

# Modèle viscoplastique pour un monocristal poreux cubique sous chargement purement hydrostatique

L. JOËSSEL<sup>a</sup>, P.-G. VINCENT<sup>a,b</sup>, M. GĂRĂJEU<sup>c</sup>, M. I. IDIART<sup>d,e</sup>

a. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

BP 3, 13115 Saint-Paul-lez-Durance Cedex, France, louis.joessel@irsn.fr

b. Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures (MIST)

IRSN-CNRS-UM BP 3, 13115 Saint-Paul-lez-Durance Cedex, France, pierre-guy.vincent@irsn.fr

c. Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA

F-13453 Marseille, France, mihai.garajeu@univ-amu.fr

d. Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

Avda. 1 esq. 47, La Plata B1900TAG, Argentina, martin.idiart@ing.unlp.edu.ar

e. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

CCT La Plata, Calle 8 N 1467, La Plata B1904CMC, Argentina

## Résumé :

*Ce travail concerne la modélisation du comportement viscoplastique d'un monocristal poreux, constitué d'une matrice cristalline à symétrie cubique, dans laquelle sont distribuées de façon uniforme des cavités dont la taille caractéristique est petite devant celle du cristal environnant. Deux types de familles sont considérées : les cubiques à faces centrées et les cubiques centrés. La méthode des laminés séquentiels de rang infini proposée par Idiart [4] est utilisée pour obtenir le potentiel effectif en contrainte dans le cas d'un chargement hydrostatique. Les prédictions du modèle sont comparées aux résultats des simulations numériques à base de transformées de Fourier rapides et à des résultats disponibles dans la littérature.*

**micromécanique, monocristal, milieux poreux, viscoplasticité, plasticité parfaite, homogénéisation, approche variationnelle**

## 1 Introduction

Ce travail est relatif à la modélisation du comportement viscoplastique d'un monocristal poreux. Le matériau considéré contient des cavités dont la taille caractéristique est petite devant celle du cristal environnant. Ce type de microstructure peut se rencontrer dans certains aciers inoxydables austénitiques irradiés, où des cavités peuvent apparaître à l'intérieur des grains de ces polycristaux (voir par exemple [2]).

La matrice cristalline est prise à symétrie cubique et deux types de familles sont considérées successivement : les cubiques faces centrées et les cubiques centrées. Un chargement en contrainte effective hydrostatique est considéré. La méthode des stratifiés de rang infini de Idiart [4] est mise en oeuvre. Des simulations numériques à base de transformées de Fourier rapides (méthode FFT de Moulinec et Suquet [8]) sont réalisées sur des microstructures tridimensionnelles poreuses périodiques sous chargement en contrainte effective hydrostatique.

La section 2 de cet article rappelle les principales définitions et les équations du modèle du laminé séquentiel de rang infini de Idiart [4]. La section 3 présente le nouveau modèle proposé pour le comportement effectif d'un monocristal poreux sous chargement hydrostatique. La section 4 explique brièvement la méthode FFT et compare les prédictions du modèle obtenu avec les résultats des simulations numériques mais aussi avec des résultats disponibles dans la littérature (travaux de Han *et al.* [3], Paux *et al.* [9], Mbiakop *et al.* [5]).

## 2 Laminé séquentiel de rang infini

Cette section présente l'estimation obtenue par Idiart [4] pour le potentiel effectif d'un milieu hétérogène bi-phasé, basé sur la méthode du laminé séquentiel de rang infini. Le volume élémentaire représentatif  $\Omega$  d'un composite bi-phasé est constitué de deux sous-domaines  $\Omega^{(r)}$  relatifs aux phases  $r = 1, 2$ . Le comportement local de chaque phase  $r$  dérive d'un potentiel  $u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma})$  convexe et constant par phase :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \chi^{(1)}(\mathbf{x})u^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) + \chi^{(2)}(\mathbf{x})u^{(2)}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1)$$

où  $\mathbf{D}$  est la vitesse de déformation eulérienne,  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte de Cauchy et  $\chi^{(r)}$  la fonction caractéristique indicatrice du domaine  $\Omega^{(r)}$ . La notation  $\partial_{\boldsymbol{\sigma}}$  correspond à la dérivée partielle par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$ .

La vitesse de déformation macroscopique  $\bar{\mathbf{D}}$  et la contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  sont les moyennes sur  $\Omega$  des champs locaux correspondant  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{D}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (2)$$

Le comportement macroscopique dérive d'un potentiel effectif  $\tilde{u}$  (voir les travaux de Willis [13], Ponte Castañeda et Suquet [10]) :

$$\bar{\mathbf{D}} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \text{avec} \quad \tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \langle u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \rangle_{\Omega} = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \sum_{r=1}^2 c^{(r)} \langle u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_{\Omega^{(r)}} \quad (3)$$

où  $c^{(r)}$  est la fraction volumique de la phase  $r$ . La minimisation est réalisée sur l'ensemble des champs statiquement admissibles  $\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  tel que :

$$\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{T} : \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \} \quad (4)$$

avec  $\mathcal{T}$  l'ensemble des tenseurs symétriques de second ordre.

Idiart [4] propose une estimation du potentiel effectif en contrainte  $\tilde{u}$  (3) pour un bi-phasé particulier où la phase 1 est la matrice, caractérisée par le potentiel  $u = u^{(1)}$ , et la phase 2 est la phase inclusive, caractérisée par le potentiel  $u^{(2)}$ . Un laminé séquentiel correspond à une construction itérative obtenue, par exemple, en superposant successivement en couches des matériaux laminés (i. e. obtenus par la procédure aux ordres inférieurs) avec une phase homogène. Le rang du laminé correspond au nombre d'opérations de superposition en couches requises afin d'atteindre le laminé séquentiel final. Tout d'abord, Idiart [4] établit le potentiel effectif pour un laminé de rang infini avec concentration infinitésimale de matrice. Puis, des laminés de rang infini avec des concentrations de matrices finies sont construits par l'intermédiaire d'un schéma différentiel. L'idée générale est de prendre un laminé de rang infini avec une concentration infinitésimale de matrice, qui à son tour est prise comme la phase d'in-

clusion d'un laminé de rang infini avec une concentration infinitésimale de matrice et ainsi de suite... Ainsi, à chaque étape, une quantité infinitésimale de matrice est ajoutée, ce qui conduit, après répétition du processus une infinité de fois, à atteindre une concentration finie de matrice. Une expression exacte du potentiel effectif du composite résultant est obtenue. Introduisons la variable  $\tau = -\log c^{(2)}$ . Le potentiel effectif  $\tilde{u}$  est la solution d'une équation différentielle de type Hamilton-Jacobi :

$$\partial_\tau \tilde{u}(\bar{\sigma}, \tau) + \mathcal{H}(\bar{\sigma}, \tilde{u}, \partial_{\bar{\sigma}} \tilde{u}) = 0 \quad \text{avec} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{u}(\bar{\sigma}, \tau) = u^{(2)}(\bar{\sigma}) \quad (5)$$

Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  est défini par :

$$\mathcal{H}(\bar{\sigma}, \tilde{u}, \partial_{\bar{\sigma}} \tilde{u}) = \tilde{u} + \int_{|\xi|=1} \sup_{\omega \in \mathcal{W}(\xi)} [\partial_{\bar{\sigma}} \tilde{u} \cdot \omega - u(\bar{\sigma} + \omega)] \nu(\xi) dS(\xi) \quad (6)$$

où  $\mathcal{W}(\xi)$  regroupe l'ensemble des tenseurs symétriques  $\omega$  contenant  $\xi$  dans leur noyau :

$$\mathcal{W}(\xi) = \{\omega \in \mathcal{T} : \omega \xi = 0\} \quad (7)$$

La mesure réduite  $\nu(\xi)$  satisfait  $\int_{|\xi|=1} \nu(\xi) dS(\xi) = 1$  et caractérise la distribution de la phase inclusionnaire. Elle dépend de la fonction de corrélation à deux points du composite et dans le cas où la phase inclusionnaire a une distribution isotrope, elle peut être évaluée explicitement ([11, 12]) comme  $\nu(\xi) = \frac{1}{4\pi}$ .

Dans le cas particulier d'un milieu poreux (la fraction volumique  $c^{(2)} = f$  avec  $f$  la porosité et le potentiel  $u^{(2)} = I_{\{0\}}$  avec  $I_{\{0\}}$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{0\}$ ) contenant une distribution isotrope de cavités, l'équation différentielle définissant le potentiel effectif en contraintes  $\tilde{u}(\bar{\sigma}, \tau)$  s'écrit :

$$\partial_\tau \tilde{u} + \tilde{u} + \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \sup_{\omega \in \mathcal{W}(\xi)} [\partial_{\bar{\sigma}} \tilde{u} \cdot \omega - u(\bar{\sigma} + \omega)] dS(\xi) = 0 \quad \text{avec} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{u}(\bar{\sigma}, \tau) = I_{\{0\}} \quad (8)$$

### 3 Monocristal poreux sous chargement hydrostatique

#### 3.1 Propriétés locales des milieux cristallins

Dans un monocristal, la déformation viscoplastique est générée par des glissements sur les plans atomiques les plus denses. Un système de glissement  $k = 1, \dots, K$  est défini par la normale  $\mathbf{n}^{(k)}$  au plan de glissement et par une direction de glissement  $\mathbf{m}^{(k)}$ . Le tenseur de Schmid  $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$  caractérise chaque système de glissement  $k$  et est défini par :

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{n}^{(k)} \otimes_s \mathbf{m}^{(k)} \right) \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, K \quad (9)$$

où la notation  $\otimes_s$  définit le potentiel tensoriel symétrisé. Dans cette étude, deux types de monocristaux à symétrie cubique sont considérés :

- Cubique à faces centrées (fcc pour face-centered cubic) où le glissement suit quatre plans de type  $\{111\}$  et trois directions par plan de type  $\langle 110 \rangle$ . Un fcc totalise 12 systèmes de glissement ( $K = 12$ ).
- Cubique centré (bcc pour body-centered cubic). Les déformations plastiques suivent les directions  $\langle 111 \rangle$  sur les plans  $\{110\}$  et  $\{112\}$ . Un bcc compte 24 systèmes de glissement ( $K = 24$ ).

### 3.2 Comportement effectif sous chargement hydrostatique

Le comportement viscoplastique local pour un milieu cristallin est ici caractérisé par un potentiel en contrainte  $u$  de type loi puissance :

$$u(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}_0 \frac{\tau_0^{(k)}}{n+1} \left| \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}^{(k)}}{\tau_0^{(k)}} \right|^{n+1} \quad (10)$$

où le taux de glissement  $\dot{\gamma}_0$  et l'exposant de fluage  $n \geq 1$  sont des paramètres matériau. La cission critique  $\tau_0^{(k)} > 0$  est fixée pour chaque système de glissement  $k = 1, \dots, K$ . Cette classe de potentiel de type loi puissance est particulièrement appropriée pour capter les effets de non-linéarité ainsi que le comportement cristallin anisotrope. En particulier, le cas limite  $n = 1$  correspond à un comportement visqueux linéaire et le cas limite  $n \rightarrow \infty$  coïncide avec un comportement plastique parfait indépendant du temps.

Le comportement viscoplastique global est décrit par le potentiel effectif (3) qui dans le cas d'un milieu poreux s'écrit :

$$\tilde{u}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = (1-f) \inf_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \langle u(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \rangle_{\Omega^{(1)}} \quad (11)$$

où  $\Omega^{(1)}$  est le domaine occupé par la matrice cristalline. On note  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal au bord  $\partial\Omega^{(2)}$  du domaine occupé par les cavités. L'ensemble  $\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  regroupe les champs de contraintes admissibles  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  :

$$\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{T} : \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega^{(1)}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{(2)}, \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right\} \quad (12)$$

Le potentiel (10) étant positivement homogène de degré  $n+1$  (tel que  $u(\lambda\boldsymbol{\sigma}) = \lambda^{n+1}u(\boldsymbol{\sigma})$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ) et l'ensemble  $\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  (12) étant défini par des relations linéaires, le potentiel effectif est aussi positivement homogène de degré  $n+1$ . Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\sigma}_m \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (13)$$

avec  $\mathbf{I}$  le tenseur identité d'ordre deux et  $\bar{\sigma}_m$  la contrainte hydrostatique macroscopique, la propriété d'homogénéité du potentiel effectif donne  $\tilde{u}(\bar{\sigma}_m \mathbf{I}) = \bar{\sigma}_m^{n+1} \tilde{u}(\mathbf{I})$ . Enfin, étant donnée la géométrie du problème considéré (matrice à symétrie cubique, distribution isotrope de la phase de cavité, chargement hydrostatique), le potentiel effectif et sa dérivée par rapport à  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  s'écrivent sous la forme :

$$\tilde{u}(\bar{\sigma}_m \mathbf{I}, \tau) = \frac{\tilde{\sigma}_h(\tau) \dot{\gamma}_0}{n+1} \left| \frac{\bar{\sigma}_m}{\tilde{\sigma}_h(\tau)} \right|^{n+1} \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \tilde{u}(\bar{\sigma}_m \mathbf{I}, \tau) = \frac{\dot{\gamma}_0}{3} \left| \frac{\bar{\sigma}_m}{\tilde{\sigma}_h(\tau)} \right|^n \mathbf{I} \quad (14)$$

où  $\tilde{\sigma}_h$  est la contrainte d'écoulement hydrostatique, qui dépend de la microstructure et des paramètres locaux du matériau. La fonction  $\tilde{\sigma}_h$  caractérise complètement la réponse hydrostatique d'un monocristal poreux. Elle est déterminée en utilisant l'équation différentielle (8).

### 3.3 Un modèle basé sur l'approche des laminés séquentiels

Les prédictions du comportement viscoplastique d'un monocristal poreux sous chargement hydrostatique s'appuient sur le modèle des laminés séquentiels de rang infini de Idiart [4], brièvement décrit dans la section 2 et synthétisé par l'équation de Hamilton-Jacobi (8). En remplaçant (14) et (10) dans (8), des calculs directs conduisent à une équation différentielle ordinaire ayant pour solution explicite :

$$\tilde{\sigma}_h = \alpha_0 \left( f^{-\frac{1}{n}} - 1 \right) \quad (15)$$

$$\alpha_0 = (n + 1) \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \sup_{\omega \in \mathcal{W}(\xi)} \left( \frac{\text{tr}\omega}{3} - \sum_{k=1}^K \frac{\tau_0^{(k)}}{n+1} \left| \frac{\omega : \mu^{(k)}}{\tau_0^{(k)}} \right|^{n+1} \right) dS(\xi) \quad (16)$$

La contrainte d'écoulement hydrostatique  $\tilde{\sigma}_h$  représente la réponse effective pour un monocristal poreux sous chargement moyen hydrostatique. La solution du problème dépend seulement de la porosité  $f$ , de la viscosité introduite par  $n$  et du coefficient  $\alpha_0$  qui est évaluable numériquement. Michel et Suquet [6], en étudiant la réponse macroscopique d'une sphère creuse viscoplastique non linéaire, ont trouvé une expression analogue qui montre la même dépendance en  $f$ . Quelques valeurs de  $\alpha_0$  sont présentées dans la Table 1 pour quelques valeurs de  $n$ .

	$\alpha_0$	
	fcc	bcc
$n = 1$	0.65125	0.32240
$n = 3$	4.19260	3.28433
$n = 5$	7.98013	6.80098
$n = 10$	17.41928	15.69068

TABLE 1 – Quelques valeurs du coefficient  $\alpha_0$

### 3.4 Cas limite pour un comportement parfaitement plastique

Le comportement parfaitement plastique est obtenu à partir du modèle présenté dans la section précédente comme un cas limite pour  $n \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, le potentiel  $u$  (10) devient la fonction indicatrice du domaine  $\mathcal{P}$  des champs de contraintes admissibles :

$$\mathcal{P} = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \mathcal{T} : \left| \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\mu}^{(k)} \right| \leq \tau_0^{(k)} \text{ avec } k = 1, \dots, K \right\} \quad (17)$$

La contrainte effective hydrostatique d'écoulement plastique  $\tilde{\sigma}_h^\infty$  est obtenue par le passage à la limite  $n \rightarrow \infty$  de l'expression (15). Il en résulte :

$$\tilde{\sigma}_h^\infty = -\beta_0 \ln f \quad (18)$$

$$\beta_0 = \int_{|\xi|=1} \sup_{\omega \in \mathcal{W}(\xi) \cap \mathcal{P}} \left( \frac{\text{tr}\omega}{3} \right) dS(\xi) \quad (19)$$

où  $\beta_0$  est un coefficient évaluable numériquement. L'ensemble  $\mathcal{P}$  étant un polyèdre, le suprémum dans (19) est atteint dans un des sommets de  $\mathcal{P}$ . Les valeurs pour  $\beta_0$  sont données dans la Table 2.

	$\beta_0$	
	fcc	bcc
$n \rightarrow \infty$	1.86399	1.73606

TABLE 2 – Valeurs du coefficient  $\beta_0$ 

## 4 Simulations numériques basées sur un algorithme FFT

### 4.1 Méthode FFT

Les performances du modèle sont estimées par comparaison avec des simulations numériques en champ complet. La méthode numérique employée est basée sur un algorithme FFT (pour Fast Fourier Transform) proposé par [8] et est implémentée dans le code de calcul CraFT (un logiciel libre disponible sur <http://craft.lma.cnrs-mrs.fr>). La méthode FFT exploitée par CraFT est basée sur l'expression exacte de la fonction de Green pour un milieu linéaire et homogène de comparaison. Le schéma de base de la méthode FFT se déroule comme suit : pour chaque pas de temps, un algorithme de point fixe est employé pour déterminer les déformations  $\varepsilon$  et contraintes  $\sigma$  locales. L'algorithme de point fixe se résume à un système d'équations (voir [7]) où à chaque itération  $i$ ,  $\sigma^i$ ,  $\varepsilon^i$  et les variables internes  $v_{int}$  sont connus et où  $\sigma^{i+1}$  et  $\varepsilon^{i+1}$  sont à déterminer.

$$\begin{cases} \varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i - \Gamma^0 * \sigma^i \\ \sigma^{i+1} = F(\varepsilon^{i+1}, v_{int}) \end{cases} \quad (20)$$

### 4.2 Comportement élasto-viscoplastique local

Dans l'expression (20), la fonction  $F$  n'est pas nécessairement une fonction explicite. Dans le cas du comportement élasto-viscoplastique, elle est constituée par un système d'équations différentielles dont l'intégration en temps permet de déterminer le champ de contrainte local  $\sigma$ . Pour le milieu cristallin considéré ici, les équations donnant ce système sont la loi de Hook en élasticité linéaire :

$$\dot{\sigma} = \mathbb{C} : (D - D^{vp}) \quad (21)$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur de quatrième ordre des modules élastiques et  $D^{vp}$  est le taux de déformation viscoplastique et une loi cristalline de type loi puissance donnant le taux de déformation viscoplastique :

$$D^{vp} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mu^{(k)} \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\sigma : \mu^{(k)}|}{\tau_0^{(k)}} \right)^n \text{sign}(\sigma : \mu^{(k)}) \quad (22)$$

où  $\dot{\gamma}^{(k)}$  est le taux de glissement pour un système  $k$  et  $\text{sign}(x) = -1$  si  $x < 0$ ,  $\text{sign}(x) = 0$  si  $x = 0$  et  $\text{sign}(x) = 1$  si  $x > 0$ . Les équations (21) et (22) sont intégrées en temps de manière explicite (avec pas adaptatif) par la méthode Runge-Kutta (3)2 FSAL (pour First is Same As Last), décrite par [1].

### 4.3 Comparaison entre les prédictions du modèle et les simulations numériques

Le code de calcul CraFT (pour Crystal and Fourier Transform) a été choisi pour sa capacité à déterminer la réponse effective d'une microstructure poreuse où les cavités sont statistiquement réparties de manière aléatoire (distribution isotrope). Les simulations en champ complet sont réalisées sur des cellules élémentaires représentatives en trois dimensions pour répondre au besoin d'appliquer un chargement purement hydrostatique. Les conditions de chargement correspondent à l'expression (13). La direction de contrainte est imposée et la vitesse de déformation macroscopique  $\tilde{D}$  est constante, fixée à  $3.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Les calculs sont réalisés pour  $\tau_0^{(k)} = \tau_0$  pour tout  $k$ . Pour les besoins des simulations, les microstructures (images) sont discrétisées par  $256^3$  points (appelés voxels). La Figure 1 représente une des images traitées par CraFT pour les simulations numériques.

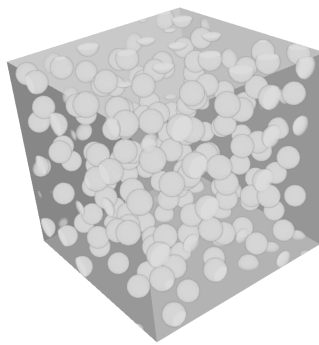


FIGURE 1 – Image d'un monocristal poreux avec une distribution isotrope de cavités (porosité  $f = 0.1$ )

Le modèle et les simulations numériques sont comparés sur des monocristaux poreux de type fcc et bcc pour plusieurs porosités 0.01, 0.02, 0.03, 0.05 et 0.1 et pour plusieurs exposants de fluage  $n = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n = 5$  et  $n = 10$  sur les figures 2, 3, 4 et 5. Un bon accord est obtenu entre les prédictions du modèle et les simulations numériques.

Les résultats obtenus en plasticité parfaite pour des fcc peuvent être confrontés aux modèles de Han *et al.* [3] et de Paux *et al.* [9]. Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, les estimations de [3] et de [9] pour un monocristal fcc au comportement plastique parfait avec des cavités sphériques prennent la forme suivante :

$$\frac{\tilde{\sigma}_h}{\tau_0} = -\frac{1}{\kappa} \ln(q_1 f) \quad (23)$$

avec  $\kappa = 0.513$  et  $q_1 = 1.471$  dans [3] et  $\kappa = 0.506$  et  $q_1 = 1.59$  dans [9]. Ces valeurs étant très proches, les résultats ne sont comparés qu'avec le modèle de Han *et al.* [3]. Le modèle de Mbiakop *et al.* [5] prédit le comportement viscoplastique d'un monocristal avec des cavités ellipsoïdales ; il est tout de même comparé à notre modèle pour le cas particulier des cavités sphériques pour des exposants de fluage  $n = 10$  et  $n \rightarrow \infty$  (voir figure 6). Dans le cas de la plasticité parfaite, un bon accord est observé entre le nouveau modèle et les modèles de [3] et [5]. Dans le cas viscoplastique avec  $n = 10$ , des différences plus importantes sont observées entre le nouveau modèle et le modèle de [5].

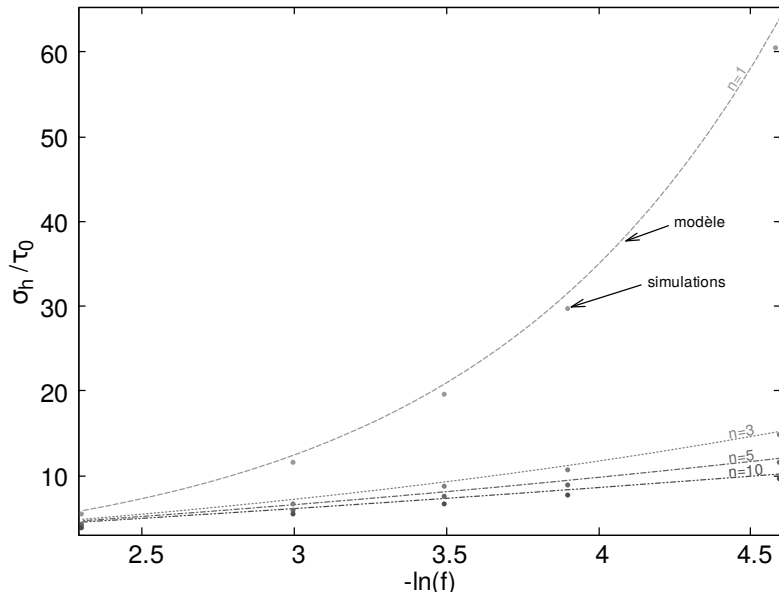


FIGURE 2 – Contrainte d’écoulement hydrostatique en fonction de la porosité  $f$  pour un fcc

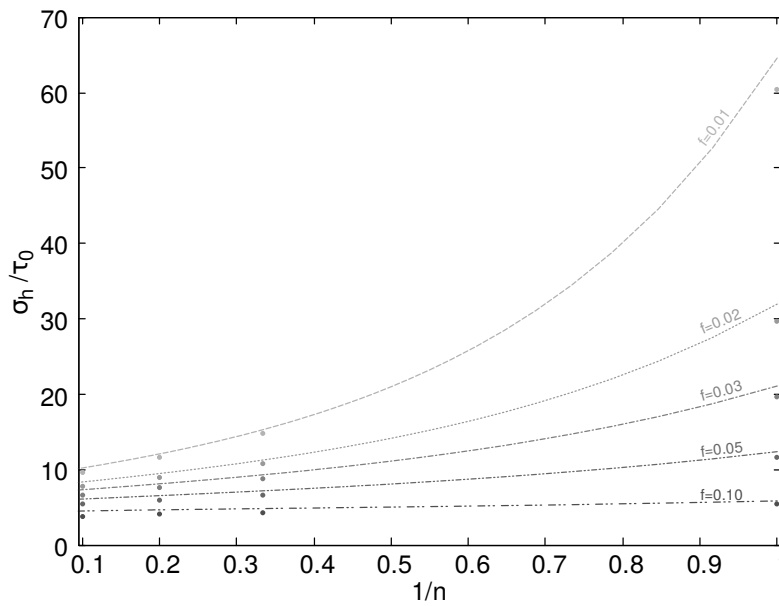


FIGURE 3 – Contrainte d’écoulement hydrostatique en fonction de l’exposant de fluage  $n$  pour un fcc



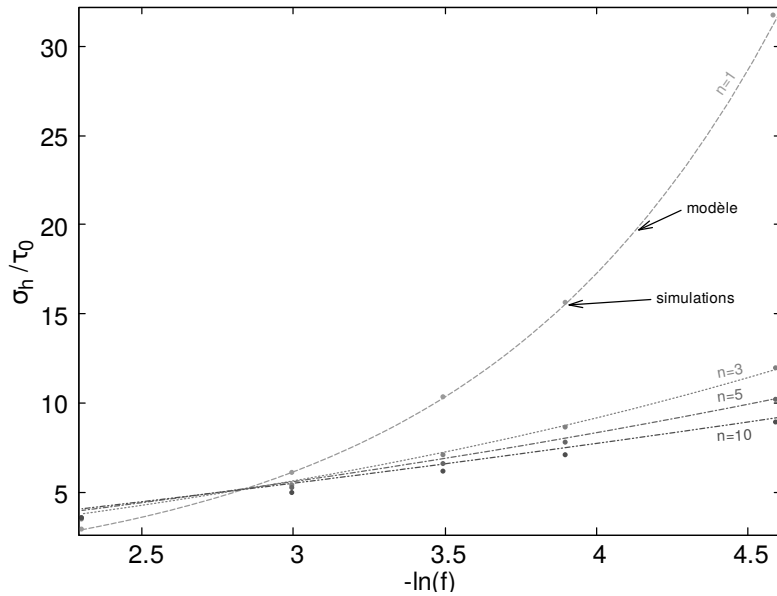


FIGURE 4 – Contrainte d’écoulement hydrostatique en fonction de la porosité  $f$  pour un bcc

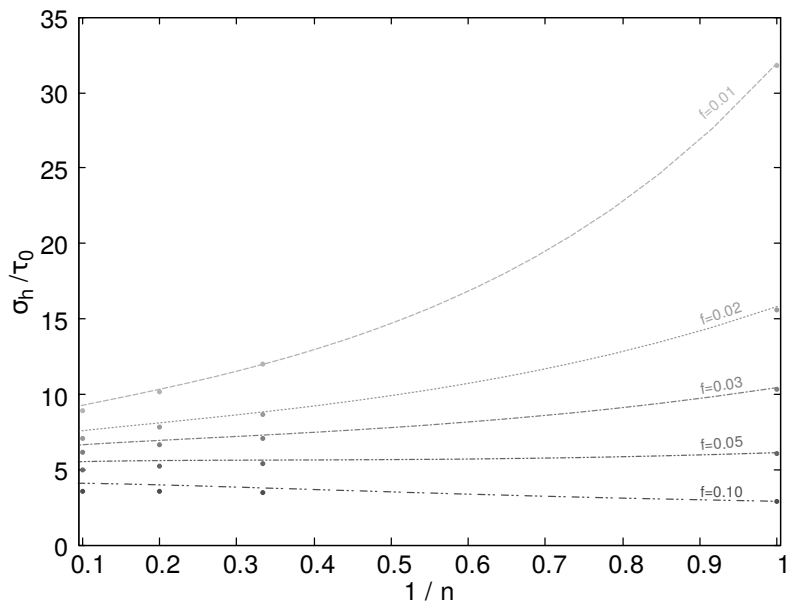


FIGURE 5 – Contrainte d’écoulement hydrostatique en fonction de l’exposant de fluage  $n$  pour un bcc

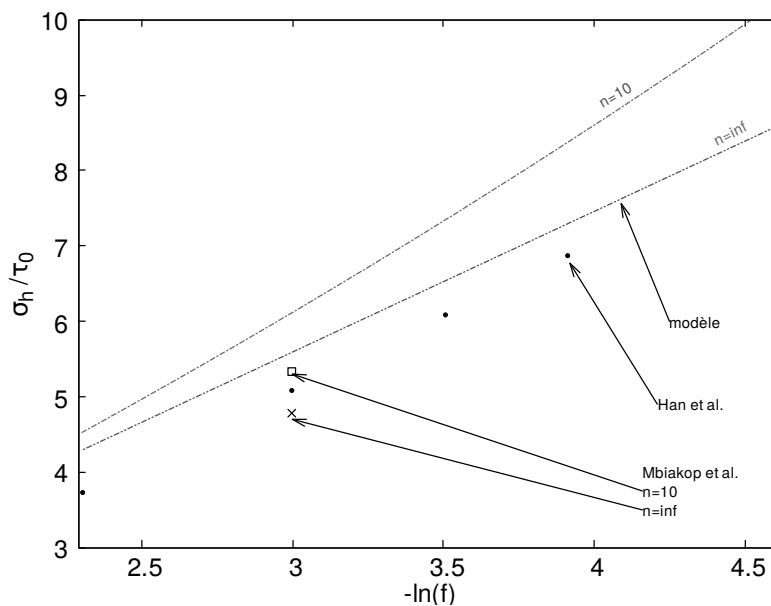


FIGURE 6 – Contrainte d'écoulement hydrostatique en fonction de la porosité  $f$  pour un fcc  
 Comparaison entre le nouveau modèle et les modèles de [3] et [5]

## 5 Conclusion

La méthode des laminés séquentiels de rang infini proposée par Idiart [4] a été utilisée avec succès pour obtenir le potentiel effectif en contrainte, dans le cas d'un chargement hydrostatique et pour le comportement viscoplastique d'un monocristal poreux, constitué d'une matrice cristalline à symétrie cubique, dans laquelle sont distribuées de façon uniforme des cavités dont la taille caractéristique est petite devant celle du cristal environnant. Les prédictions du modèle en viscoplasticité sont en bon accord avec les résultats des simulations numériques à base de transformées de Fourier rapides. Le modèle dans le cas plastique parfait est en bon accord avec les modèles de [3] et de [5].

## Références

- [1] P. Bogaki and L. F. Shampine. A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas. *Applied Mathematics Letters*, 2 :321–325, 1989.
- [2] F. A. Garner. Radiation damage in austenitic steels. *Comprehensive Nuclear Materials*, 4 :33–95, 2012.
- [3] X. Han, J. Besson, S. Forest, B. Tanguy, and S. Bugat. A yield function for single crystals containing voids. *International Journal of Solids and Structures*, 50 :2115–2131, 2013.
- [4] M. I. Idiart. Modeling the macroscopic behavior of two-phase nonlinear composites by infinite-rank laminates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 :2599–2617, 2008.
- [5] A. Mbiakop, A. Constantinescu, and K. Danas. An analytical model for porous single crystals with ellipsoidal voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 84 :436–467, 2015.
- [6] J. C. Michel and P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :783–812, 1992.

- [7] V. Monchiet and G. Bonnet. A polarization based FFT iterative scheme for computing the effective properties of elastic composites with arbitrary contrast. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 89, 2012.
- [8] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear proprieties of composites. *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences Paris II*, 318 :1417–1423, 1994.
- [9] J. Paux, L. Morin, R. Brenner, and D. Kondo. An approximate yield criterion for porous single crystals. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 51 :1–10, 2015.
- [10] P. Ponte Castañeda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34 :171–302, 1998.
- [11] J. R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall moduli of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25 :185–202, 1977.
- [12] J. R. Willis. Variational principles and bounds for the overall properties of composites. *Ed. J. Provan, Continuum Models and Discrete Systems (CMDS 2), University of Waterloo Press*, pages 185–215, 1978.
- [13] J. R. Willis. The structure of overall constitutive relations for a class of nonlinear composites. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 43 :231–242, 1989.