

Instabilités thermiques et hydrodynamiques des fluides Newtoniens ou viscoélastiques en configuration d'écoulement parallèle

Y. REQUILÉ^a, M.N. OUARZAZI^a, S. HIRATA^a

a. Laboratoire de mécanique de Lille FRE3723 Boulevard Paul Langevin 59655 Villeneuve d'Ascq
Cédex + lml@univ-lille1.fr

Résumé :

Ce travail réalisé dans le cadre d'une thèse porte sur l'influence de la dissipation visqueuse sur la stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'un fluide newtonien ou viscoélastique en configuration d'écoulement parallèle sous la forme d'un écoulement de Poiseuille ou de Couette.

Abstract :

This work is a part of a PhD thesis and is devoted to study the effect of viscous dissipation on linear and weakly non-linear stability of a newtonian or viscoelastic fluid in a parallel flow configuration in the form of a Poiseuille flow or a Couette flow.

Mots clefs : Stability, weakly non linear analysis, dissipation effect, parallel flow

1 Introduction

La question des instabilités susceptibles de se développer dans les fluides newtoniens en écoulements parallèles en présence d'un gradient de température déstabilisant a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années comme en témoigne l'excellente revue bibliographique présentée par Nicolas [1]. Depuis le travail fondateur de Gage et Reid [2], plusieurs aspects liés à la stabilité des écoulements parallèles ont été analysés. En particulier, les effets de la dissipation visqueuse sur la stabilité de ce type d'écoulement ont été étudiés récemment par Barletta et Nield [3]-[5].

La présente étude réalisée dans le cadre d'une thèse de Doctorat a pour but de déterminer l'influence de la dissipation visqueuse d'une part sur la stabilité linéaire des écoulements parallèles d'un fluide newtonien ou viscoélastique, et d'autre part sur le comportement faiblement non linéaire des fluides newtoniens. Deux types d'écoulements parallèles sont considérés. La première configuration concerne l'écoulement de Poiseuille induit par la présence d'un gradient horizontal de pression, alors que la deuxième configuration consiste en un écoulement de Couette plan, obtenu par la mise en mouvement des plaques horizontales délimitant le milieu fluide. Ces deux configurations sont souvent reconnues dans la littérature comme le problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) et celui de Rayleigh-Bénard-Couette (RBC) respectivement.

En l'absence d'un gradient de température vertical induit par des conditions de températures isothermes imposées sur les parois, les effets de la dissipation visqueuse sur les caractéristiques linéaires de l'instabilité ont été largement discutés dans [4] pour un écoulement de Poiseuille et dans [3] pour un écoulement de Couette. Dans les deux cas le travail portait sur un fluide newtonien. L'objectif de ce travail est l'extension de [4] et [3] pour un fluide newtonien ou viscoélastique avec prise en compte du gradient vertical de température induit par les parois horizontales.

2 Modélisation du problème et formulation mathématique

On se place dans une configuration d'écoulement entre deux plaques semi-infinies suivant les directions horizontales x et y , séparées par une hauteur h comme montré sur la figure 1. L'écoulement considéré peut être de Poiseuille ou de Couette. On applique une différence de température $\Delta T = T_1 - T_0$ entre les parois, et on suppose à priori $T_1 > T_0$.

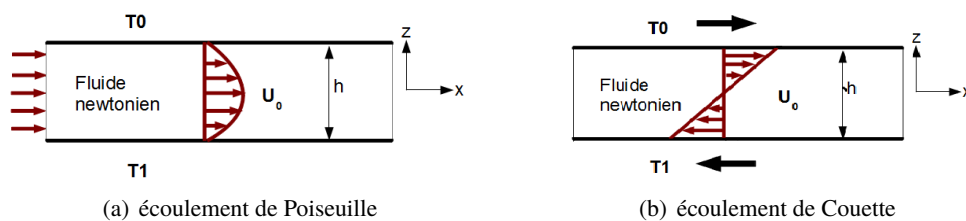


FIGURE 1 – Configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle

2.1 Équations générales

Les équations qui régissent ce problème sont l'équation de conservation de la masse (1), l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2), l'équation de conservation de l'énergie (3) et la loi de comportement pour un fluide viscoélastique obéissant au modèle d'Oldroyd-B (4) :

$$u_{i,i}^* = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* u_{i,j}^* \right) = -p_{,i} + \tau_{ij,j} + \rho_0 \alpha (T - T_1) \vec{g} \cdot \vec{e}_z \quad (2)$$

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} \right) = \lambda T_{,ii} + \Phi \quad (3)$$

$$\tau^{(i,j)} + \lambda_1^* \frac{\delta \tau^{(i,j)}}{\delta t} = \mu \left(\gamma^{(i,j)} + \lambda_2^* \frac{\delta \gamma^{(i,j)}}{\delta t} \right) \quad (4)$$

où $\frac{\delta}{\delta t}$ est la dérivée d'Oldroyd qui s'écrit :

$$\frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tau - (\nabla u)^T \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla u)$$

Dans ces équations ρ désigne la masse volumique du fluide considéré, C_v sa chaleur massique à volume constant.

Les paramètres viscoélastiques λ_1^* et λ_2^* représentent respectivement le temps de relaxation et le temps de retardation. Le cas d'un fluide Newtonien est retrouvé pour $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ alors que le modèle de Maxwell est obtenu pour $\lambda_2^* = 0$.

Dans l'équation (3) apparaît le terme de dissipation visqueuse $\Phi = \tau^{(i,j)}u_{i,j}$, où τ est le tenseur des contraintes de cisaillement du fluide considéré et \mathbf{u} sa vitesse.

Les conditions aux limites cinématiques dépendent de l'écoulement considéré (Poiseuille ou Couette) alors que les conditions de températures imposées aux parois isothermes :

$$T^* = T_0 \text{ en } z^* = \frac{h}{2} \quad T^* = T_1 \text{ en } z^* = -\frac{h}{2} \quad (5)$$

2.2 Solution de base

Afin de procéder à l'analyse de stabilité, on détermine une solution de base qui correspond à l'état de conduction, de sorte que la solution de base s'écrit en posant $\Gamma = \lambda_2^*/\lambda_1^*$:

$$u_b(z) = U_0 \cdot f(z)\vec{e}_z \quad T_b^*(z^*) - T_0 = (T_1 - T_0)\left(\frac{1}{2} - \frac{z^*}{h}\right) + \frac{\mu U_0^2}{\lambda} g(z^*)$$

$$\tau_b^{(1,3)} = \gamma_b^{(1,3)} = -8U_0 \frac{z^*}{h^2} \quad \tau_b^{(1,1)} = 128\mu U_0^2 \frac{z^{*2}}{h^4} \lambda_1^*(1 - \Gamma)$$

2.3 Adimensionnement

On adimensionne la solution les équations et la solution de base trouvée précédemment par les échelles de référence suivantes : longueur $z = \frac{z^*}{h}$, temps $t = \frac{\kappa}{h^2} t^*$, vitesse $u_b = \frac{h}{\kappa} u_b^*$, pression $P = \frac{h^2}{\rho_0 \kappa^2} P^*$, température $T = \frac{(T^* - T_1) Ra}{T_0 - T_1}$ où $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 C}$ est le coefficient de diffusivité thermique.

Ces échelles de références sont les mêmes que celles du problème de Rayleigh-Bénard classique, à l'exception de l'échelle de température $T = \frac{(T^* - T_1) Ra}{T_0 - T_1}$ au lieu de $T = \frac{(T^* - T_1)}{T_0 - T_1}$ habituellement. Cette nouvelle échelle de température est choisie de sorte à ne pas avoir de nombre de Rayleigh Ra au dénominateur dans les équations, celui-ci pouvant être amené à être nul.

Les équations adimensionnées s'écrivent donc :

$$u_{i,i} = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_i + Pr \cdot \tau_{ij,j} + Pr \cdot T \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} \right) = T_{,ii} + Ge \cdot \tau_{ij} u_{i,j} \quad (8)$$

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\delta \gamma_{ij}}{\delta t} \quad (9)$$

L'état de base adimensionné s'écrit :

$$u_b(z) = Pe * f(z) \quad (10)$$

$$T_b(z) = \left(\frac{1}{2} - z\right)Ra + Pe^2 Ge * g(z) \quad (11)$$

$$P_b(x, z) = \frac{1}{2}Ra * z(1 - z) - 8Pe * x + \frac{1}{3}z \left(1 - \frac{16}{5}z^4\right) Pe^2 Ge \quad (12)$$

$$\tau_b^{(1,3)} = -8Pe z \quad (13)$$

$$\tau_b^{(1,1)} = 128 \lambda_1 Pe^2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) z^2 \quad (14)$$

où pour $f(z)$ et $g(z)$ dépendent de la nature de l'écoulement :

— Poiseuille : $f(z) = (1 - 4z^2)$ $g(z) = \frac{1}{3}(1 - 16z^4)$

— Couette : $f(z) = 2z$ $g(z) = \frac{1}{2}(1 - 4z^2)$

Dans ces équations apparaissent les nombres sans dimension suivants :

- **Le nombre de Rayleigh**, qui représente le rapport entre les temps caractéristique des effets stabilisants et des effets déstabilisants :

$$Ra = \frac{\beta g h^3 (T_1 - T_0)}{\nu \kappa}$$

- **Le nombre de Péclet** qui est le produit entre le **nombre de Reynolds** qui est le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses : $Re = \frac{\rho u_b h}{\nu}$, et le **nombre de Prandtl** défini par le rapport entre les temps caractéristique de diffusion thermique et visqueuse : $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$:

$$Pe = Re * Pr = \frac{U_0 h}{\kappa}$$

- **Le nombre de Gebhart** qui représente l'intensité de la dissipation visqueuse :

$$Ge = \frac{\beta g h}{C_v}$$

Les conditions aux limites pour la température imposée deviennent :

$$T = 0 \text{ en } z = -\frac{1}{2} \quad T = Ra \text{ en } z = \frac{1}{2} \quad (15)$$

2.4 Analyse linéaire

On étudie le comportement du système face à une perturbation infinitésimal d'ordre ϵ de sorte que les variables s'écrivent sous la forme de l'état de base auquel on superpose la perturbation :

$$\begin{cases} T = T_b(z) + \epsilon \theta(x, y, z, t) \\ \vec{u} = u_b(z) \vec{e}_x + \epsilon \vec{v}(x, y, z, t) \\ P = P_b(x, z) + \epsilon p(x, y, z, t) \\ \tau^{(i,j)} = \tau_b^{(i,j)}(z) + \tau_p^{(i,j)}(x, y, z, t) \\ \gamma^{(i,j)} = \gamma_b^{(i,j)}(z) + \gamma_p^{(i,j)}(x, y, z, t) \end{cases}$$

On notera (u, v, w) les composantes de \vec{v} suivant (x, y, z) .

On remplace $\vec{u}, T, P, \tau^{(i,j)}$ et $\gamma^{(i,j)}$ dans les équations (6), (7), (8), (9); puis on linéarise ces équations c'est-à-dire que l'on ne retient que les termes d'ordre ϵ . Dans un premier temps les termes du second ordre ou plus sont négligés : on ne prend pas en compte les effets non linéaires.

Or pour des configurations expérimentales raisonnables dans un laboratoire, Ge est très petit et au mieux peut avoir une limite supérieure de l'ordre de 10^{-3} . En revanche Ge peut être de l'ordre de 1 pour des problèmes liés à la géophysique. En effet comme $Ge = \frac{\beta gh}{C_v}$, la hauteur h peut être de l'ordre du kilomètre en géophysique.

Sauf mention contraire, on utilisera l'approximation d'un nombre de Péclet grand, de telle sorte que le terme $GePe$ soit négligeable devant le terme $GePe^2$. Avec cette approximation la dissipation visqueuse sera exclusivement pilotée par le paramètre $\Lambda = GePe^2$.

3 Résultats de l'analyse linéaire pour un fluide newtonien et un fluide viscoélastique

On s'intéresse ici à l'influence de la dissipation visqueuse sur la stabilité linéaire d'un fluide newtonien ou viscoélastique. Sauf mention contraire les paramètres sont $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$. Les paramètres viscoélastiques prendront pour valeurs $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (cas newtonien), $\lambda_1 = 0.025$ (faiblement viscoélastique) ou $\lambda_1 = 0.1$ (fortement viscoélastique) et $\Gamma = 0.15$. Le cas fortement viscoélastique se distingue par une pulsation non nulle qui traduit des structures convectives oscillatoires [7]. Ces valeurs des paramètres viscoélastiques λ_1 et Γ correspondent aux cas étudiés dans [8] par Hirata et al. en l'absence de dissipation visqueuse.

Sous l'approximation d'un grand nombre de Péclet c'est le paramètre $\Lambda = Pe^2 Ge$ qui pilote la dissipation visqueuse. On s'intéresse dans un premier temps à l'influence de ce paramètre Λ sur le nombre de Rayleigh critique Ra_c et son nombre d'onde critique associé k_c pour les deux principaux types de structures convectives susceptibles de se présenter : les rouleaux longitudinaux (RL) dont l'axe est parallèle à l'écoulement et les rouleaux transversaux (RT) dont l'axe est perpendiculaire à l'écoulement. Dans notre configuration et en l'absence de dissipation visqueuse ce sont les rouleaux longitudinaux qui sont les plus déstabilisants, la présence d'un écoulement parallèle ayant un effet stabilisant sur les RT et n'affectant pas les RL que ce soit dans le cas newtonien [6] ou viscoélastique [8]. La figure 2

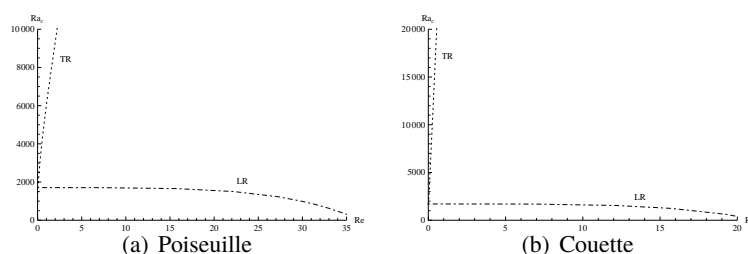


FIGURE 2 – Évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de Λ pour les RL et les RT dans le cas newtonien

montre qu'un d'un écoulement parallèle en présence de dissipation a une influence stabilisante sur les rouleaux longitudinaux, en revanche l'effet déstabilisant de l'écoulement sur les rouleaux transversaux

est prédominant sur l'effet stabilisant de la dissipation visqueuse. Ainsi dans la suite de cette étude on se focalisera exclusivement sur les rouleaux longitudinaux qui sont les plus déstabilisants pour le problème étudié. La figure 3 montre l'influence du paramètre Λ sur la stabilité des rouleaux longitudinaux

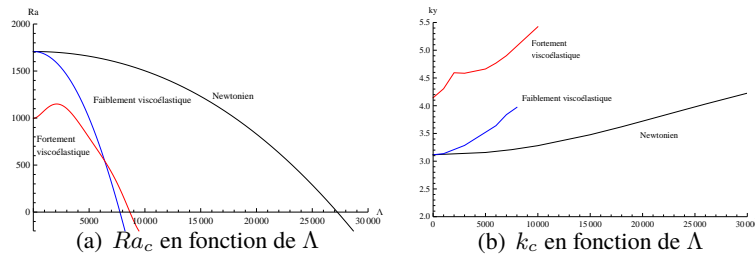


FIGURE 3 – Configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle

pour trois cas : le cas newtonien, un cas faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.025$ et $\Gamma = 0.15$) et un cas fortement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.15$). En l'absence de dissipation visqueuse le nombre de Rayleigh critique Ra_c est indépendant de l'intensité de l'écoulement. On constate que la dissipation visqueuse a dans les trois cas une influence déstabilisante sur le fluide. De plus pour une valeur assez grande du paramètre Λ on constate que la déstabilisation peut se produire même en absence de gradient déstabilisant de température, c'est-à-dire $Ra_c = 0$: la déstabilisation est alors d'origine purement hydrodynamique.

On compare le seuil de l'instabilité due à la dissipation visqueuse en l'absence de gradient de température déstabilisant à l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting pour un fluide newtonien en configuration de Poiseuille. La figure 4 montre que tant que le nombre de Prandtl est au moins de l'ordre de 10^{-2} , l'instabilité due à la dissipation visqueuse se déclenche bien avant l'instabilité de Tollmien-Schlichting et ce pour une valeur très raisonnable du nombre de Gebhart : $Ge = 10^{-4}$.

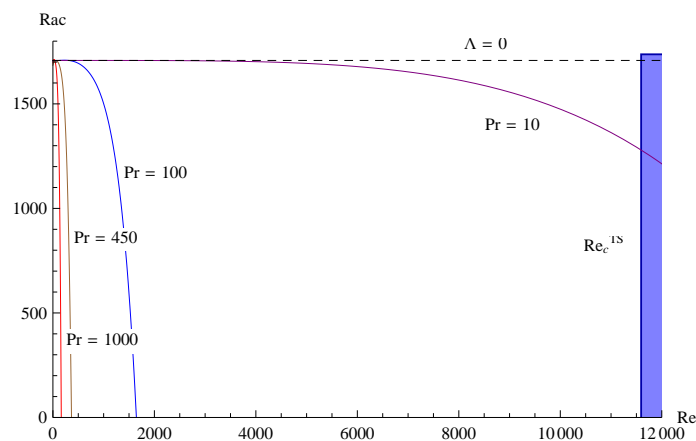


FIGURE 4 – Comparaison entre le nombre de Reynolds critique de l'instabilité hydrodynamique de Tollmien-Schlichting et l'instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse pour $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-6}$.

L'analyse énergétique, ici présentée pour un fluide newtonien montre que l'énergie d'origine thermique (induite par le gradient de température imposé) décroît tandis que l'énergie produite par la dissipation visqueuse croît. La somme de ces énergies normalisées est comme attendu égale à 1.

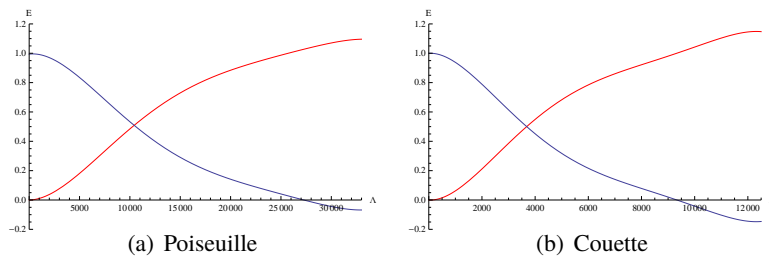


FIGURE 5 – Courbes des énergies normalisées d'origine thermique en bleu et due à la dissipation visqueuse en rouge, pour un fluide newtonien avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ dans des configurations de Couette et de Poiseuille

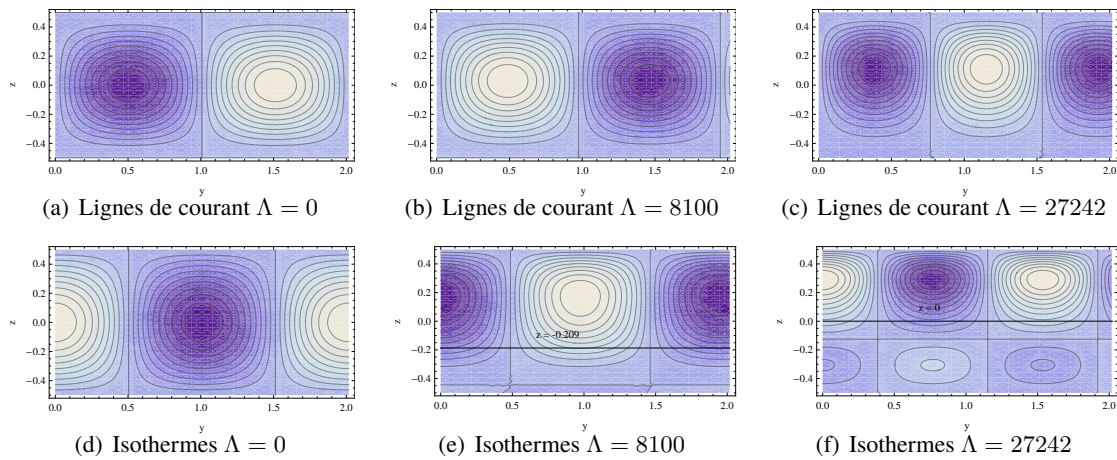


FIGURE 6 – Lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 0, 8100, 27242$ dans le cas de Poiseuille

Enfin le tracé des lignes de courant et des isothermes au seuil de l'instabilité permet de mieux comprendre les mécanismes physiques de l'instabilité.

Le tracé des isothermes 6 met en évidence une stratification du champ de température au seuil de l'instabilité, d'autant plus visible que la dissipation est importante. Cette stratification en une zone stable dans la partie inférieure et une zone instable dans la partie supérieure est une conséquence de la non symétrie du profil de température de base $T_b = (\frac{1}{2} - z)Ra + Pe^2 Ge * g(z)$.

4 Analyse faiblement non linéaire

Les non linéarités qui interviennent dans l'équation du mouvement pour le cas viscoélastique dépendent des coefficients de contrainte viscoélastique $\tau^{(2,2)}, \tau^{(2,3)}, \tau^{(3,3)}$ où le nombre de Péclet n'intervient pas.

Équation de l'énergie :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + Pe \cdot u_j T_{,j} \right) = T_{,ii} + Ge \cdot \tau^{(i,j)} u_{i,j} \quad (16)$$

Dans cette équation les non linéarités interviennent dans le terme $Ge \cdot \tau^{(i,j)} u_{i,j}$, les termes non linéaires seront noté avec un tilde :

$$Ge \cdot \tau^{(i,j)} u_{i,j} = Ge(\tau_b^{(1,3)} + \tau^{(1,3)} u_{1,3}^b + \tilde{\tau}^{(i,j)} \tilde{u}_{i,j}) = Ge(Pe f'(z)[u_{1,3} + \tau^{(1,3)}]) + Ge \cdot \tilde{\tau}^{(i,j)} \tilde{u}_{i,j}$$

Maintenant dans le cas d'un fluide newtonien le terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie, dans lequel apparaît un partie non linéaire s'écrit :

$$Ge \cdot \tau^{(i,j)} u_{i,j} = Ge(\tau_b^{(1,3)} + \tau^{(1,3)} u_{1,3}^b + \tilde{\tau}^{(i,j)} \tilde{u}_{i,j}) = Ge \cdot (Pef'(z)[u_{1,3} + u_{1,3}]) + Ge \cdot \tilde{\tau}^{(i,j)} \tilde{u}_{i,j} \quad (17)$$

Le terme non linéaire $Ge \cdot \tilde{\tau}^{(i,j)} \tilde{u}_{i,j}$ est de l'ordre de Ge , et donc négligeable par rapport aux autres termes si $Ge \ll 1$.

En faisant l'approximation d'un grand nombre de Péclet les équations du problème non linéaire pour un fluide newtonien s'écrivent :

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + Pe \cdot f(z) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \theta + \vec{\nabla}^2 w \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Pe \cdot f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{dT_b}{dz} = \vec{\nabla}^2 \theta \quad (19)$$

On définit l'opérateur linéaire L et le vecteur des termes non linéaires \vec{N} de sorte à écrire le problème non linéaire sous la forme $L\vec{V} = \vec{N}$, où \vec{V} est le vecteur des variables du problème (ici la fonction de courant ϕ et la température θ).

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^2 - Pr \vec{\nabla}^4 & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\frac{dT_b}{dz} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \end{pmatrix} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \end{pmatrix} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla}^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla}^2 \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix}$$

On se place au voisinage du seuil de l'instabilité. On écrit le nombre de Rayleigh (qui pilote l'apparition de l'instabilité) sous la forme $Ra = Rac + \epsilon^2 R_\alpha$ avec $\epsilon \ll 1$, on considère alors une nouvelle échelle de temps t telle que $T = \epsilon^2 t$. On notera qu'une telle formulation n'est valide que si Rac n'est pas proche de 0, c'est-à-dire pour un gradient de température imposé suffisamment grand.

On écrit l'opérateur linéaire L et le vecteur des termes non linéaires N comme la somme d'un état de base plus des perturbations d'ordre $\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3 \dots$ etc.

$$L = L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \epsilon^3 L_3 + \dots \quad (20)$$

$$N = N_0 + \epsilon N_1 + \epsilon^2 N_2 + \epsilon^3 N_3 + \dots \quad (21)$$

Pris au seuil de l'instabilité L_1 est nul car $\sigma = 0$, de même N_0 et N_1 sont nuls. Suivant l'ordre choisit le problème s'écrit donc :

Ordre ϵ : On est dans le cas du problème linéaire $L_0^c \vec{V}_1 = \vec{0}$, on obtient les seuils linéaires Rac, kc et le vecteur propre \vec{V}_1 .

Ordre ϵ^2 : $L_0 \vec{V}_2 = -L_1 \vec{V}_1 + \vec{N}_2$, on obtient le vecteur propre \vec{V}_2 .

Ordre ϵ^3 : $L_0 \vec{V}_3 = -L_1 \vec{V}_2 - L_2 \vec{V}_1 + \vec{N}_3$

Pour que le problème ait une solution il faut vérifier la condition de solvabilité $\langle SM3, \vec{V}_1 \rangle = 0$, où \vec{V}_1 est le vecteur propre solution du problème adjoint $\vec{L}_0^c = (\vec{L}_0^c)^T$ soit la transposée du conjugué.

On cherche à déterminer l'évolution de l'amplitude de la convection, que l'on notera A . Son évolution est gouvernée par l'équation d'amplitude :

$$\tau \frac{dA}{dt} = \mu R_2 A - \lambda |A|^2 A \quad (22)$$

dans laquelle τ, μ, λ sont des coefficients à déterminer et $R_2 = \frac{Ra - Ra_c}{\epsilon^2}$. Le coefficient λ détermine la nature de la bifurcation : si $\lambda > 0$ on a une bifurcation surcritique, si $\lambda < 0$ alors la bifurcation est dite sous-critique (phénomène d'hystérésis). En écrivant $A' = \epsilon A$, l'équation d'amplitude se réécrit :

$$\tau \frac{dA'}{dt} = \mu(Ra - Ra_c)A' - \lambda |A'|^2 A' \quad (23)$$

Cette équation est appelée équation de Ginzburg-Landau. La solution est stationnaire si $\frac{dA}{dt} = 0$, ce qui implique :

$$|A'|^2 = \frac{\mu(Ra - Ra_c)}{\lambda} \quad (24)$$

L'amplitude de la convection dépend donc du rapport $\frac{\mu}{\lambda}$.

5 Résultats de l'analyse faiblement non linéaire pour un fluide newtonien

On s'intéresse maintenant aux résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire pour un fluide newtonien. On détermine d'abord la nature de la bifurcation qui dépend du rapport des coefficients μ et λ déterminé à partir de l'équation de Ginzburg-Landau. Ce rapport détermine l'amplitude de la convection pour un nombre de Rayleigh fixé. La figure 7 montre que ce rapport est toujours positif et que le paramètre Λ doit prendre une valeur importante pour avoir une influence ici déstabilisante sur l'amplitude.

Les grandeurs présentant un intérêt particulier sont le flux conductif J_{cond} , le flux convectif J_{conv} et le nombre de Nusselt Nu qui quantifie le taux de transfert de chaleur par convection du système. Ces grandeurs sont définies comme suis :

$$J_{cond} = -\frac{dT_b}{dz} \quad \langle J_{conv} \rangle = \int_0^{\frac{2\pi}{kc}} w\theta dx - \int_0^{\frac{2\pi}{kc}} \frac{\partial\theta}{\partial z} dx \quad Nu = \frac{J_{cond} + J_{conv}}{J_{cond}} \quad (25)$$

La figure 8 montre que la dissipation visqueuse a pour effet d'augmenter le flux conductif et de réduire le flux convectif. Quand au nombre de Nusselt il est décroissant en fonction de Λ . La dissipation visqueuse a donc pour effet de réduire la taux de transfert de chaleur par convection.

Conclusion

L'analyse linéaire a mis en évidence le rôle déstabilisant de la dissipation visqueuse sur l'écoulement parallèle tant de Poiseuille que de Couette, et ce même en absence de gradient déstabilisant de température. Le tracé des isothermes et l'analyse énergétique montre que la transition d'une instabilité d'origine principalement thermique (due au gradient imposé de température) vers une instabilité principalement hydrodynamique (due à la dissipation visqueuse) se traduit par une stratification en zones stable et instable de l'écoulement. Enfin l'analyse faiblement non linéaire indique que la bifurcation est de nature

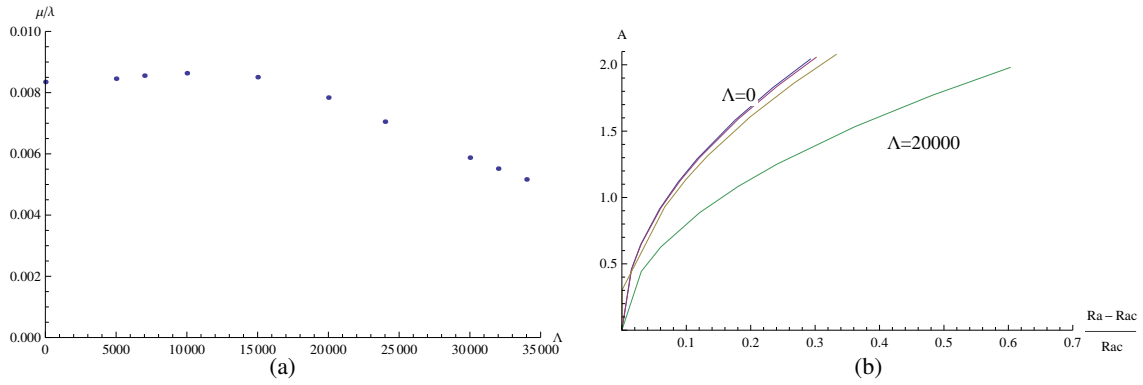


FIGURE 7 – Rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ en fonction de Λ (a) et amplitude A en fonction de $\frac{Ra - Ra_c}{Ra}$

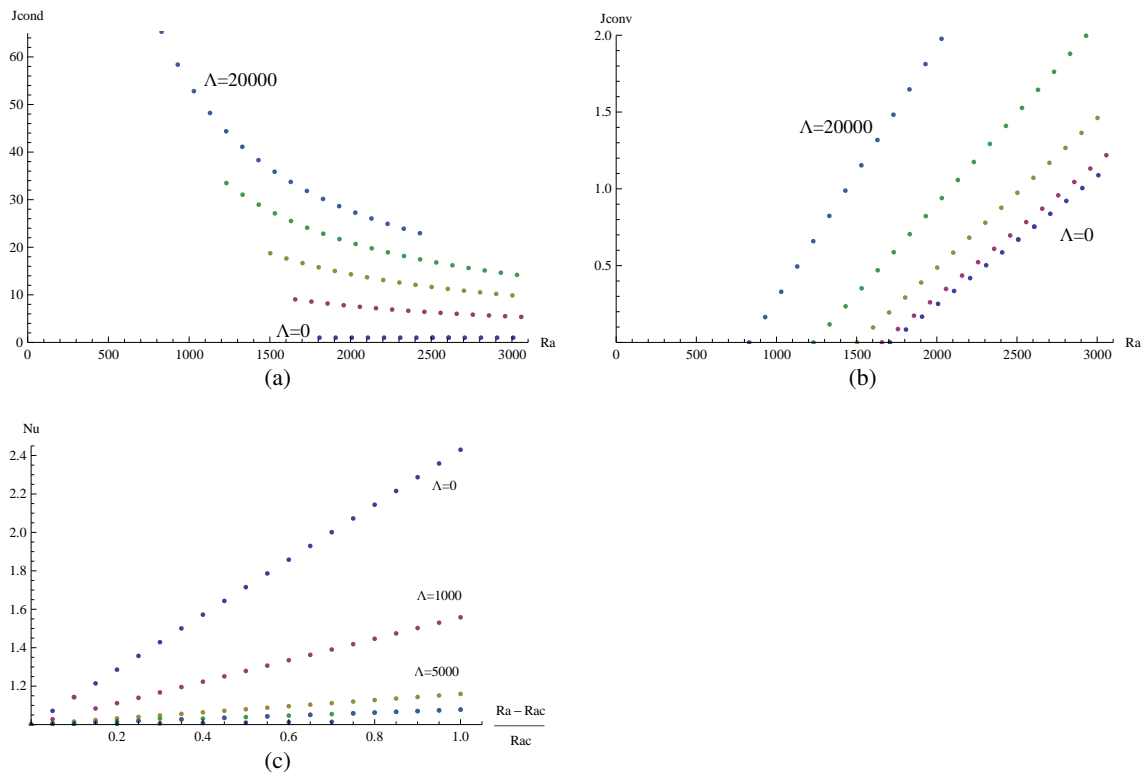


FIGURE 8 –

surcritique, la dissipation visqueuse réduisant l'amplitude de la convection ainsi que le nombre de Nusselt.

L'étude plus approfondie du cas viscoélastique constitue une piste de recherche intéressante, tant du point de vue linéaire que non linéaire. De même l'extension de l'analyse faiblement non linéaire au voisinage de $Ra_c = 0$ (gradient de température imposé nul) serait d'un grand intérêt pour la compréhension du mécanisme d'instabilité induit par la dissipation visqueuse.

Références

- [1] X. Nicolas, Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *International Journal of Thermal Science*, 41 (2002) 961–1016.
- [2] K.S. Gage, W.H. Reid The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1968 (33) 21–32
- [3] A. Barletta, D.A. Nield, Convection–dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 662 (2010) 544–558.
- [4] A. Barletta, D.A. Nield, On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel, *Journal of Fluid Mechanics*, 681 (2012) 499–514.
- [5] A. Barletta, On the thermal instability induced by viscous dissipation, *International journal of thermal science*, 88 (2015) 238–247.
- [6] P. Carrière, P.A. Monkewitz Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection, 1999 (384) 243–262
- [7] Z. Li, R. Khayat, Finite-amplitude Rayleigh-Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 529 (2005) 221–255
- [8] S.C. Hirata, L.S. de B. Alves, Delenda N., M.N. Ouarzazi, Convective and absolute instabilities in Rayleigh-Bénard-Poiseuille mixed convection for viscoelastic fluid, *Journal of fluid mechanics*, 765 (2015) 167–210.