

Un critère macroscopique de fatigue des matériaux poreux ductiles basé sur le théorème de Melan

J. Zhang^a, W.Q.Shen^b, A.Oueslati^a, G. De Saxcé^a

a. LML, Université de Lille 1, jin1.zhang@ed.univ-lille1.fr,
abdelbacet.oueslati,gery.desaxce@univ-lille1.fr

b. LML, Polytech Lille, wanqing.shen@polytech-lille.fr

Résumé :

L'objectif de ce travail est de déterminer l'état limite de matériaux poreux ductiles sous chargements cycliques répétés par la théorie de l'adaptation plastique avec une matrice obéissant au critère de von Mises. On propose un champ de contraintes microscopiques élastiques dans la structure fictive élastique et un champ de contraintes résiduelles correspondant. La première étape consiste à déterminer la solution exacte pour le chargement hydrostatique pur. Ensuite, des champs d'essai sont construits avec des termes additionnels pour capturer les effets de cisaillement et l'approche de Melan par bornes inférieures est utilisée. Enfin, des simulations numériques par la méthode pas-à-pas et par une méthode directe pour déterminer la limite de fatigue sont proposés pour valider le modèle analytique

Mots clefs : Matériaux poreux, Analyse limite, Adaptation plastique.

1 Introduction

Déterminer la charge limite des structures sollicitées au-delà de la limite élastique est depuis longtemps une des tâches les plus importantes des ingénieurs. Dans ce but, les Méthodes Directes jouent un rôle croissant dû au fait qu'elles permettent un accès rapide à l'information requise par des techniques mathématiques constructives. Elles embrassent l'analyse limite, l'approche la plus développée et largement utilisée aujourd'hui, et l'adaptation plastique, une extension puissante aux chargements variables répétés, potentiellement plus économique que l'analyse pas-à-pas classique [10].

Pour une structure sous chargement simplement proportionnel, la ruine arrive par développement d'un mécanisme d'écoulement plastique. Par contre, si elle est sous chargements cycliques, même en dessous de cette charge limite, les structures peuvent aussi évoluer vers 3 types d'états limites (Figure 1).

Il existe un facteur particulier α^{SD} , si le chargement cyclique réel α est supérieur que α^{SD} , les premiers deux cas peuvent avoir lieu. Le premier cas est appelé rochet, où la déformation plastique continue à s'accumuler dans la structure. La ruine arrive par l'excédant de déformation. Dans un autre cas, la déformation plastique reste petite, mais la structure peut aussi périr par formation d'un cycle plastique stabilisé, car la dissipation augmente sur chaque cycle. Ce phénomène est appelé accommodation. Par contre, si α est inférieur que α^{SD} , on a observé une phase transitoire et la stabilisation de déformation plastique. Le comportement cyclique redevient purement élastique à la fin. Donc la dissipation est bien bornée et la structure s'adapte.

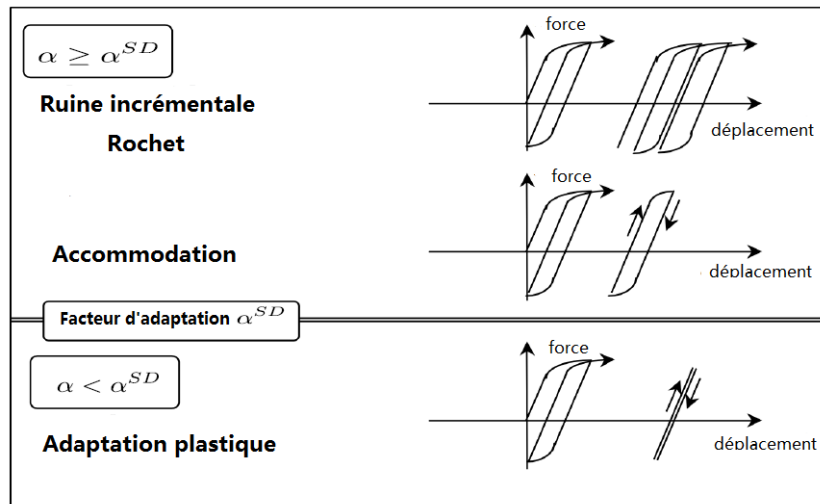


FIGURE 1 – 3 types d'états limites sous chargement cyclique

L'idée d'appliquer les concepts de l'adaptation plastique à la fatigue des matériaux est due à Dang Van [3]. Partant du travail de pionnier d'Orowan [8] sur la plasticité des grains, il affirme que la fatigue ne survient pas si tous les grains s'adaptent plastiquement. Pour estimer l'état de contrainte-déformation à l'échelle macroscopique, un schéma simple d'homogénéisation de l'inclusion plastique dans la matrice élastique est considéré par Dang Van [4], Papadopoulos [9], Charkaluk et al. [1].

Dans le cadre de la micromécanique des matériaux poreux ductiles, Gurson a proposé dans un article célèbre [5] une formule analytique par l'approche cinématique de l'analyse limite de la sphère creuse avec une matrice obéissant au critère de von Mises. Récemment, Shen et al. [11] ont proposé une approche variationnelle statique alternative. Utilisant la programmation conique, des approximations numériques précises ont été obtenues pour la sphère creuse par Thoré et al. [12].

L'objectif du travail proposé est de déterminer l'état limite des matériaux poreux ductiles sous chargement cyclique répété en considérant le modèle de la sphère creuse dans l'esprit du travail de Gurson. La contrainte macroscopique est prise comme charge externe. Contrairement à l'approche cinématique due à Koiter [6], l'approche statique, basée sur le théorème de Melan [7], ne nécessite pas des calculs fastidieux d'intégrales qui peuvent conduire à des expressions analytiques très lourdes. S'il existe un champ microscopique de contraintes résiduelles tel que, ajouté à la réponse dans la structure fictive parfaitement élastique, le champ résultant est plastiquement admissible partout et à chaque instant, la sphère creuse s'adapte plastiquement et, suivant Dang Van [3], nous affirmons que la fatigue ne peut pas apparaître. Pour déterminer le domaine de sécurité sous chargement cyclique, nous maximisons la taille du domaine de chargement, ce qui fournit un critère de fatigue pour les matériaux poreux ductiles. La première étape consiste à déterminer la solution exacte pour le chargement hydrostatique pur. Ensuite, des champs d'essai sont construits avec des termes additionnels pour capter les effets de cisaillement et l'approche de Melan par bornes inférieures est utilisée. Finalement, discrétisant le volume élémentaire de référence par éléments finis, des solutions numériques sont calculées pour estimer la pertinence du modèle analytique.

2 Formulation du problème

Dans la perspective d'appliquer l'analyse d'adaptation plastique aux matériaux poreux ductiles, nous considérons un volume élémentaire de référence (VER) Ω composé d'une cavité ω et d'une matrice $\Omega_M = \Omega - \omega$ constituée d'un matériaux élastique-parfaitement plastique avec un critère d'écoulement :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_0 \leq 0 \quad (1)$$

où F est une fonction convexe du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{s} est le déviateur des contraintes.

La contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ et la déformation macroscopique \mathbf{E} sont définies comme moyennes de leurs homologues microscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur le VER :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

L'ensemble des champ de contraintes statistiquement admissibles est défini par :

$$\mathcal{S}_a = \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ s.t. } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \quad \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \} \quad (2)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure.

La charge de référence $\boldsymbol{\Sigma}$ varie dans un domaine borné convexe \mathcal{P} , qui peut être décrit par une combinaison convexe des charges élémentaires $\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_n$:

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k(t) \boldsymbol{\Sigma}_k, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k(t) = 1, \quad \mu_1(t) \geq 0, \dots, \mu_n(t) \geq 0$$

Les réponses en déplacement \mathbf{u}^E , en déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ et en contrainte $\boldsymbol{\sigma}^E$ dans la structure fictive parfaitement élastique, satisfont à la loi de Hooke. Grâce à la linéarité de la réponse élastique, le champ de contrainte élastique $\boldsymbol{\sigma}^E$ appartient au domaine de chargement polyédrique convexe $\mathcal{S} = \alpha \mathcal{S}^0$, homothétique du domaine de chargement de référence \mathcal{S}^0 correspondant à \mathcal{P}^0 . Alors, le champ :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^E$$

appartient à l'ensemble des *champs de contraintes résiduelles* :

$$\mathcal{N} = \{ \boldsymbol{\rho} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \text{ et sur } \partial\Omega, \quad \boldsymbol{\rho} = 0 \text{ dans } \omega \}$$

L'idée de l'approche statique est de définir un *champ de contraintes résiduelles admissibles* (au sens de Melan) $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ correspondant au domaine de chargement \mathcal{S} , comme vérifiant les conditions suivantes [7] :

- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est indépendant du temps,
- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles : $\bar{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{N}$,
- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est *plastiquement admissible* :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}^E \in \mathcal{S}, \quad F(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}}) \leq 0 \text{ dans } \Omega \text{ à chaque instant}$$

De plus, si $F(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}}) < 0$ dans Ω à chaque instant, $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})$ est considéré comme un *champ de contraintes résiduelles strictement admissibles*. On peut alors prouver le théorème suivant du à Melan [7] :

Théorème de Melan : *s'il existe un champ de contraintes résiduelles $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ strictement admissibles, la structure s'adapte.*

3 Analyse d'adaptation plastique et critère de fatigue

3.1 Construction du champ de contraintes statiquement admissible et couplage entre le chargement hydrostatique et déviatorique

Pour le cas général, il n'est pas possible d'obtenir la solution exacte à cause de la non-linéarité du critère de von Mises. Considérant des solutions axi-symétriques, le champ de contrainte d'essai se divise en deux parties :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad (3)$$

– On travaille dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec un repère orthonormal $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$. Dans la matrice $a < r < c$, le champ d'essai :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{E(1)} \quad (4)$$

se décompose en deux parties :

où le champ de contraintes résiduelles, inspiré de la solution exacte sous chargement hydrostatique pur :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} = & -A_0 \left(\ln \left(\frac{a}{r} \right) \mathbf{1} - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \right) \\ & - \frac{\Sigma_{m+}}{1-f} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi - 2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

A_0 étant un paramètre constant à déterminer.

La réponse dans la structure fictive parfaitement élastique, solution exacte sous chargement hydrostatique pur :

$$\boldsymbol{\sigma}^{E(1)} = \frac{\Sigma_m}{1-f} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi - 2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \right) \quad (6)$$

– L'autre partie correspondante à chargement déviatorique est aussi exprimée dans les coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}^{E(2)} \quad (7)$$

où un champ de contrainte statiquement admissible dans la structure fictive élastique, inspiré de la solution de Papkovitch-Neuber pour une sphère creuse sous chargement déviatorique pur, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{E(2)} = & \left[\frac{a^3 (18a^2 + 5r^2 (-5 + \nu)) (1 + 3 \cos(2\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} - \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{2} \right] A_1 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \\
+ & \left[\frac{a^3 (27a^2 + 5r^2 (1 - 2\nu) - 3 (21a^2 + 5r^2 (-1 + 2\nu)) \cos^2(\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} + \frac{-1 + 3 \cos(2\theta)}{2} \right] A_1 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \\
+ & \left[\frac{a^3 (9a^2 + 25r^2 (-1 + 2\nu) - 45 (a^2 + r^2 (-1 + 2\nu)) \cos^2(\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} + 1 \right] A_1 (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \\
+ & \left[\frac{3a^3 (12a^2 - 5r^2 (1 + \nu)) \sin(2\theta)}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} + \frac{3 \sin(2\theta)}{2} \right] A_1 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r)
\end{aligned} \tag{8}$$

Et un champ de contraintes résiduelles a été proposé :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}^{(2)} = & \frac{a^3 (18a^2 + 5r^2 (-5 + \nu)) (1 + 3 \cos(2\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} A_2 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \\
+ & \frac{a^3 (27a^2 + 5r^2 (1 - 2\nu) - 3 (21a^2 + 5r^2 (-1 + 2\nu)) \cos^2(\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} A_2 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \\
+ & \frac{a^3 (9a^2 + 25r^2 (-1 + 2\nu) - 45 (a^2 + r^2 (-1 + 2\nu)) \cos^2(\theta))}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} A_2 (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \\
+ & \frac{3a^3 (12a^2 - 5r^2 (1 + \nu)) \sin(2\theta)}{2 r^5 (-7 + 5\nu)} A_2 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r)
\end{aligned} \tag{9}$$

où A_1, A_2 étant aussi paramètres constants à déterminer et ν le coefficient de Poisson.

Le champ de contrainte macroscopique obtenu par moyenne de (3) sur le VER :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_m \mathbf{1} + (1 - f) A_1 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - 2\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \tag{10}$$

permet de calculer la contrainte macroscopique équivalente Σ_e et le troisième invariant du déviateur macroscopique J_3 :

$$\Sigma_e = 3(1 - f) |A_1|, \quad J_3 = -2(1 - f)^3 A_1^3. \tag{11}$$

3.2 Chargement alterné

Pour le chargement alterné,

$$\Sigma_{e+} = \Sigma_{e-}, \quad \text{sign}(J_{3+}) = -\text{sign}(J_{3-})$$

en respectant la loi d'écoulement (1), en éliminant A_0 et en exprimant A_1 en fonction de Σ_e et J_3 , deux cas peuvent avoir lieu :

– Pour $J_{3+} > 0$, la condition d'adaptation plastique est satisfaite partout dans la matrice si elle est vérifiée à l'équateur $\theta = \pi/2$ au bord interne $r = a$, ce qui donne le critère de fatigue :

$$\left(\frac{3}{4} \frac{\Delta \Sigma_m}{1 - f} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1 - f} \frac{\Sigma_{e+}}{1 - f} P_1(a, \frac{\pi}{2}) + P_3(a, \frac{\pi}{2}) \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1 - f} \right)^2 \leq \sigma_0^2 \tag{12}$$

où

$$P_1(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{5\nu + 5}{2(5\nu - 7)} \quad P_3(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{25(7\nu^2 - 13\nu + 7)}{(5\nu - 7)^2}$$

- Pour $J_{3+} < 0$, la condition est satisfaite partout si elle est vérifiée aux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ au bord interne $r = a$, ce qui conduit au critère :

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{2\Sigma_{e+}}{1-f} \cdot P_1(a, 0) + P_2(a, 0) \cdot \left(\frac{2\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq 4\sigma_0^2 \quad (13)$$

où

$$P_1(a, 0) = \frac{5\nu + 5}{-5\nu + 7} \quad P_3(a, 0) = \frac{25(\nu^2 + 2\nu + 1)}{(5\nu - 7)^2}$$

3.3 Chargement pulsé

Pareillement, pour le chargement pulsé,

$$\Sigma_{e-} = 0$$

- Pour $J_{3+} > 0$, la condition est satisfaite si elle est vérifiée à l'équateur $\theta = \pi/2$ au bord interne $r = a$, ce qui donne :

$$\left(\frac{3}{4} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f}\right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f} \frac{\Sigma_{e+}}{1-f} \frac{P_1(a, \frac{\pi}{2})}{2} + P_5(a, \frac{\pi}{2}) \left(\frac{P_3(a, \frac{\pi}{2})}{P_4(a, \frac{\pi}{2})}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq \sigma_0^2 \quad (14)$$

où

$$P_1(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{5\nu + 5}{2(5\nu - 7)} \quad P_3(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{25(7\nu^2 - 13\nu + 7)}{(5\nu - 7)^2}$$

$$P_4(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{15(50\nu^2 - 77\nu + 35)}{(5\nu - 7)^2} \quad P_5(a, \frac{\pi}{2}) = \frac{9(100\nu^2 - 130\nu + 49)}{(5\nu - 7)^2}$$

- Pour $J_{3+} < 0$, la condition est satisfaite si elle est vérifiée aux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ au bord interne $r = a$ et on obtient :

$$\left(\frac{3}{4} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\Sigma_m}{1-f} \frac{\Sigma_{e+}}{1-f} \frac{P_1(a, 0)}{2} + P_5(a, 0) \left(\frac{P_3(a, 0)}{P_4(a, 0)}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq \sigma_0^2 \quad (15)$$

où

$$P_1(a, 0) = \frac{5\nu + 5}{-5\nu + 7} \quad P_3(a, 0) = \frac{25(\nu^2 + 2\nu + 1)}{(5\nu - 7)^2}$$

$$P_4(a, 0) = \frac{60(5\nu^2 + 4\nu - 1)}{(5\nu - 7)^2} \quad P_5(a, 0) = \frac{36(25\nu^2 - 10\nu + 1)}{(5\nu - 7)^2}$$

4 Simulation numérique

Les simulations numériques sont effectués avec Abaqus Standard et Matlab. Grâce à sa symétrie, nous considérons seulement un quart du modèle discretisé en 60601 nœuds et 20000 éléments [2].

Nous commençons par déterminer le chargement limite de fatigue, premièrement en calculant la réponse élastique des chargements élémentaires pour définir le domaine de chargement de référence S^0 . Pour chaque point de Gauss \mathbf{x}_g , $\sigma_{\pm}^{E0}(\mathbf{x}_g)$ est la réponse élastique correspondante et α_g la solution du problème

T	Σ_{m+}/σ_0	Σ_{e+}/σ_0	ρ_{11}	ρ_{22}	ρ_{33}	ρ_{12}	Position	
							r	θ
$+\infty$	0.6610	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	a	$\pi/2$
4.3333	0.5913	0.1365	0.0004	0.0005	0.0002	0.0005	a	$\pi/2$
1.0	0.3746	0.3746	0.0004	0.0004	0.0002	0.0004	a	$\pi/2$
0.0	0.0	0.5715	-0.0043	-0.0007	0.0006	0.0002	a	$\pi/2$
-1.0	0.3724	0.3724	0.0003	0.0003	0.0003	0.0001	a	0
-0.3333	0.1987	0.5962	0.0	0.0	0.0	0.0001	a	0
-0.1026	0.0602	0.5868	-0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0001	a	$\pi/2$

TABLE 1 – Numériques valeurs de fatigue limite, la contrainte résiduel correspondant and le premier point où la fatigue arrive sous chargement alterné pour porosité $f = 0.01$

local :

$$\max_{\bar{\rho}, \alpha} \left\{ \alpha \mid F(\alpha \sigma_{\pm}^{E0}(\mathbf{x}_g) + \bar{\rho}) \leq 0 \right\}$$

La fatigue limite α est obtenu comme la valeur minimum de α_g pour tous les points de Gauss \mathbf{x}_g . La résolution se réduit à la résolution d'un grand nombre de problèmes d'optimisation de petite taille.

Sur Table 1, on a remarqué :

Remarque 1. Le premier point où la fatigue arrive se trouve au bord interne $r = a$ à l'équateur $\theta = \pi/2$ pour $J_{3+} > 0$ et aux pôles $\theta = 0$ où π pour $J_{3+} < 0$, s'accordant avec la solution analytique.

Remarque 2. Pour le chargement alterné, tous les éléments de la contrainte résiduelle sont zéro, qui peut être expliqué par l'absence de la contrainte résiduelle microscopique correspondante.

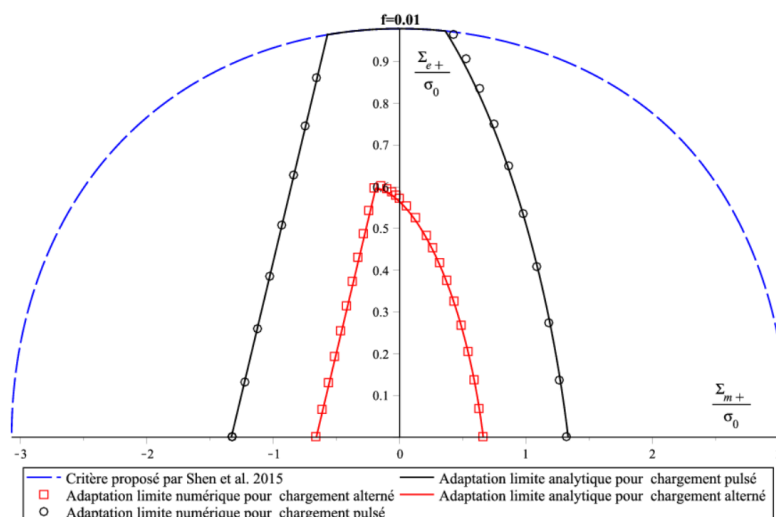


FIGURE 2 – Courbe d'interaction pour porosité $f = 0.01$

5 Conclusion

On a obtenu une formule analytique de critère conservatif de fatigue des matériaux poreux sous chargements cycliques en considérant le modèle de sphère creuse, qui dépend du premier, seconde et troisième invariant de contrainte, de la porosité du modèle et du coefficient de Poisson. Deux cas extrêmes ont

été particulièrement discutés. Comme montré dans Figure 2, le domaine de sécurité est obtenu à l'intersection du domaine défini par le critère de fatigue et le critère de Shen [11], correspondant à la ruine par développement d'un mécanisme à partie de premier cycle. La solution analytique est strictement à l'intérieur de celle numérique, car notre critère est basé sur l'approche statique de Melan.

Références

- [1] Charkaluk, E., Constantinescu, A., Maïtournam, H., Dang Van, K., 2009. Revisiting the Dang Van criterion, *Procedia Engineering*, 1, 143-146.
- [2] L. Cheng, T.F. Guo (2007). Void interaction and coalescence in polymeric materials, *Int. J. Solids Struct*, 44, 1787-1808.
- [3] Dang Van, K., 1973. Sur la résistance à la fatigue des métaux, *Sci. Tech. Armement*, 47.
- [4] Dang Van, K., 1993. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, pp. 120-130 in *Advances in multi-axial fatigue*, McDowell, D.L. and R. Ellis, R. (eds.), STP 191, ASTM, Philadelphia.
- [5] Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth – part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15.
- [6] Koiter, W.T., 1960. General Theorems for Elastic-Plastic Solids, *Progress in Solid Mechanics*, vol. 1, Sneddon, I.N., Hill, R. (eds.), North-Holland, Amsterdam.
- [7] Melan, E., 1936. Theory statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischen baustoff. *Sitz Ber. Akad. Wiss. Wien Ila*, 145-195.
- [8] Orowan, E., 1939. Theory of the fatigue of metals, *Proc. R. Soc. Lond. A* 171 :944, 79-106.
- [9] Papadopoulos, I.V., 1994. A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals, *Int. J. Fatigue*, 16, 6, 377-384.
- [10] Save, M.A., Massonnet, C.E., de Saxcé, G., 1997. *Plastic limit analysis of plates, shells and disks*. Elsevier, New York.
- [11] Shen, W.Q., Oueslati, A., de Saxcé, G., 2015. Macroscopic criterion for ductile porous materials based on a statically admissible microscopic stress field, *International Journal of Plasticity*, 70, 60-76.
- [12] Thoré, P., Pastor, F., Pastor, J., Kondo, D., 2009. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker-Prager materials under isotropic loadings, *Comptes-Rendus Mécanique*, 337, 260-267.