

# Homogénéisation numérique et expérimentale d'un matériau auxétique : étude des incertitudes liées à un procédé de fabrication

J. Marty<sup>a,b,\*</sup>, N. Blal<sup>a</sup>, J. Bajolet<sup>c</sup>

a. LaMCos, Université de Lyon/INSA Lyon/UMR CNRS 5259, 20 Avenue des Sciences,  
F-69621 Villeurbanne Cedex, France.

b. ESTA LAB, 3 Rue du Dr Frery, F-90000 Belfort, France

c. Innovation plasturgie composite (IPC)

\* Email correspondant : [jeremy.marty@insa-lyon.fr](mailto:jeremy.marty@insa-lyon.fr)

## Résumé :

*L'impression 3D a démocratisé la génération et l'utilisation de structures architecturées à microstructure complexe. C'est le cas des structures auxétiques dont la structure vue à l'échelle macroscopique a un coefficient de Poisson négatif. Ces structures ont donc des propriétés matériaux utiles à de nombreux domaines comme la résistance aux chocs ou au cisaillement.*

*Dans ce projet les caractéristiques matériaux effectives d'une structure auxétique en deux dimensions sont déterminées par homogénéisation numérique et comparées au résultat expérimental. La structure sera fabriquée par une imprimante de dépôt de fil, une étude des incertitudes liées au procédé de fabrication sera réalisée avec l'homogénéisation numérique.*

## Abstract:

*Thanks to the democratization of the 3D printing process, the design of new architected structures has been promoted. Among them, the auxetic structures which have a negative effective Poisson ratio have interesting properties such as shock absorption or shear resistance.*

*In this paper, the effective materials characteristics of auxetic structures have been obtained by numerical homogenization and compared to experimental homogenization results. A numeric study of the influence of the 3D printing process will be also dedicated.*

**Mots-clés:** Homogénéisation, corrélation d'images numérique, matériaux auxétiques

## 1 Introduction

Les méthodes d'homogénéisation ont pour objectif de prédire le comportement macroscopique effectif d'un matériau hétérogène. Dans un cadre de calcul linéaire, les méthodes analytiques, semi-analytiques [1] et numériques [2] sont robustes, précises et efficaces. Pour tenir compte des incertitudes liées au procédé de fabrication (microstructure, pilotage, ...), ces méthodes doivent être couplées avec des analyses de propagation d'incertitudes à travers une étude de l'incertitude ([3]).

En parallèle des théories mathématiques sur l'homogénéisation, les techniques expérimentales se développent et en particulier la méthode de corrélation d'images numériques [4]. Il a été montré

expérimentalement que les champs de déplacement et de déformation d'une éprouvette hétérogène sont calculables grâce aux caméras haute résolution [5].

L'objectif de ce papier est de comparer le comportement effectif d'une structure hétérogène à l'aide d'une méthode d'homogénéisation numérique et d'une méthode expérimentale. Une étude numérique sur les incertitudes liées au procédé de fabrication, de l'impression 3D plastique, sera également menée.

## 2 Homogénéisation d'une structure auxétique

### 2.1 Homogénéisation numérique de la structure

Le dessin technique de la structure auxétique étudiée est présenté sur la Figure 1. L'éprouvette considérée est un biphasé constitué d'un volume élémentaire représentatif (VER) de notre structure auxétique qui est noyé dans une matrice homogène. La cellule élémentaire est dite « hexagonale réentrant » ce qui conduit à avoir un coefficient de Poisson effectif négatif.

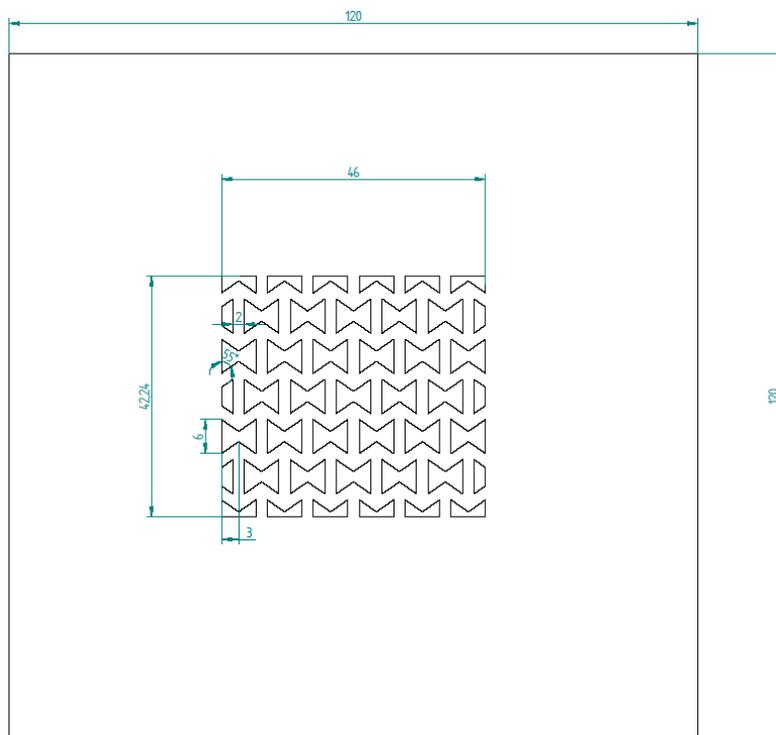


Figure 1 : Dessin technique de l'éprouvette

Le matériau considéré est de l'ABS, couramment utilisé lors d'impression 3D plastique. Ses caractéristiques élastiques (module de Young et coefficient de Poisson) sont  $E = 8 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0,4$ .

L'épaisseur de la plaque est fixée à 3 mm. L'homogénéisation numérique est menée avec le logiciel de calcul Abaqus en utilisant la toolbox HOMTOOLS [6]. Le problème considéré est uniquement plan. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur le bord de la cellule élémentaire maillée avec des éléments finis triangulaires linéaires. Une étude de convergence du maillage et du nombre de cellules élémentaires a été menée pour déterminer le Volume Élémentaire Représentatif de la structure hétérogène.

Le procédé de fabrication étant la fabrication additive par dépôt de fil, nous ne maîtrisons pas précisément la connaissance des paramètres élastiques de la matrice (le module de Young, coefficient

de Poisson, ...). Nous analyserons ainsi donc l'influence du procédé de fabrication à travers une étude des incertitudes dans la méthode d'homogénéisation en passant par des techniques de corrélation d'images numériques.

## 2.2 Homogénéisation expérimentale de la structure

L'éprouvette testée est représentée sur la Figure 2. Elle est composée d'un matériau hétérogène, noté « Mat 1 », et qui correspond au VER pour lequel on cherche le comportement effectif. Ce VER est noyé dans une matrice homogène, noté « Mat 2 ». Le comportement de « Mat 2 » est connu (déterminé expérimentalement sur une éprouvette homogène). La structure hétérogène est de même matériau que la structure homogène. L'éprouvette dont les dimensions sont données sur la Figure 1 est en matériau ABS et est obtenue par dépôt de fil.

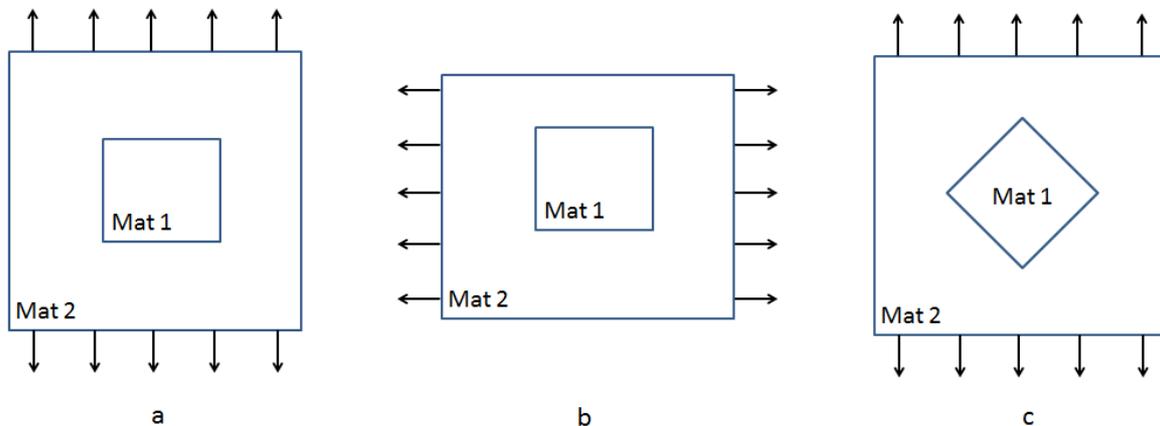


Figure 2 : Schémas représentant les trois essais unitaire : (a, b) traction uniaxiale, (c) cisaillement

Les déplacements et déformations de l'éprouvette sont suivis pendant l'essai par corrélation d'images numérique globale [4]. Des structures hétérogènes ont déjà été étudiées par corrélation d'images et il a été montré la capacité à calculer les champs de déplacement aux échelles macroscopique et microscopique d'une structure hétérogène [5]. Ici, le logiciel Ufreckles est utilisé pour calculer ces champs.

Le calcul d'homogénéisation expérimentale se base sur la méthode de corrélation d'images afin de déterminer totalement les champs de déformation et de contrainte macroscopiques. Le tenseur de souplesse élastique effectif est obtenu par la relation suivante entre les déformations et contraintes homogénéisées :

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}^h : \boldsymbol{\Sigma} \text{ ou inversement } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^h : \mathbf{E}$$

où  $\mathbf{S}^h$  et  $\mathbf{C}^h$  sont les tenseurs de souplesse et d'élasticité effectives reliant les contraintes et déformations macroscopiques définies par la moyenne spatiale :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{S} \int \boldsymbol{\sigma} dS \quad \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{S} \int \boldsymbol{\varepsilon} dS$$

Dans les deux premiers cas de chargement, une traction uniaxiale est appliquée à l'éprouvette comme défini sur les Figures 2.a et 2.b. Pour ces deux cas de chargement, la contrainte moyenne de l'essai de traction uniaxiale, notée  $\boldsymbol{\Sigma}$ , est égale à la somme pondérée des contraintes moyennes dans chacun des matériaux :

$$\boldsymbol{\Sigma} = f_1 \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + f_2 \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les fractions volumiques connues des deux matériaux. On peut donc en déduire que la contrainte moyenne dans la structure hétérogène,  $\Sigma^{(1)}$  par la relation suivante :

$$\Sigma^{(1)} = \frac{1}{f_1} (\Sigma - f_1 \Sigma^{(2)})$$

La contrainte moyenne  $\Sigma$  est obtenue avec l'essai de traction dans les deux sens directions (contrainte imposée sur le bord). La contrainte dans la structure homogène entourant le VER,  $\Sigma^{(2)}$ , est de son côté obtenue par corrélation d'images grâce à la connaissance des caractéristiques élastiques du matériau. Ainsi les composantes des deux premières lignes du tenseur de souplesse sont calculées en sollicitant longitudinalement l'échantillon dans deux directions perpendiculaires.

Pour calculer les composantes du tenseur de souplesse provenant d'une sollicitation de cisaillement, nous utilisons une éprouvette où la structure hétérogène est inclinée à  $45^\circ$  (comme représenté sur la Figure 2.c). L'inclinaison de la structure hétérogène fera que le matériau sera soumis à des sollicitations couplées de traction et cisaillement. La relation sur les moyennes des contraintes est toujours valable à l'intérieur de la structure, elle s'écrit dans ce cas :

$$\Sigma = f_1 \Sigma^{(1)} + f_2 \Sigma^{(2)}$$

Ainsi la contrainte moyenne dans la structure hétérogène (VER) se calcule par la relation suivante :

$$\Sigma^{(1)} = \frac{1}{f_1} (\Sigma - f_2 \Sigma^{(2)})$$

La contrainte moyenne  $\Sigma$  est obtenue avec l'essai de traction dans le sens longitudinal. La contrainte moyenne dans la structure homogénéisée sera quant à elle obtenue par la corrélation d'images. On peut remarquer que dans ce cas de chargement, la contrainte moyenne dans le matériau homogène peut être quelconque (mélange de traction et cisaillement) ce qui amène à déterminer les dernières composantes du tenseur de souplesse.

## 2.3 Résultats numériques sur une cellule élémentaire

Dans un premier temps, une étude de la convergence du maillage d'une cellule élémentaire (cellule représentée sur la Figure 3) a été menée. L'évolution des caractéristiques de la matrice de comportement en fonction du nombre d'éléments du maillage (N) est tracée sur la Figure 4 : les Figures 4.a à 4.d représentent respectivement l'évolution des termes normalisés de la matrice de comportement calculée ( $C_{ij}^h$ ) par rapport à la matrice de comportement du matériau microscopique ( $C_{ij}^m$ ) :  $C_{11}^h/C_{11}^m$ ,  $C_{22}^h/C_{22}^m$ ,  $C_{33}^h/C_{33}^m$ ,  $C_{12}^h/C_{12}^m$ . Les valeurs convergées des composantes de la matrice du comportement linéaire effectif sont obtenues avec le critère empirique de [7].

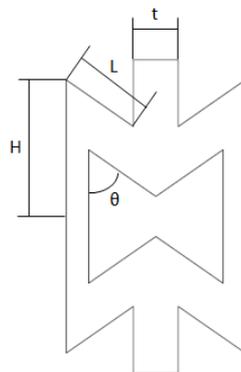
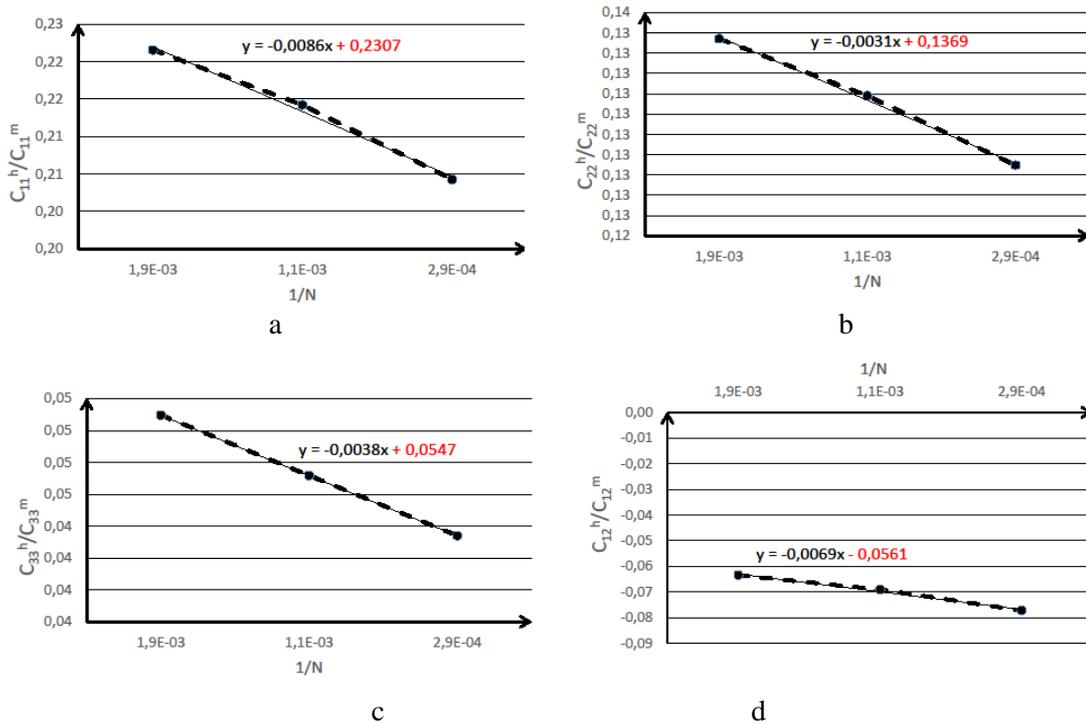


Figure 3 : Schéma de la cellule unitaire du matériau auxétique

La valeur convergée de la matrice de comportement linéaire effective très rapidement et celle-ci est donc égale à :

$$[C^h] = \begin{bmatrix} 549 & -53 & 0 \\ -53 & 325 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

On peut remarquer que le comportement effectif linéaire de la cellule unitaire est anisotrope (rigidités différentes suivant les deux axes) et que le matériau effectif est auxétique ( $C_{12}^h$  est négatif ce qui correspond à un coefficient de Poisson négatif).



**Figure 4 : Courbes de convergence des composantes de la matrice de rigidité d'une cellule élémentaire en fonction du nombre d'éléments : (a)  $C_{11}^h/C_{11}^m$ , (b)  $C_{22}^h/C_{22}^m$ , (c)  $C_{33}^h/C_{33}^m$  et (d)  $C_{12}^h/C_{12}^m$ .**

### 3 Conclusions

Cette étude vise à estimer le comportement effectif linéaire d'une structure auxétique obtenue par fabrication additive. Plus particulièrement, on cherche à analyser la propagation des incertitudes liées à ce procédé sur le comportement macroscopique. Une première étude numérique a été réalisée permettant d'estimer le tenseur d'élasticité effectif pour un comportement linéaire. Cette étude est basée sur un schéma d'homogénéisation numérique. La suite de ce travail consiste à confronter les résultats numériques à des résultats expérimentaux sur la base d'une approche de corrélation d'images numériques. L'effet des différents paramètres du procédé sur le comportement effectif peut être ainsi quantifié et étudié.

**Remerciements** : les auteurs tiennent à remercier I. Khedimi et L. Vandramini (INSA-Lyon) pour leur aide.

## Références

- [1] Sanchez-Palencia, E., & Zaoui, A. (1987). Homogenization techniques for composite media. In *Homogenization Techniques for Composite Media* (Vol. 272).
- [2] Bornert, M., Bretheau, T., & Gilormini, P. (2001). Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1: Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques (pp. 250-pages). Hermes science.
- [3] S. Sakata, F. Ashida, T. Kojima, M. Zako. Three-dimensional stochastic analysis using a perturbation- based homogenization method for elastic properties of composite material considering microscopic uncertain. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 894–907
- [4] Besnard, G., Hild, F., & Roux, S. (2006). “Finite-element” displacement fields analysis from digital images: application to Portevin–Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6), 789-803.
- [5] Marty, J., Réthoré, J., Combescure, A., & Chaudet, P. (2015). Finite strain kinematics of multi-scale material by digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 55(9), 1641-1656.
- [6] Leujeunes, S., Bourgeois, S. 2011. Une Toolbox Abaqus pour le calcul de propriétés effectives de milieu hétérogènes. Acte CSMA 2011, Giens.
- [7] Roberts, A., Garboczi, E., 2001. Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids. *Acta Mater.* 49 (2), 189–197.