

# Écoulement dense autour d'une sphère traversant un nuage de grains

A. SEGUIN<sup>a,b</sup>, A. LEFEBVRE-LEPOT<sup>c</sup>, S. FAURE<sup>d</sup>, P. GONDRET<sup>a</sup>

a. Laboratoire FAST, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405, Orsay, France

b. SPEC, CEA, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91191, Gif-sur-Yvette, France

c. CMAP, CNRS, Ecole Polytechnique, Université Paris-Saclay, F-91128, Palaiseau, France

d. LMO, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405, Orsay, France

## Résumé :

*Une simulation bidimensionnelle d'une sphère se déplaçant à vitesse constante (sans effet de la gravité) à l'intérieur d'un nuage de petits grains est présentée avec une méthode de type "Non-Smooth Contact Dynamic". Une zone granulaire dense, appelée "cluster", à fraction solide constante se construit progressivement autour de la sphère jusqu'à ce qu'un régime stationnaire apparaisse caractérisé par une taille constante du cluster en amont de la sphère qui augmente avec la fraction solide initiale  $\phi_0$  du nuage. Une analyse détaillée du champ de taux de déformation et du champ de contrainte à l'intérieur du cluster révèle que, malgré les variations spatiales de ces champs, le coefficient local de friction  $\mu$  et la fraction solide  $\phi$  dépendent uniquement du nombre d'inertie  $I$ , ce qui signifie que la rhéologie du milieu granulaire est bien locale dans cet écoulement non parallèle. Les variations spatiales de  $I$  à l'intérieur même du cluster ne dépendent pas de la vitesse de déplacement de la sphère et explore une faible gamme allant environ de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$ . L'influence des parois latérales sur l'écoulement et les forces est ensuite étudiée.*

## Abstract :

*A bidimensional simulation of a sphere moving at constant velocity into a cloud of smaller spherical grains without gravity is presented with a non-smooth contact dynamics method. A dense granular "cluster" zone of about constant solid fraction builds progressively around the moving sphere until a stationary regime appears with a constant upstream cluster size that increases with the initial solid fraction  $\phi_0$  of the cloud. A detailed analysis of the local strain rate and local stress fields inside the cluster reveals that, despite different spatial variations of strain and stresses, the local friction coefficient  $\mu$  appears to depend only on the local inertial number  $I$  as well as the local solid fraction  $\phi$ , which means that a local rheology does exist in the present non parallel flow. The key point is that the spatial variations of  $I$  inside the cluster does not depend on the sphere velocity and explore only a small range between about 0.01 and 0.1. The influence of sidewalls is then investigated on the flow and the forces.*

**Mots clefs : milieux granulaires, rhéologie, simulations, force de traînée**

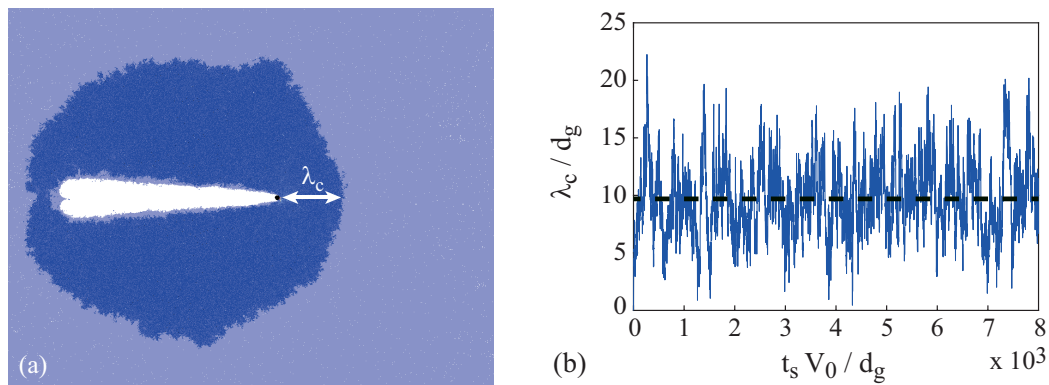


FIGURE 1 – (a) Instantané d’une simulation à compacité initiale  $\phi_0 = 0.75$ . La longueur  $\lambda_c$  correspond à la taille du cluster devant la sphère (en noire) se déplaçant de la gauche vers la droite. Les grains apparaissent bleu foncé (clair) quand il (n’y) a (pas) une force de contact entre eux. (b) Evolution temporelle de la taille du cluster  $\lambda_c$  pour  $\phi_0 = 0.4$ ,  $V_0 = 0.001 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $L_x = 8000d_g$  et  $L_y = 100d_g$ . La ligne pointillée correspond à  $\langle \lambda_c/d_g \rangle = 9.7 \pm 3.2$ .

## 1 Introduction

L’objet de l’étude est d’étudier la rhéologie locale d’un matériau granulaire en écoulement non parallèle autour d’une sphère en mouvement à vitesse constante. Nous utilisons une méthode numérique récente et puissante pour étudier le déplacement de cette sphère dans un nuage de grains initialement au repos à une fraction solide  $\phi_0$  bien en dessous de la transition de blocage (appelée aussi transition de jamming) et sans gravité. Nous rappelons d’abord les principaux résultats loin de toutes parois dans le cas où l’écoulement se passe loin des parois [1], avant de s’intéresser au confinement latéral.

## 2 Configuration de l’écoulement

La méthode numérique que nous utilisons appartient à une classe particulière de dynamique des contacts [2] et est décrite en détails dans [3]. Nous simulons le mouvement de sphères rigides dissipatives avec une loi d’impact inélastique (coefficient de restitution nul dans la direction normale et coefficient de restitution égal à 1 dans la direction tangentielle) mais sans aucune friction statique ou dynamique entre les sphères. L’empilement granulaire, constitué de sphères légèrement polydisperses pour éviter toute cristallisation éventuelle de diamètre moyen  $d_g$  et de masse volumique  $\rho$ , est contenu dans une boîte rectangulaire de taille  $L_x \times L_y = 550d_g \times 400d_g$  avec  $(x, y) = (0, 0)$  au centre de la boîte. Une sphère-intrus de plus grand diamètre  $d = 10d_g$ , qui est initialement placée à d’un côté de la boîte en  $x = -L_x/3$  et  $y = 0$ , est ensuite déplacée à vitesse constante dans la direction  $x$ . Les interactions entre les grains et les murs sont résolus en utilisant la même loi que pour l’interaction grain-grain. Initialement nous avons préparé l’empilement granulaire à la fraction solide  $\phi_0 = N(\pi d_g^2/4)/(L_x L_y - \pi d^2/4)$  toujours en-dessous de la fraction de blocage  $\phi_J \simeq 0.85$ .

Lors du déplacement de la sphère, le solveur numérique fournit la vitesse  $v_m$  de chaque particule  $m$  et la force de contact  $f_{nm}$  exercée par la particule  $n$  sur la particule  $m$ , ce qui permet de calculer le tenseur des contraintes correspondant  $\sigma^m = (4/\pi d_g^2) \sum_n e_{mn} \otimes f_{nm}$ , où  $e_{mn}$  est le vecteur unitaire dirigé du centre de la particule  $m$  vers le centre de la particule  $n$  et  $\otimes$  est le produit tensoriel. La compacité locale  $\phi_m$  autour de chaque particule est calculée à partir d’une tessellation de Voronoi. La compacité locale  $\phi$ , la vitesse locale  $v$  et le champ de contrainte  $\sigma$  en tout point du domaine sont calculés par interpolation

de ces valeurs sur une grille cartésienne. Du tenseur taux de déformation  $D_{ij} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2$ , nous extrayons le taux de dilatation  $\dot{\epsilon}$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . La force de traînée exercée par les grains sur l'intrus est calculée par  $F = -\sum_m f_{m0} \cdot e_x$ , où  $f_{m0}$  est la force de contact exercée par la particule  $m$  sur l'intrus et  $e_x$  est le vecteur unitaire suivant la direction  $x$ .

Dans la suite,  $d_g$  est choisi comme unité de longueur et  $V_0$  comme unité de vitesse, tel que  $d_g/V_0$  est choisi comme unité de temps. Comme il n'y a pas de gravité et qu'aucune pression extérieure n'est imposé dans le système, il n'y a pas d'autre échelle de pression que  $\rho V_0^2$ , qui est choisi comme unité de contraintes et  $\rho d_g^2 V_0^2$  est alors choisi comme unité de force. Les variations spatiales sont exprimées en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , où  $\theta$  est l'angle relatif à la direction  $x$  du mouvement et  $r$  la position radiale par rapport au centre de la sphère.

### 3 Resultats sans paroi

Lorsque l'intrus se déplace, il perturbe progressivement l'empilement initial et un cluster dense de grains en contact se forme et grossit comme le montre la figure 1a. La position  $r_c(\theta, t)$  du front délimitant la zone dense intérieure de la zone moins dense extérieure est extraite à travers le simple critère  $p(r > r_c) = 0$  pour chaque  $\theta$ . Dans le sillage de l'intrus, il y a une zone sans grain (apparaissant blanc sur la figure 1a) qui a déjà été analysé en détails par [4] dans des expériences bidimensionnelles. Ici, nous nous concentrons sur la zone à l'amont de l'intrus  $(-\pi/2 \lesssim \theta \lesssim \pi/2)$  qui est la région à l'origine de la force de traînée, avec des valeurs élevées de contraintes et de taux de déformations. L'extension amont  $\lambda = r_c - d/2$  du cluster est moyennée sur une faible gamme de  $\theta$  dans la direction  $x$  du mouvement  $(-5 \text{ deg} < \theta < 5 \text{ deg})$ . Comme dans des expériences 1D où un rateau se déplace [5], nous observons que la position du front  $\lambda$  évolue d'abord linéairement en temps, avec une vitesse qui est proportionnelle à la vitesse de l'intrus et qui augmente avec la compacité initiale  $\phi_0$ . Contrairement à la configuration 1D de [5], ce régime est ici transitoire et atteint un état stationnaire avec une valeur constante  $\lambda_c$  malgré des fluctuations qui peuvent être importantes (Fig. 1b). Ce régime stationnaire apparaît lorsque le flux de grains incident à l'amont est équilibré avec le flux de grains passant sur les côtés ce qui ne peut pas se produire dans la configuration 1D de [5] puisqu'aucun grain ne peut être évacué autour du rateau. Dans la suite, nous restreignons notre étude à ce régime stationnaire qui permet un moyennage en temps des différentes quantités mesurées.

La taille de ce cluster dynamique apparaissant autour de la sphère passe de quelques grains à faibles valeurs de  $\phi_0$  (e.g.  $\lambda_c \simeq 3d_g$  à  $\phi_0 = 0.3$ ) à plusieurs dizaines de grains à grandes valeurs de  $\phi_0$  (e.g.  $\lambda_c \simeq 53d_g$  à  $\phi_0 = 0.7$ ). La compacité locale  $\phi$  ne varie pas significativement dans une large gamme de  $\theta$  et est constante proche de la valeur  $\phi \simeq 0.83$  dans tout le cluster pour des valeurs de  $\phi_0$  assez grande ( $\phi_0 \gtrsim 0.6$ ), exceptée près de l'intrus où  $\phi$  décroît. La taille du cluster  $\lambda_c$  diverge à l'approche de la valeur critique  $\phi_c$  avec la loi d'échelle  $\lambda_c \simeq 1.5d_g(\phi_c - \phi_0)^{-2}$  où  $\phi_c \simeq 0.85 \pm 0.01$  correspond à la transition de blocage  $\phi_J$ .

Dans nos simulations, la seule échelle de pression provient de la pression cinétique  $\rho V_0^2$  issue du processus de collisions. Nous avons vérifié que la force de traînée exercée par les grains sur la sphère varie comme  $\rho V_0^2$  pour toute valeur de  $V_0$ . Le présent régime correspond donc à un régime inertiel à haute vitesse aussi trouvé par [6, 7] dans leur expérience bidimensionnelle d'un disque tracté à l'intérieur d'une unique couche de billes d'acier et aussi rapporté par [8] dans leur simulation numérique d'une assemblée 2D de disques sans friction avec le fond. Dans notre simulation, nous n'observons pas de régime quasi-statique à faibles vitesses où la force de traînée serait indépendante de la vitesse ou faiblement

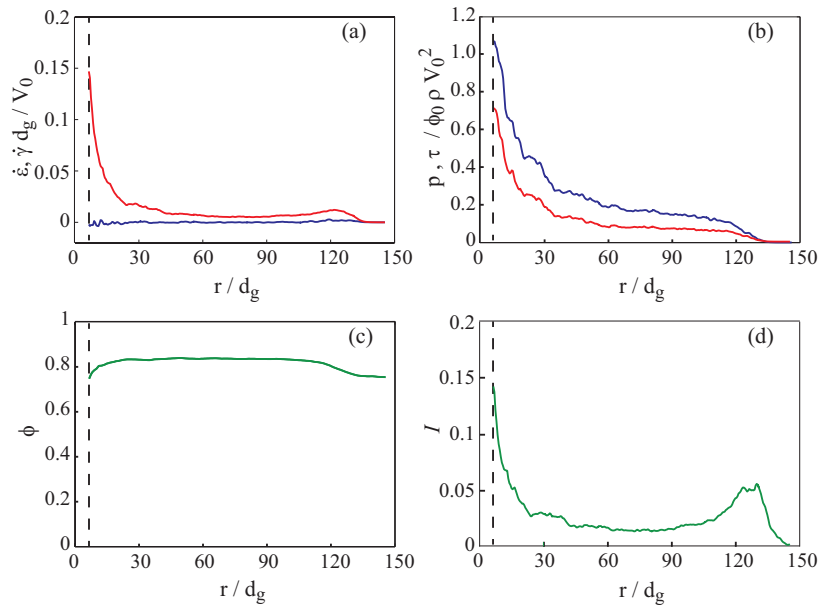


FIGURE 2 – Evolution radiale en amont de la sphère-intrus ( $\theta = 0$ ) (a) du taux de dilatation adimensionné  $\dot{\epsilon}$  (en bleu) et du taux de cisaillement adimensionné  $\dot{\gamma}$  (en rouge), (b) de la pression adimensionnée  $p$  (en bleu) et de la contrainte de cisaillement adimensionnée  $\tau$  (en rouge), (c) de la compacité  $\phi$ , et (d) du nombre d'inertie  $I$  pour une compacité initiale  $\phi_0 = 0.75$ .

dépendante. L'existence de ce régime quasi-statique est celui observé le plus souvent [9, 10, 11, 12] ; il provient de la présence d'une autre échelle de pression dans le système issue de la gravité ou de la friction solide. Nous trouvons ici que la force de traînée augmente linéairement avec la compacité initiale  $\phi_0$  selon la loi d'échelle  $F \simeq 5\phi_0\rho d_g^2 V_0^2 \simeq \phi_0\rho d d_g V_0^2/2$ . Ainsi,  $F$  ne diverge pas à l'approche de  $\phi_c$  contrairement à la taille du cluster  $\lambda_c$ . Ceci peut être expliqué par le fait que les grains à l'extérieur du cluster ne touchent pas les murs dans nos simulations.

Nous allons maintenant détailler l'écoulement dans le cluster se formant en amont de l'intrus (Fig. 2). Le taux de dilatation  $\dot{\epsilon}$  est proche de 0 dans l'ensemble du cluster excepté au front (Fig. 2a), ce qui peut se comprendre par le fait que  $\dot{\epsilon}$  et  $\phi$  sont liés par la conservation de la masse par  $\phi \dot{\epsilon} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0$ . L'écoulement peut alors être considéré comme incompressible dans le cluster sauf au front en  $r = r_c$ . On observe que le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}(r, \theta)$  est maximum près de la sphère à  $r \simeq d/2$  et décroît fortement lorsqu'on s'en éloigne avec la loi d'échelle  $\dot{\gamma}(r, 0) \simeq 4V_0 d_g / r^2$  (Fig. 2a). Le point clé est que le taux de cisaillement maximal ne dépend pas significativement de la compacité initiale  $\phi_0$  ni de sa décroissance radiale ou azimutale. Cela signifie qu'un écoulement intrinsèque apparaît près de la sphère en mouvement à l'intérieur du cluster indépendamment de l'éventuelle divergence de la longueur de ce dernier. Cet écoulement intrinsèque possède une longueur caractéristique qui ne dépend pas de  $\phi_0$  et est de taille  $d = 10d_g$ . Cette zone d'écoulement correspond à la couronne étroite à plus basse compacité  $\phi < 0.83$  (Fig. 2c).

La pression locale  $p(r, \theta)$  est maximale à la surface de la sphère en  $r \simeq d/2, \theta \simeq 0$  et décroît radialement selon la direction  $x$  (Fig. 2b). Comme il a été montré que la force de traînée sur l'intrus augmente linéairement avec  $\phi_0$ , la loi d'échelle attendue pour les contraintes n'est pas  $\rho V_0^2$  mais plutôt  $\phi_0 \rho V_0^2$ . La pression radiale devant l'intrus décroît approximativement avec la distance suivant la loi  $p(r, 0) \simeq 5.5\phi_0 \rho V_0^2 d_g / r$ . Les variations spatiales de la contrainte de cisaillement  $\tau$  sont similaires à ceux de la pression  $p$  avec toujours  $\tau < p$  (Fig. 2b).

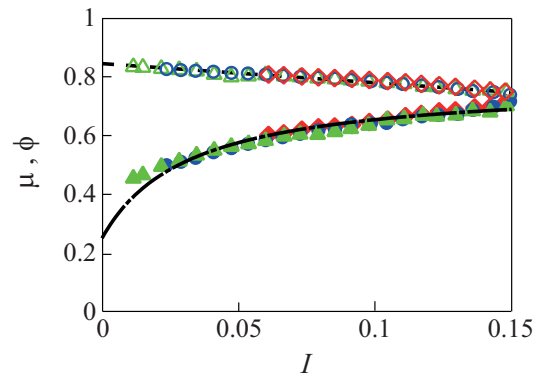


FIGURE 3 – Coefficient de friction local  $\mu = \tau/p$  (symboles pleins) et fraction solide  $\phi$  (symboles vides) en fonction du nombre d’inertie local  $I$  à l’intérieur du cluster pour différentes fractions solides  $\phi_0 = 0.5, 0.7$  and  $0.75$ . Ajustement de la forme (a)  $\mu = 0.25 + 0.53/(1 + I/0.03)$  et (b)  $\phi = 0.846(1 - 0.8I)$ .

Le fort couplage entre  $\tau$  et  $p$  signifie que le comportement rhéologique de l’empilement de grains apparaît plutôt comme frictionnel bien qu’il n’y ait pas de friction microscopique présente dans ce système. Nous testons donc l’existence d’une rhéologie locale  $\mu(I)$  [13] où le coefficient de friction local  $\mu = \tau/p$  serait lié au nombre d’inertie local  $I = \dot{\gamma}d_g/\sqrt{p}/\rho\phi$  relié au taux de cisaillement local  $\dot{\gamma}$ , à la pression locale  $p$  et la masse volumique locale  $\rho\phi$ . Comme  $\tau$  et  $p$  présente la même loi d’échelle avec  $V_0$ , le coefficient de friction local  $\mu$  ne dépend donc pas de  $V_0$ . Comme  $\dot{\gamma}$  et  $\sqrt{p}$  sont chacun proportionnel à  $V_0$ , le nombre d’inertie  $I$  qui est présent dans le cluster ne dépend pas non plus de la vitesse  $V_0$ . La seule évolution spatiale de  $I$  (Fig. 2d) provient de faibles différences dans les comportement spatiaux de  $\dot{\gamma}$  et  $\sqrt{p}$ , conjugué avec la faible évolution spatiale de  $\phi$ . Nous observons dans la figure 2d que le maximum de  $I$  ( $\sim 0.2$ ) est atteint près de l’intrus et décroît radialement. Pour le cluster le plus grand (obtenu pour  $\phi_0 = 0.75$ ), nous observons que  $I$  tend vers une valeur asymptotique proche de  $10^{-2}$ . La variations azimutales de  $I$  sont faibles.

La figure 3 montre l’évolution du coefficient de friction local  $\mu$  en fonction du nombre d’inertie  $I$ , toutes les données se rassemblent sur une courbe maîtresse ce qui signifie qu’il y a bien une rhéologie locale présente dans l’écoulement. Un ajustement empirique des données couramment utilisé  $\mu = \mu_s + (\mu_2 - \mu_s)/(1 + I/I_0)$  [14] fonctionne bien avec les valeurs  $\mu_s = 0.25 \pm 0.05$ ,  $\mu_2 = 0.78 \pm 0.02$  et  $I_0 = 0.03$ . Pour décrire complètement le comportement rhéologique des grains dans cet écoulement, la fraction solide  $\phi$  en fonction de  $I$  à l’intérieur du cluster est montrée sur cette même figure 3. Encore une fois, toutes les données se rassemblent sur une courbe maîtresse qui est bien décrite par une décroissance linéaire  $\phi = \phi_m(1 - aI)$  avec  $\phi_m = 0.846 \pm 0.002$  et  $a = 0.80 \pm 0.03$ . La valeur  $\phi_m$  est très proche de la valeur critique  $\phi_c \simeq 0.85$  mesurée pour la divergence de  $\lambda_c$ . Nous pensons que  $\phi_c$  et  $\phi_m$  correspondent au point de blocage  $\phi_J$  du système. La valeur constante de  $\phi = 0.83$  observée au coeur du cluster correspond à la valeur asymptotique minimum  $I_m \simeq 10^{-2}$  atteinte apr  $I$  dans l’écoulement. Les variations de  $\mu(I)$  et  $\phi(I)$  sont similaires à celle qui ont déjà été rapportées dans d’autres configurations d’écoulement granulaire. Dans notre configuration, le nombre d’inertie  $I$  possède une gamme d’évolution comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . Par conséquent, le coefficient de friction local  $\mu$  évolue entre 0.45 et 0.70 et la fraction solide locale  $\phi$  entre 0.75 et 0.83.

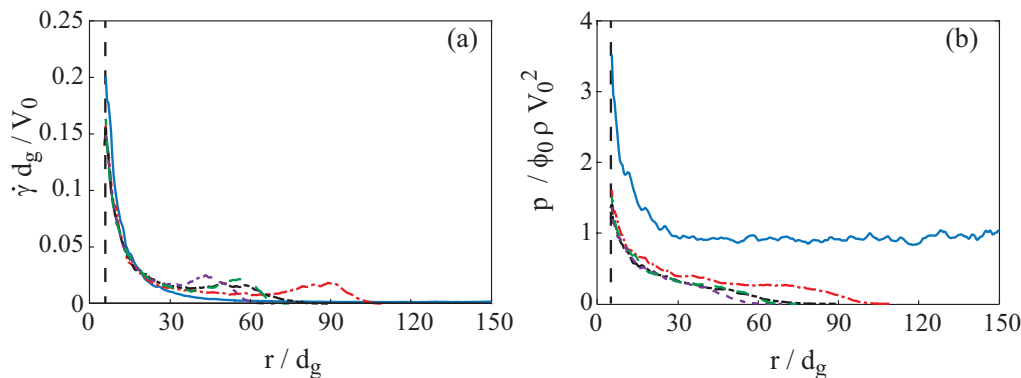


FIGURE 4 – Influence des parois. Evolution radiale (a) du taux de cisaillement adimensionné  $\dot{\gamma}$  et (b) de la pression adimensionnée  $p$  pour une compacité initiale  $\phi_0 = 0.7$  et une vitesse initiale  $V_0 = 0.001 \text{ m.s}^{-1}$  pour différents niveaux de confinement  $L_y = 40d_g$  (—),  $L_y = 100d_g$  (---),  $L_y = 200d_g$  (-.-),  $L_y = 400d_g$  (— —) et  $L_y = 800d_g$  (- -) avec  $L_x = 550d_g$ .

## 4 Influence des parois

Nous étudions maintenant l'influence des parois latérales de confinement sur le comportement de l'écoulement granulaire. En décroissant la distance entre les parois latérales  $L_y$  de  $800d_g$  à  $40d_g$ , nous observons que la force de traînée  $F$  augmente avec la taille du cluster  $\lambda_c$ . De plus, pour les forts confinements  $L_y \leq 100d_g$ , la frontière du cluster devient perpendiculaire aux murs latéraux. Ce comportement est très similaire à celui observé dans le cas des impacts expérimentaux [15]. En mesurant les invariants tensoriels à l'intérieur du cluster, nous pouvons observer que le taux de cisaillement n'est pas affecté par la présence des parois mais que la pression l'est (Fig. 4). La pression présente une valeur plateau  $p_c \neq 0$  pour de forts confinements à grande valeurs de  $r/d_g$ . Par conséquent, la pression radiale dans la direction de l'écoulement peut être approchée par  $p(r, 0) = p_c + \phi_0 \rho V_0^2 d_g / r$  où  $p_c$  est la pression de confinement associée au confinement  $L_y$ . Nous n'avons pas encore assez de données pour déterminer précisément  $p_c$  en fonction de  $L_y$ . Cependant,  $p_c$  devrait valoir 0 pour de grandes valeur de  $L_y$ .

## 5 Conclusion

Nos résultats de simulations montrent qu'il existe un régime stationnaire pour une sphère se déplaçant à vitesse constante dans un nuage de grains initialement au repos et sans contact. Loin de toutes parois, la force de traînée exercée par les grains sur la sphère en mouvement augmente linéairement avec  $\phi_0$  et ne présente pas de divergence près de  $\phi_J$  contrairement à la taille du cluster. L'écoulement granulaire obéit à une loi rhéologique locale où le coefficient de friction local  $\mu$  et la fraction solide locale  $\phi$  sont directement liés au nombre d'inertie local  $I$  même si il n'y a pas de friction microscopique entre les grains dans nos simulations. En présence de parois, la différence majeure avec la configuration précédente réside dans le changement de l'état de contrainte tandis que l'état de déformation n'est pas affecté par les parois. La pression présente une valeur plateau non nulle dans le cluster confiné qui disparaît sans confinement.

## Références

- [1] A. Seguin, A. Lefebvre-Lepot, S. Faure, P. Gondret, Eur. Phys. J. E **39**, 63 (2016)

- [2] F. Radjai, F. Dubois, *Discrete-element modeling of granular materials* (Springer, 1988)
- [3] B. Maury, Numer. Math. **102**, 649 (2006)
- [4] E. Kolb, P. Cixous, N. Gaudouen, T. Darnige, Phys. Rev. E **87**, 032207 (2013)
- [5] S. R. Waitukaitis, L. K. Roth, V. Vitelli, H. M. Jaeger, EPL **102**, 44001 (2013)
- [6] Y. Takehara, S. Fujimoto, K. Okumura, EPL **92**, 44003 (2010)
- [7] Y. Takehara, K. Okumura, Phys. Rev. Lett. **112**, 148001 (2014)
- [8] S. Takada, H. Hayakawa, J. Engin. Mech., C4016004 (2016)
- [9] M.B. Stone, R. Barry, D.P. Bernstein, M.D. Pelc, Y.K. Tsui, P. Schiffer, Phys. Rev. E **70**, 041301 (2004)
- [10] A. Seguin, Y. Bertho, P. Gondret and J. Crassous, Phys. Rev. Lett. **107**, 048001 (2011)
- [11] A. Seguin, Y. Bertho, F. Martinez, J. Crassous, P. Gondret, Phys. Rev. E **87**, 012201 (2013)
- [12] A. Seguin, C. Coulais, F. Martinez, Y. Bertho, P. Gondret, Phys. Rev. E **93**, 012904 (2016)
- [13] GDR MiDi, Eur. Phys. J. E **14**, 341 (2004)
- [14] A. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen, *Granular Media - Between Fluid and Solid* (Cambridge University Press, 2013)
- [15] A. Seguin, Y. Bertho and P. Gondret, Phys. Rev. E **78**, 010301(R) (2008)