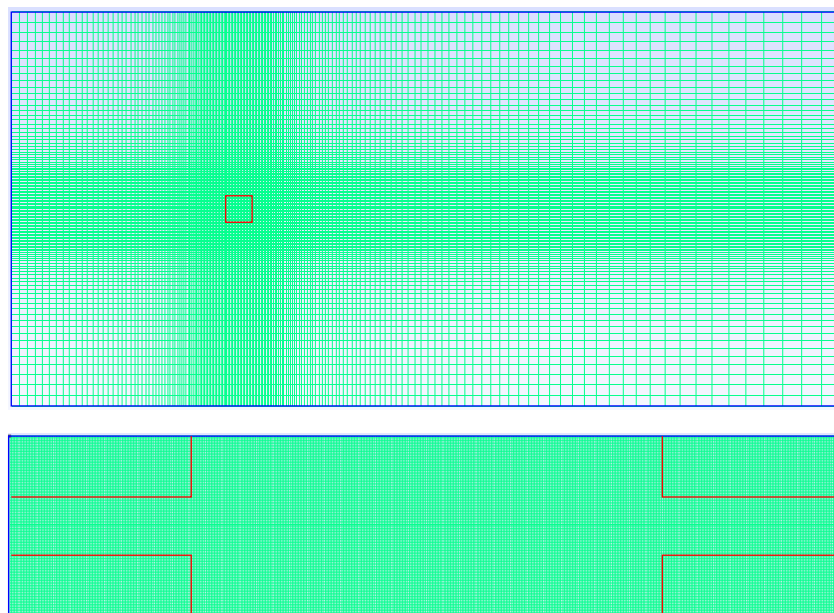


FIGURE 1 – Représentation du maillage (en vert) et des frontières immergées (en rouge) pour l'écoulement dans une conduite avec expansion/contraction en bas et autour d'un cylindre à section carré (en haut).

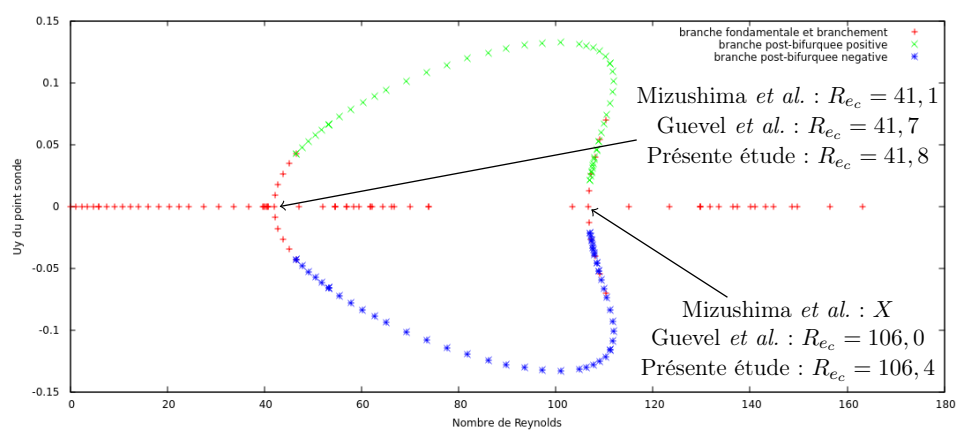


FIGURE 2 – Suivi des branches post-bifurquées dans une expansion soudaine suivi d'une contraction soudaine (ratio de $E = 3$ et $A = \frac{8}{3}$).

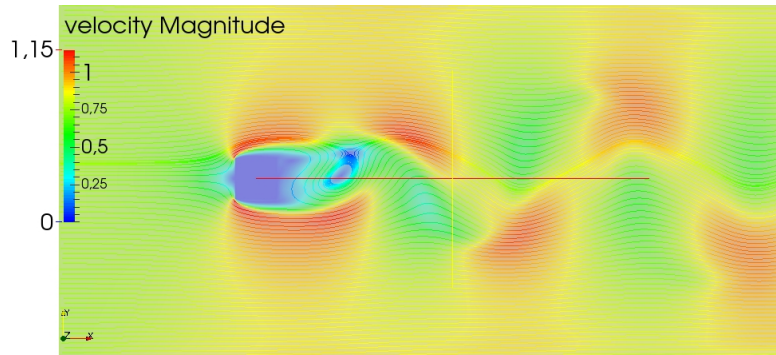


FIGURE 3 – solution post-bifurquée pour un cylindre carré défini par la Level-Set et par la méthode de Pénalisation ($K = 10^{-6}$) à $Re = 150 > Re_H$.

4 Conclusion et Perspectives

Cette étude propose l'analyse numérique de bifurcation d'un écoulement incompressible visqueux bidimensionnel. La solution proposée repose sur une description purement eulérienne de l'écoulement. La présence d'obstacles au sein du fluide est prise en compte grâce aux méthodes de frontières immergées et leur position est suivi par la méthode de la Level-Set. Afin d'améliorer la description, la méthode de Ghost-Cell est introduite en plus de la méthode de Pénalisation. L'analyse de bifurcation est réalisée par la Méthode Asymptotique Numérique.

Dans le cas où les obstacles sont immobiles, les résultats obtenus sont cohérents avec ceux issus de la littérature. Ainsi, les bifurcations stationnaires (primaire et secondaire) sont parfaitement déterminées dans le cas de l'écoulement dans une conduite avec expansion/contraction. L'analyse de bifurcation de Hopf est réalisée sur l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée. Les nombres de Reynolds et de Strouhal trouvés sont en parfait accord avec les résultats de référence. Ces résultats permettent de conclure au bien fondé de la méthode proposée.

Les résultats obtenus dans cette étude éclairent la sensibilité de la méthode par rapport aux paramètres numériques tels que les paramètres de discrétisation et de forçage. Des travaux sont en cours actuellement afin d'étendre l'analyse de bifurcation aux cas où les obstacles ne sont plus fixes et de pouvoir aborder la problématique des vibrations induites par des écoulements [15].

5 Remerciement

Les travaux de thèse dont certains points ont été présentés ci-dessus sont financés par la région Bretagne et par la DGA (Direction Générale de l'armement).

Références

- [1] R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen and C. Yang, ARPACK Users'guide : solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods, 1997
- [2] B. Cochelin, N. Damil, & M. Potier-Ferry, Méthode asymptotique numérique, Hermes Lavoissier, 2007
- [3] O. C. Zienkiewicz, & R. L. Taylor, The finite element method : solid mechanics (Vol. 2), Butterworth-heinemann, 2000

- [4] M. Bergmann, J. Hovnanian et A. Iollo. An accurate cartesian method for incompressible flows with moving boundaries, *Computational Physics*, 15.05 : 1266-1290, 2014
- [5] P. Angot, C.H. Bruneau et P. Fabrie, A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows, *Numerische Mathematik*, vol. 81, no 4, p. 497-520, 1999
- [6] E. Arquis et J. P. Caltagirone, Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle, *CR Acad. Sci. Paris II*, vol. 299, p. 1-4, 1984
- [7] B. Cochelin et M. Medale, Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of Asymptotic Numerical Method in the vicinity of bifurcations, *Journal of Computational Physics*, vol. 236, p. 594-607, 2013
- [8] M. Medale et B. Cochelin, High performance computations of steady-state bifurcations in 3D incompressible fluid flows by Asymptotic Numerical Method, *Journal of Computational Physics*, vol. 299, p. 581-596, *MLA*, 2015
- [9] Y. Guevel, G. Girault et J. M. Cadou, Numerical comparisons of high-order nonlinear solvers for the transient navier-stokes equations based on homotopy and perturbation techniques, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 289, p. 356-370, 2015
- [10] A. Brezillon, G. Girault et J.M. Cadou, A numerical algorithm coupling a bifurcating indicator and a direct method for the computation of Hopf bifurcation points in fluid mechanics, *Computers & Fluids*, vol. 39, no 7, p. 1226-1240, 2010
- [11] G. Girault, Y. Guevel et J.M. Cadou, An algorithm for the computation of multiple Hopf bifurcation points based on Padé approximants, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 68, no 9, p. 1189-1206, 2012
- [12] J.M. Cadou, M. Potier-Ferry, B. Cochelin, *et al.*, ANM for stationary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, no 4, p. 825-845, 2001
- [13] J. M. Cadou, M. Potier-Ferry et B. Cochelin, A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 25, no 2, p. 234-254, 2006
- [14] J. Mizushima, H. Okamoto et H. Yamaguchi, Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part, *Physics of Fluids*, vol. 8, no 11, p. 2933-2942, 1996
- [15] A. Placzek, J.F. Sigrist et A. Hamdouni, Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number : Forced and free oscillations, *Computers & Fluids*, vol. 38, no 1, p. 80-100, 2009