

# Saturation de l'instabilité elliptique sous forme de turbulence d'ondes d'inertie

T. Le Reun<sup>a</sup>, B. Favier<sup>a</sup>, A.J. Barker<sup>b</sup>, M. Le Bars<sup>a</sup>

a. Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France

b. Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, UK

## Résumé :

*La déformation de marées couplée à de la rotation peut déstabiliser les intérieurs planétaires par instabilité elliptique, un mécanisme également observé dans les vortex étirés. Cette instabilité génère des écoulements turbulents composés d'ondes et de vortex géostrophiques d'amplitudes respectives variables, selon les paramètres et la géométrie considérés. Nous présentons une série de simulations numériques locales se basant sur la méthode dite de "shearing box" afin d'étudier les mécanismes de saturation de l'instabilité dans un régime encore jamais atteint. Grâce à l'introduction d'une friction d'Ekman sur la composante géostrophique de l'écoulement, nous sommes capables d'étudier la transition entre un régime dominé par les ondes d'inertie vers un régime dominé par les vortex géostrophiques. Lorsque la friction est faible, on observe une cascade inverse associée à la composante géostrophique de l'écoulement qui sature à l'échelle du domaine numérique. Pour une friction suffisamment grande, un régime très similaire à de la turbulence d'ondes d'inertie est observé et caractérisé pour la première fois.*

## Abstract :

*The combination of tidal deformations and rotation can destabilize planetary cores via elliptical instability, a mechanism also observed in localized strained vortices. It has been shown to generate turbulent flows composed of non-linearly interacting waves and strong columnar vortices with varying respective amplitudes, depending on control parameters and geometry. We present a suite of direct numerical simulations based on the so-called shearing-box approximation to investigate the saturation regime of the elliptical instability relevant for planetary applications. The main focus of our study concerns the transition from vortex-dominated to wave-dominated regimes. This is achieved by simulating the growth and saturation of the elliptical instability and adding frictional damping to the geostrophic component only, to mimic its interaction with boundaries. For weak friction, we recover the formation of geostrophic vortices saturating at the size of numerical domain. When friction is large enough, a wave-dominated regime that exhibits many signatures of inertial wave turbulence is observed and characterized for the first time.*

**Mots clefs : Fluides en rotation, Ondes inertielles, Turbulence, Instabilité elliptique**

## 1 Introduction

Les écoulements turbulents en rotation sont présents dans de nombreux systèmes géophysiques et industriels. En plus d'introduire une direction privilégiée, et donc de rendre le problème intrinsèquement anisotrope, la rotation induit un phénomène ondulatoire appelé ondes d'inertie. Il s'agit de la solution linéaire des équations de Navier-Stokes dans un repère tournant et dont la force de rappel est l'accélération de Coriolis. Depuis leur observation dans des fluides en rotation solide [1], de nombreuses études ont tenté de détecter leur présence dans un écoulement pleinement turbulent en rotation [2, 3, 4, 5]. En plus des ondes inertielles, la turbulence en rotation est également caractérisée par l'apparition de vortex géostrophiques, invariants le long de l'axe de rotation, et dont la génération et la saturation est un sujet de recherche récurrent du fait de leur ressemblance avec les écoulements océaniques et atmosphériques à grande échelle. La turbulence en rotation demeure ainsi un sujet d'étude fascinant du fait de l'interaction non-triviale entre plusieurs phénomènes physiques d'échelles spatiale et temporelle variables.

Dans ce contexte général, l'instabilité elliptique offre un cadre théorique particulièrement intéressant. Celle-ci se développe dans des écoulements dont les lignes de courant sont des ellipses dont les axes tournent à une vitesse différente de celle du fluide [6]. Depuis son étude dans le contexte de vortex cisailés, elle a également été invoquée afin d'expliquer la déstabilisation des noyaux des planètes déformées sous l'effet de marées [7, 8]. Le mécanisme fondamental à l'origine de l'instabilité est une résonance de deux ondes inertielles avec l'écoulement de base ayant des lignes de courant elliptiques. Bien que ce mécanisme de résonance soit bien caractérisé tant expérimentalement [9] que théoriquement [6], sa saturation non-linéaire reste mal comprise. En particulier, l'interaction subtile entre ondes inertielles et vortex géostrophiques est une fois encore au centre du mécanisme de saturation. Dans certaines expériences [10] et simulations numériques [11], l'émergence de vortex géostrophiques intenses inhibe l'interaction entre les ondes résonantes et l'écoulement de base elliptique. D'autres résultats obtenus notamment en géométrie ellipsoïdale dans le cadre de travaux géophysiques [12, 13] indiquent qu'au cours de la saturation turbulente, l'interaction entre ondes et écoulement de base peut être maintenue et donne lieu à une cascade d'ondes inertielles en interactions résonantes.

Dans cet article, nous proposons une série de simulations numériques locales de la saturation de l'instabilité elliptique, qui fait suite aux travaux de BARKER & LITHWICK [11]. En contrôlant l'amplitude de saturation des modes géostrophiques, reproduisant notamment l'effet de l'interaction avec des parois, nous sommes en mesure de reproduire qualitativement un grand nombre d'observations numériques et expérimentales. En particulier, nous caractérisons le régime où une cascade d'ondes inertielles s'établit.

## 2 Approche locale de l'instabilité elliptique

Nous nous intéressons à un écoulement de base  $\mathbf{U}_b$  de vorticité axiale uniforme  $2\Omega\mathbf{e}_z$ . Les lignes de courants sont déformées elliptiquement et le demi-grand axe tourne à une vitesse angulaire  $n$ , autour de la direction axiale également. Dans le repère tournant avec le fluide, et en choisissant  $\Omega^{-1}$  comme référence de temps, l'écoulement de base s'écrit :

$$\mathbf{U}_b = -\gamma\beta \begin{bmatrix} \sin(2\gamma t) & \cos(2\gamma t) & 0 \\ \cos(2\gamma t) & -\sin(2\gamma t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

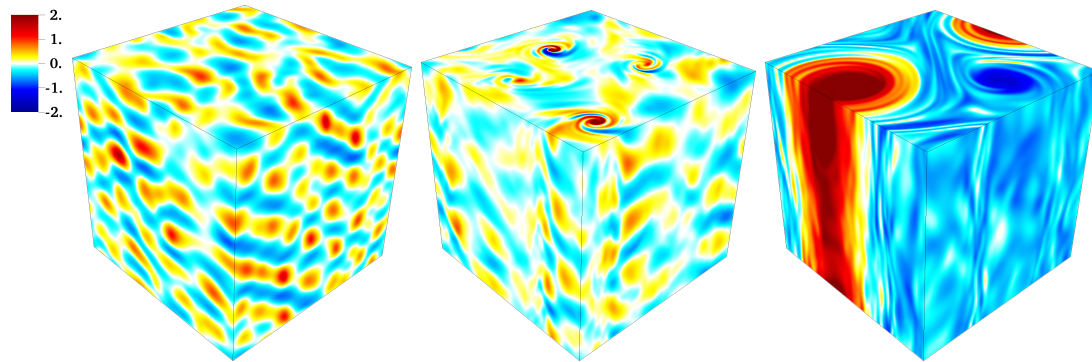


FIG. 1 – Composante verticale de la vorticité durant la phase exponentielle de croissance (gauche), lors de la saturation à temps courts (milieu) et à temps longs (droite).

où  $\gamma = (\Omega - n)/\Omega$  et  $\beta$  est l'ellipticité de la déformation des lignes de courants. Les perturbations  $\mathbf{u}$  qui se développent autour de cet écoulement de base sont régies par les équations suivantes :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla P + Ek \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

où  $P$  est une pression généralisée assurant l'incompressibilité de l'écoulement.  $Ek$  représente le nombre d'Ekman  $\nu/(L^2\Omega)$  avec  $\nu$  la viscosité cinématique et  $L$  une échelle spatiale de référence. Les conditions aux limites sont triplement périodiques, et le cisaillement résultant de l'écoulement de base est pris en compte par une approche de type "shearing box", les vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}(t)$  dépendant alors du temps. Les équations (2-3) sont résolues par le code SNOOPY initialement développé pour simuler la turbulence dans les disques protoplanétaires [14] et adapté par la suite au cas de l'instabilité elliptique [11]. Du fait de l'absence de parois rigides et des couches limites associées, il est plus facile de déstabiliser l'écoulement de base puisque seule la dissipation visqueuse en volume est présente. Il est ainsi possible de diminuer l'ellipticité des lignes de courant  $\beta$  tout en restant dans un régime turbulent.

### 3 Simulation classique et saturation géostrophique

Les équations (2-3) sont résolues pour les paramètres suivants :  $\beta = 5 \times 10^{-2}$ ,  $\gamma = 3/2$  et  $E = 10^{-5}$  avec une résolution de 256 modes de Fourier dans chaque direction. En initialisant la simulation par un bruit blanc, on observe initialement la phase exponentielle de l'instabilité, voir la Figure 1 à gauche, dont le taux de croissance est consistant avec une approche locale de type WKB. Les ondes résonant avec l'écoulement de base ont un nombre d'onde  $kL/(2\pi)$  qui est de l'ordre de 6. La saturation non-linéaire de l'instabilité donne ensuite lieu à une croissance rapide du mode géostrophique (écoulement invariant dans la direction verticale de la rotation dans notre cas). Ces structures tourbillonnaires alignées avec l'axe de rotation croissent en amplitude et en taille par un mécanisme de cascade inverse jusqu'à saturation lorsqu'elles atteignent la taille arbitraire du domaine numérique (voir Figure 1).

L'énergie des modes en fonction de  $\theta$ , l'angle formé par l'axe de rotation et le vecteur d'onde, et  $\omega$ , la fréquence, permet de comprendre cette transition. La Figure 2 montre que l'énergie reste proche de la relation de dispersion des ondes inertielle  $\omega = 2 \cos \theta$  à la fréquence  $\gamma = 3/2$  attendue pour

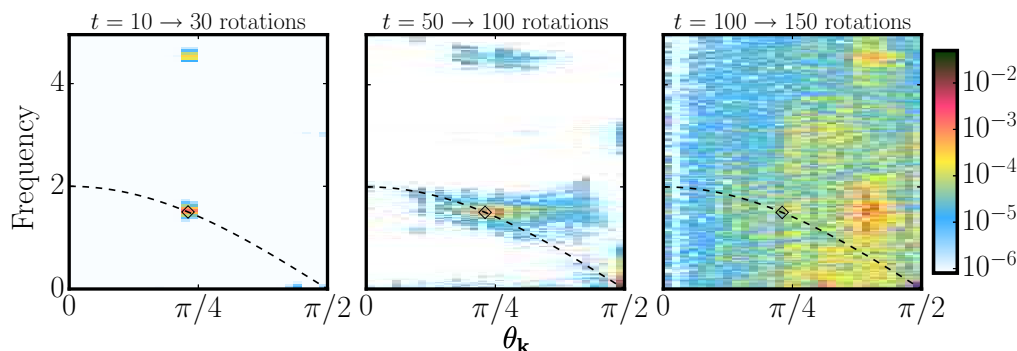


FIG. 2 – Représentation de l'énergie des modes de l'écoulement visualisé en Figure 1 pour chaque phase de l'écoulement en fonction de l'angle  $\theta$  —entre leurs vecteurs d'onde et l'axe de rotation— et de leur fréquence  $\omega$  normalisée par le temps de rotation. La ligne pointillée matérialise la relation de dispersion des ondes inertielles.

les ondes exactement en résonance avec l'écoulement de base. Dès lors que le mode géostrophique domine l'écoulement, les ondes sont advectées et l'énergie se retrouve dispersée dans le plan  $(\theta, \omega)$ . À ce moment, comme observé dans [11], le mécanisme de résonance est atténué, l'énergie des fluctuations décroît et il faut attendre la dissipation visqueuse des vortex géostrophiques avant de voir croître l'instabilité à nouveau.

## 4 Saturation avec friction et turbulence d'ondes d'inertie

Les résultats des simulations tri-périodiques doivent cependant être considérés avec précaution lorsque des structures saturent à la taille du domaine numérique. En effet, se pose alors la question de la dépendance des résultats obtenus à la taille arbitraire du domaine périodique. De façon analogue à ce qui est fait en turbulence bi-dimensionnelle ou quasi-géostrophique [15], nous introduisons ainsi un terme de friction afin d'éviter cet état condensé à grande échelle. Cette modification est également motivée par le fait que les vortex visibles en Figure 1 ne sont pas observés ni dans les simulations ni dans les expériences de l'instabilité elliptique en géométrie globale. L'objectif est d'accéder à des états d'équilibre différents de celui précédemment obtenu en simulant des configurations où les vortex ne peuvent pas saturer au-delà d'une certaine amplitude. Les écoulements géostrophiques étant invariants selon l'axe de rotation, ils interagissent inévitablement avec d'éventuelles parois rigides et subissent donc une friction en volume par un mécanisme de type pompage d'Ekman. Nous choisissons ainsi d'introduire dans l'équation (2) un terme d'amortissement qui n'opère que sur les modes géostrophiques (*i.e* les modes tels que  $k_z = 0$  dans l'espace spectral) et qui prend la forme suivante

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}_G] = -f_r \sqrt{E} \mathbf{u}_G, \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}_G$  est la composante géostrophique de l'écoulement.  $f_r$  est un paramètre *a priori* indéterminé qui représente le rapport d'aspect entre la boîte dans laquelle les simulations locales sont menées et la hauteur du domaine fluide global dont la boîte périodique n'est qu'une sous-partie. Il est laissé comme paramètre de contrôle dont nous examinons les effets sur la saturation non-linéaire.

Du fait de la friction, il est désormais possible de réduire le nombre d'Ekman et d'atteindre  $3 \times 10^{-6}$  sachant que les résultats sont qualitativement les mêmes pour  $10^{-5}$ . Lorsque le paramètre de friction est graduellement augmenté, la cascade inverse du mode géostrophique est stoppée et celui-

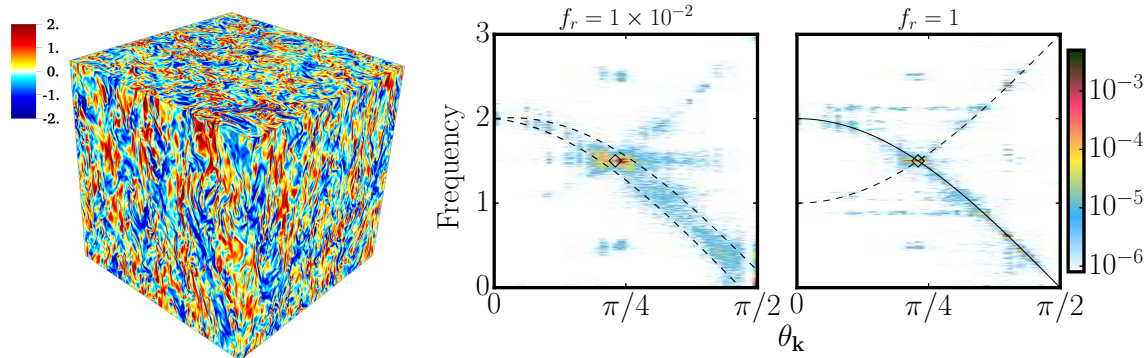


FIG. 3 – **Gauche** : Visualisation de la composante verticale de la vorticité pour  $f_r = 1$ . **Droite** : Diagramme en angle  $\theta$  et fréquence  $\omega$  pour différentes valeurs du coefficient de friction.

ci sature à une amplitude relative plus faible, sans que cela ne change l'énergie cinétique totale dans le système à saturation. Le diagramme angle-fréquence dans l'espace spectral est cependant compl tement modifié et l'énergie se focalise désormais le long de la relation de dispersion des ondes inertielles (voir Figure 3). Cette focalisation est d'autant plus importante que la composante géostrophique de l'écoulement est faible. Il est important de noter que l'écoulement est bien turbulent mais que le nombre de Rossby demeure de l'ordre de  $10^{-1}$  à toutes les échelles. De plus, le fait que la relation de dispersion se remplisse ne peut s'expliquer que par un phénomène non-linéaire puisque l'énergie est initialement injectée à une fréquence bien particulière dictée par la condition de résonance. Tous ces résultats indiquent que les ondes inertielles initialement résonantes par instabilité elliptique alimentent ensuite une turbulence d'ondes inertielles. En injectant de l'énergie dans deux ondes à grande échelle spatiale, la saturation non-linéaire de l'instabilité parvient à créer une cascade d'ondes vers les petites échelles spatiales.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté ici un modèle original consistant à simuler un écoulement turbulent en rotation en présence de friction spécifique aux modes géostrophiques. Bien que cette friction ne corresponde pas directement à un mécanisme physique présent dans le domaine tri-périodique, elle permet de contrebalancer les limitations intrinsèques du modèle, à savoir des effets non contrôlés de confinement. Cette friction peut de plus se justifier dans le contexte plus général des écoulements tournants en interaction avec des parois rigides. Dans le contexte de l'instabilité elliptique, celle-ci permet enfin de contrôler rigoureusement l'importance relative des phénomènes ondulatoires et des vortex géostrophiques. Nous montrons ainsi que le rapport entre l'énergie des modes géostrophiques et celle des modes non-géostrophiques  $\mathcal{E}_G/\mathcal{E}_{3d}$  est une quantité fondamentale, souvent ignorée dans les études de turbulence en rotation. Lorsque l'écoulement tourbillonnaire géostrophique domine, les ondes inertielles sont majoritairement advectées par celui-ci et leur fréquence ne respecte plus la relation de dispersion. Lorsque l'écoulement géostrophique sature à une amplitude plus faible, nous montrons que la paire d'ondes inertielles initialement excitée par instabilité elliptique parvient à engendrer une cascade d'ondes qui créent des petites échelles spatiales et des basses fréquences temporelles. Il reste donc à caractériser systématiquement comment l'écoulement géostrophique sature dans un contexte plus réaliste pour lequel des parois rigides sont présentes ou lorsque le forçage et la dissipation sont d'amplitudes faibles.

## Remerciements

Nous tenons à remercier le Conseil Européen de la Recherche (ERC) pour son soutien financier (European Union's Horizon 2020 research and innovation program, grant agreement No. 681835-FLUDYCO-ERC-2015-CoG) ainsi que l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique) pour l'utilisation du calculateur Turing (Projets No. 100508, 100614 et A0020407543).

## Références

- [1] A. McEwan Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder *Journal of Fluid Mechanics*, **40**(3), 603-640, 1970.
- [2] B. Favier, F. Godeferd, C. Cambon. On space and time correlations of isotropic and rotating turbulence. *Physics of Fluids*, **22**, 015101 , 2010.
- [3] E. Yarom and E. Sharon. Experimental observation of steady inertial wave turbulence in deep rotating flows. *Nature Physics*, **10** , 510–514, June 2014.
- [4] P. Clark di Leoni, P. J. Cobelli, P. D. Mininni, P. Dmitruk, and W. H. Matthaeus. Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow. *Physics of Fluids*, **26**, 035106, 2014.
- [5] A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, and P-P. Cortet. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment. *Physical Review E*, 043016, **91**, 2015.
- [6] R. R. Kerswell. Elliptical instability. *Annual review of fluid mechanics*, **34**, 83–113, 2002.
- [7] D. Cébron, M. Le Bars, C. Moutou, and P. Le Gal. Elliptical instability in terrestrial planets and moons. *Astronomy & Astrophysics*, **539**, A78, 2012.
- [8] M. Le Bars, M. A. Wicczorek, Ö Karatekin, D. Cébron, and M. Laneuville. An impact-driven dynamo for the early Moon. *Nature*, **479**, 215–218, 2011.
- [9] L. Lacaze, P. Le Gal, and S. Le Dizès. Elliptical instability of the flow in a rotating shell. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **151**, 194–205, 2005.
- [10] C. Eloy, P. Le Gal, and S. Le Dizès. Experimental study of the multipolar vortex instability. *Physical review letters*, **85**, 3400, 2000.
- [11] A. J. Barker and Y. Lithwick. Non-linear evolution of the tidal elliptical instability in gaseous planets and stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **435**, 3614–3626, 2013.
- [12] B. Favier, A. M. Grannan, M. Le Bars, and J. M. Aurnou. Generation and maintenance of bulk turbulence by libration-driven elliptical instability. *Physics of Fluids*, **27**, 066601, 2015.
- [13] A. M. Grannan, M. Le Bars, D. Cébron, and J. M. Aurnou. Experimental study of global-scale turbulence in a librating ellipsoid. *Physics of Fluids*, **26**, 126601, 2014.
- [14] G. Lesur and P-Y. Longaretti. Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **378**, 1471–1480, 2007.
- [15] N. Schaeffer et P. Cardin. Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers. *Physics of Fluids*, **17**, 104111, 2005.