

Limites de Rayleigh des nombres d'onde effectifs dans une matrice poroélastique contenant des cylindres parallèles aléatoirement répartis

D. GNADJRO^{a, b}, A. D'ALMEIDA^b, H. FRANKLIN^a

- a. Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC) UMR CNRS 6294 Université du Havre
76600 Le Havre + dgnadjro@gmail.com, herve.franklin@univ-lehavre.fr
b. Département de Mathématiques, Université de Lomé, Togo + dal_me@yahoo.fr

...

Résumé :

Les nombres d'onde effectifs des ondes cohérentes se propageant dans une matrice poroélastique contenant des cavités cylindriques parallèles réparties aléatoirement dans l'espace sont déduits à la limite de Rayleigh pour les formules explicites de l'Approximation de diffusion indépendante (ISA), de Waterman-Truett (WT) et de Linton-Martin (LM). La validité de ces nombres d'onde effectifs approximatifs est vérifiée en les comparant à ceux des formules exactes à l'aide de calculs numériques

Abstract :

The effective wavenumbers of the coherent waves propagating in a poroelastic matrix containing randomly distributed parallel cylindrical cavities are deduced in the Rayleigh limit for three explicit formulas : Independent Scattering Approximation (ISA), Waterman-Truett (WT) and Linton-Martin (LM). The validity of these effective wavenumbers is checked numerically by comparing them with the exact formulas.

Mots clés : Nombres d'ondes effectifs, milieu poroélastique, ondes cohérentes.

1 Introduction

On considère le problème de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu poreux contenant une distribution aléatoire d'inhomogénéités. Les résultats ont de nombreuses applications en géophysique et en évaluation non-destructive des matériaux. On considère le cas où les inhomogénéités sont des cavités cylindriques circulaires remplies par un fluide identique au fluide saturant. Dans le milieu poroélastique sans inhomogénéités, il se propage trois types d'ondes : une

rapide (1), une lente (2) et une transversale (t). Lors de l'incidence d'une onde d'un type donné sur une cavité de rayon a , les conversions de modes aux interfaces eau-cylindre donnent lieu à des ondes diffusées de type 1, 2 et t. L'onde cohérente, qui résulte d'une moyenne statistique sur toutes les configurations possibles de diffuseurs, fait apparaître le milieu hétérogène comme un milieu homogène possédant une atténuation et une vitesse de phase différentes des ondes 1, 2 et t. La propagation dans le milieu aléatoire est alors gouvernée par des nombres d'ondes effectifs dépendant de la fréquence que nous présentons plus en détail dans la suite. Les développements analytiques sont présentés uniquement dans le cas où l'onde longitudinale rapide (référéncée par 1) est incidente sur les cavités.

2 Rappel des modèles de diffusion multiple

Waterman et Truell [1] ont obtenu en 1961 un modèle de diffusion multiple pour des sphères aléatoirement distribuées dans un milieu fluide avec une densité (nombre de diffuseurs par unité de volume) n_0 . On considère ici le cas de cavités cylindriques identiques d'axes parallèles et de rayon a . Elles sont aléatoirement distribuées dans une matrice proélastique saturée du même fluide que celui remplissant les cavités, avec un nombre de diffuseurs par unité de surface égal ici aussi noté n_0 . La direction de propagation de l'onde plane incidente (de nombre d'onde k_α où $\alpha=1,2$ ou t) est perpendiculaire aux axes des cylindres. Généralisant la formule de Waterman et Truell, Conoir *et al.* [2] ont montré que celle-ci est encore valable pour chaque type d'ondes considéré séparément (les phénomènes de conversion sont négligeables). Elle prend alors la forme

$$\left(\frac{\xi}{k_\alpha}\right)_{WT}^2 = \left[1 - \frac{2in_0}{k_\alpha^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - (-1)^n) T_n^{\alpha\alpha}\right)\right] \left[1 - \frac{2in_0}{k_\alpha^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + (-1)^n) T_n^{\alpha\alpha}\right)\right]. \quad (1)$$

où $|n_0/k_\alpha^2| \ll 1$. Les séries $\sum_n T_n^{\alpha\alpha}$ et $\sum_n (-1)^n T_n^{\alpha\alpha}$ décrivent, respectivement, la diffusion vers l'avant (forward scattering) et la rétrodiffusion (backward scattering) d'un cylindre. Les termes $T_n^{\alpha\alpha}$ représentent les coefficients de diffusion simple d'un cylindre dans le mode $n \in Z$. L'Independent Scattering Approximation (ISA) apparaît alors comme une approximation simpliste, qui peut être déduite de la formule de Waterman et Truell en négligeant le terme du second ordre en n_0/k_α^2 . On obtient alors

$$\left(\frac{\xi}{k_\alpha}\right)_{ISA}^2 = 1 - \frac{4in_0}{k_\alpha^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{\alpha\alpha}, \quad (2)$$

c'est-à-dire que l'on tient compte uniquement de la diffusion vers l'avant. Les travaux de Linton et Martin [3], en vue d'améliorer le modèle de WT, conduisent à la formule suivante du nombre d'onde effectif :

$$\left(\frac{\xi}{k_\alpha}\right)_{LM}^2 = 1 + \frac{n_0}{k_\alpha^2} \delta_1^\alpha + \frac{n_0^2}{k_\alpha^4} (\delta_2^{\alpha(0)} + \delta_2^{\alpha(c)}) + O\left(\frac{n_0^3}{k_\alpha^6}\right), \quad (3)$$

toujours sous l'hypothèse $|n_0/k_\alpha^2| \ll 1$. Ici

$$\delta_1^\alpha = -4i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{\alpha\alpha}, \quad (4)$$

$$\delta_2^{\alpha(0)} = -8 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |m-n| T_m^{\alpha\alpha} T_n^{\alpha\alpha}, \quad \delta_2^{\alpha(c)} = -16 \sum_{\substack{\beta=1,2,t \\ \beta \neq \alpha}} \delta_2^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

$$\delta_2^{\alpha\beta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-\kappa_{\alpha\beta}^{-2}} (\kappa_{\alpha\beta})^{|m-n|} T_m^{\beta\alpha} T_n^{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Les termes δ_1^α et $\delta_2^{\alpha(0)}$ mettent en jeu uniquement les coefficients de diffusion $T_n^{\alpha\alpha}$ (pas de conversion de modes) et sont identiques aux expressions trouvées dans le cas où le milieu hôte est un fluide parfait. Les conversions de modes représentées par les coefficients de diffusion $T_n^{\alpha\beta}$ intervenant lors de chaque processus de diffusion sont prises en compte dans le terme $\delta_2^{\alpha(c)}$. La lettre α représente l'onde incidente, la lettre β l'onde diffusée, et de plus $T_{-n}^{\alpha\beta} = T_n^{\alpha\beta}$. Dans l'Eq. (6), on a posé $\kappa_{\alpha\beta} = k_\alpha/k_\beta$. La validité de l'Eq. (3) a été discutée dans [4]. Notons que dans le cas particulier de diffuseurs localisés, les modèles discutés ici dérivent tous de l'approximation quasi-cristalline (QCA) de Lax [5].

Les développements aux basses fréquences des coefficients de diffusion montrent que le coefficient de diffusion $T_n^{\alpha\beta}$ est $O(k_\alpha^2 a^2)$ si $n \in \{0, 1, 2\}$ et $O(k_\alpha^4 a^4)$ si $n = 3$. Par conséquent, les séries dans les équations représentant les nombres d'onde effectifs, Eqs. (3-5), peuvent être remplacées par des sommes partielles allant de $n = -2$ à $n = 2$, c'est-à-dire que

$$\delta_1^\alpha = -4i [T_0^{\alpha\alpha} + 2T_1^{\alpha\alpha} + 2T_2^{\alpha\alpha}], \quad (7)$$

$$\delta_1^{\alpha(0)} = -32 [T_0^{\alpha\alpha} T_1^{\alpha\alpha} + 2T_0^{\alpha\alpha} T_2^{\alpha\alpha} + T_1^{\alpha\alpha} T_1^{\alpha\alpha} + 4T_1^{\alpha\alpha} T_2^{\alpha\alpha} + 2T_2^{\alpha\alpha} T_2^{\alpha\alpha}], \quad (8)$$

$$\delta_2^{\alpha\beta} = \frac{2}{1-\kappa_{\alpha\beta}^{-2}} \left\{ \frac{1}{2} T_0^{\beta\alpha} T_0^{\beta\alpha} + (1+\kappa_{\alpha\beta}^2) T_1^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + (1+\kappa_{\alpha\beta}^4) T_2^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} (T_0^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + T_1^{\beta\alpha} T_0^{\alpha\beta}) \right. \\ \left. + \kappa_{\alpha\beta}^2 (T_2^{\beta\alpha} T_0^{\alpha\beta} + T_0^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta}) + (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}^3) (T_2^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + T_1^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta}) \right\}. \quad (9)$$

Dans le cas d'une onde longitudinale incidente rapide ($\alpha = 1$), on notera que $\beta = 2$ ou t . La formule (9) introduite dans le terme de couplage $\delta_2^{\alpha(c)}$ permet d'en obtenir une expression approchée.

3 Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs

Posons $x_\alpha = k_\alpha a$ et examinons le cas où l'onde incidente sur les diffuseurs est l'onde rapide. Aux basses fréquences où $|x_\alpha| \ll 1$, on a les approximations suivantes pour les coefficients de diffusion (cf. aussi Réf. [6]) :

$$T_0^{11} = i \frac{\pi}{4} x_1^2 [B_0^{11} - 1] + O(x_1^4), \quad B_0^{11} = \frac{\kappa_{01}^2 \rho_{f1} / \rho_0 - \kappa_{t1}^2 (1 + \gamma_2) R_1}{\Delta_0}, \quad (10)$$

$$T_0^{12} = i \frac{\pi}{4} x_1^2 B_0^{12} + O(x_1^4), \quad B_0^{12} = \frac{\kappa_{t1}^2 (1 + \gamma_1) R_1 - \kappa_{01}^2 \rho_{f1} / \rho_0}{\Delta_0}, \quad (11)$$

$$T_0^{1t} = 0 \quad B_0^{1t} = 0, \quad (12)$$

$$T_1^{11} = -i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_1^{11} + O(x_1^4), \quad B_1^{11} = \frac{(1+\gamma_1)(1+R_2) + (\gamma_2 - \gamma_t)R_1 - \rho_{f1}/\rho_0 + (\rho_{f2}\rho_1 - \rho_{f1}\rho_2)/\rho_0\rho_t}{\Delta_1} \quad (13)$$

$$T_1^{12} = i\frac{\pi}{4}x_1x_2 B_1^{12} + O(x_1^4), \quad B_1^{12} = \frac{(1+\gamma_1)(1+R_1) + (\gamma_1 - \gamma_t)R_1 - \rho_{f1}/\rho_0}{\Delta_1}, \quad (14)$$

$$T_1^{1t} = i\frac{\pi}{4}x_1x_t B_1^{1t} + O(x_1^4), \quad B_1^{1t} = \frac{(1+\gamma_1)(R_1 - R_2) - (\gamma_1 - \gamma_2)R_1 - (\rho_{f2}\rho_1 - \rho_{f1}\rho_2)/\rho_0\rho_t}{\Delta_1}, \quad (15)$$

$$T_2^{11} = -\frac{i\pi}{4}(k_1a)^2 B_2^{11} + O((k_1a)^4), \quad B_2^{11} = \frac{\kappa_{1t}^2 [\gamma_t - \gamma_2 - \rho_{f2}/\rho_0]}{\Delta_2}, \quad (16)$$

$$T_2^{12} = \frac{i\pi}{4}(k_1a)^2 B_2^{12} + O((k_1a)^4), \quad B_2^{12} = \frac{\kappa_{2t}^2 [\gamma_t - \gamma_1 - \rho_{f1}/\rho_0]}{\Delta_2}, \quad (17)$$

$$T_2^{1t} = -\frac{i\pi}{4}(k_1a)^2 B_2^{1t} + O((k_1a)^4), \quad B_2^{1t} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1 - (\rho_{f1} - \rho_{f2})/\rho_0}{\Delta_2}, \quad (18)$$

où $\kappa_{\alpha\beta} = k_\alpha/k_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) et où

$$R_\alpha = \frac{\rho_\alpha - \rho_{f\alpha}}{\rho_t} \quad (19)$$

$$\Delta_0 = \gamma_1 - \gamma_2, \quad (20)$$

$$\Delta_1 = (1+\gamma_2)(1+R_1) - (1+\gamma_1)(1+R_2) - (1+\gamma_t)(R_1 - R_2) - \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_t}\right) \frac{\rho_{f1}}{\rho_0} + \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_t}\right) \frac{\rho_{f2}}{\rho_0}, \quad (21)$$

$$\Delta_2 = (1+\gamma_2)R_1 - (1+\gamma_1)R_2 + (1+\gamma_t)(R_2 - R_1) - \frac{\rho_2}{\rho_t} \frac{\rho_{f1}}{\rho_0} + \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{\rho_{f2}}{\rho_0}. \quad (22)$$

Les termes $B_n^{\alpha\beta}$, Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 dépendent de la fréquence et des propriétés mécaniques des matériaux en présence, c'est-à-dire des masses volumiques ρ_j ($j = 1, 2, t$), ρ_{fj} ($j = 1, 2$) et des coefficients de couplage γ_j ($j = 1, 2, t$) explicités dans [7]. Ils ne dépendent pas du rayon a des cylindres. En introduisant les développements de Taylor ci-dessus dans la formule (3) de Linton et Martin, on obtient

$$\left(\frac{\xi_{1eff}}{k_1}\right)_{LM}^2 = 1 + c[B_0^{11} - 1 - 2B_1^{11} - 2B_2^{11}] + 2c^2 \left[(B_1^{11})^2 + 4B_1^{11}B_2^{11} + 2(B_2^{11})^2 - (B_0^{11} - 1)B_1^{11} - 2(B_0^{11} - 1)B_2^{11} \right] + O(c^3) \quad (23)$$

où $c = n_0\pi a^2$ désigne la concentration de diffuseurs. On peut encore écrire (23) sous la forme

$$\left(\frac{\xi_{1eff}}{k_1}\right)_{LM}^2 = \left[1 + c(B_0^{11} - 1 + 2B_2^{11}) \right] \times \left[1 - 2c(B_1^{11} + 2B_2^{11}) + 2c^2(B_1^{11} + (3 + \sqrt{3})B_2^{11})(B_1^{11} + (3 - \sqrt{3})B_2^{11}) \right] \quad (24)$$

qui est alors exacte à l'ordre c^2 . Dans les cas de l'ISA et de WT, on obtient respectivement

$$\left(\frac{\xi_{1eff}}{k_1}\right)_{ISA}^2 = 1 + c(B_0^{11} - 1 - 2B_1^{11} - 2B_2^{11}), \quad (25)$$

et

$$\left(\frac{\xi_{1eff}}{k_1}\right)_{WT}^2 = [1 + c(B_0^{11} - 1 - 2B_2^{11})][1 - 2cB_1^{11}]. \quad (26)$$

3 Validité des limites de Rayleigh

En vue d'illustrer les nombres d'onde effectifs fournis par la formule de Linton Martin, on prend comme milieu poreux le QF20 qui obéit à la théorie de Biot [8] (pour les données, cf. Tableau 1 de la référence [6]). Les coefficients de diffusion sont comparés dans le cas de cavités cylindriques de rayon $a = 10^{-3}$ m, Figure 1. On remarque qu'aux fréquences suffisamment basses, les courbes continues (coefficients exacts que l'on peut calculer en utilisant les formules en annexe de la référence [6]) et les courbes en pointillé (approximations Eqs. (10-18)) diffèrent peu. Cette différence tend à croître lorsque le mode n augmente. A n fixé, la différence entre les coefficients exacts et approximatés augmente avec la fréquence. Ainsi dans le domaine des basses fréquences, les développements limités fournis peuvent être considérés comme suffisamment précis. Les coefficients de diffusion approchés pourront donc être utilisés avec fiabilité afin d'obtenir les développements asymptotiques des nombres effectifs. Il faut noter que, lorsque l'on fait varier la porosité du milieu hôte, ces coefficients évoluent, puisque tous les coefficients $B_n^{\alpha\beta}$ des Eqs. (10-18) dépendent de la porosité. Pour des valeurs de la porosité inférieures à 10^{-2} les développements de Taylor arrêtés au second ordre ne sont plus valables. Il faut procéder à une étude asymptotique plus fine.

Les calculs numériques relatifs aux vitesses et aux atténuations effectives tirées de nombres d'onde effectifs $(\xi_{1eff}/k_1)_{LM}^2$ sont présentés sur la figure 2. On remarque que les vitesses des ondes rapide et transversale diminuent lorsque l'on introduit des cavités dans le milieu poreux tandis que la vitesse de l'onde lente change peu. Aux basses fréquences, les atténuations des ondes rapide et transversale augmentent très légèrement en présence de diffuseurs. L'atténuation de l'onde lente, elle, diminue de façon monotone jusqu'à environ 12 kHz. Au-delà de cette fréquence elle augmente (même observation pour les ondes rapide et transversale).

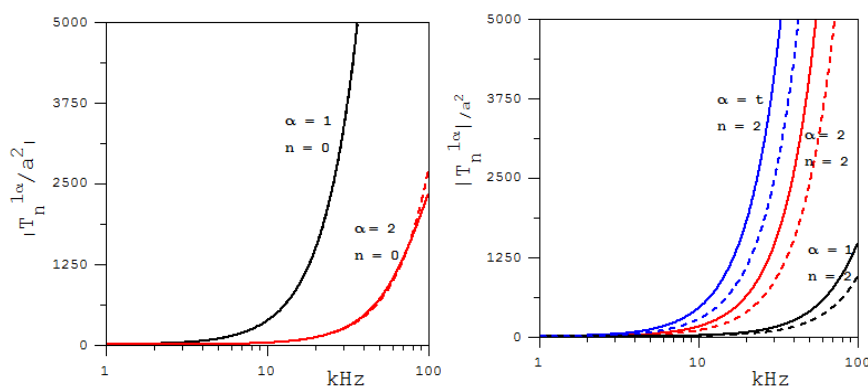


Figure 1 : comparaison des coefficients de diffusion pour les modes $n = 0$ et $n = 2$ en fonction de la fréquence. Trait continu : formule exacte, trait en pointillé : formule approchée. Les couleurs noire,

rouge et bleue correspondent respectivement aux ondes diffusées rapide $\alpha = 1$, lente $\alpha = 2$ et transversale $\alpha = t$.

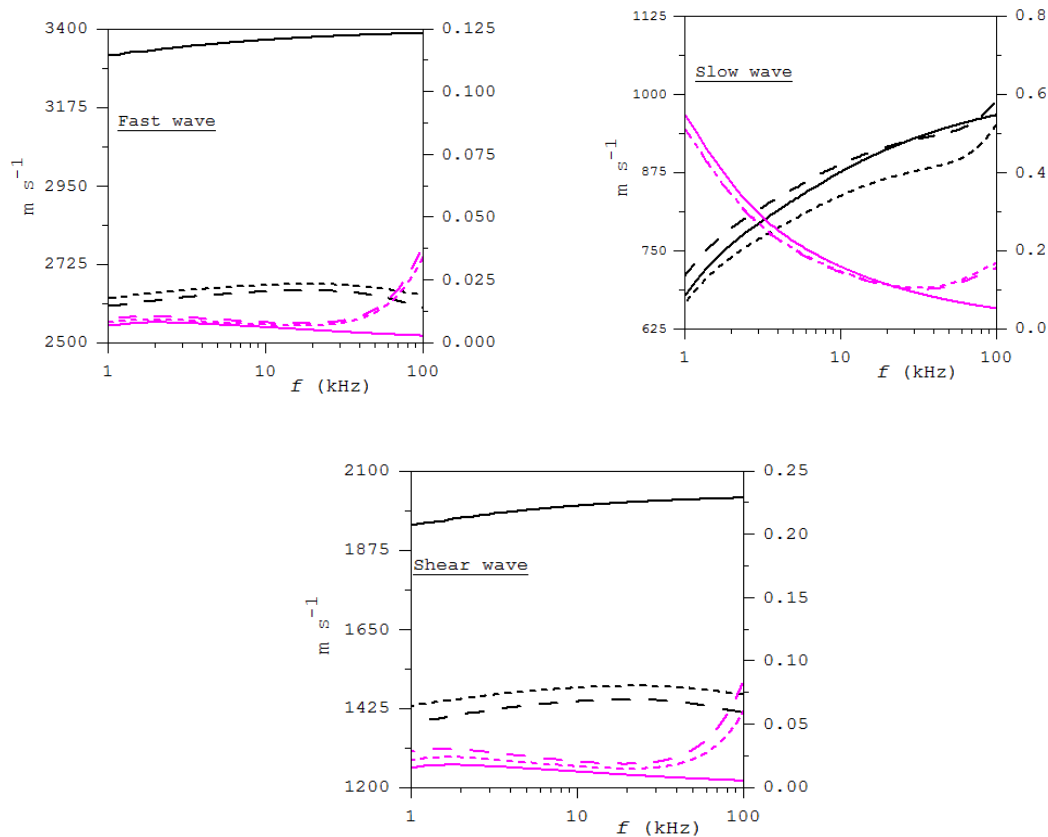


Figure 2 : Les couleurs noire et magenta indiquent respectivement les vitesses (axe vertical gauche) et les atténuations (axe vertical droit). Caractéristiques des ondes rapide, lente et transversale dans le milieu poreux (QF20) sans diffuseurs (vitesses et atténuations en continu) comparées à celles des ondes cohérentes rapide lente et transversale en présence de diffuseurs cylindriques de rayon $a=10^{-3}$ m (vitesses et atténuations en pointillé lorsque l'on tient compte uniquement du premier ordre en concentration et en trait discontinu long lorsque l'on tient compte du second ordre en concentration).

4 Conclusion

Des approximations basses fréquences ont été obtenues pour les nombres d'ondes effectifs des ondes cohérentes se propageant dans un milieu poreux contenant une distribution aléatoire de cavités cylindriques identiques remplies du même fluide que le fluide saturant. Dans le cas d'une onde incidente rapide, des expressions explicites sont fournies à partir desquelles on pourra par la suite estimer certaines grandeurs caractéristiques telles que les modules effectifs et les masses volumiques effectives.

Références

- [1] P. C. Waterman, R. Truell, Multiple scattering of waves, J. Math. Phys. 2 (1961) 512-537.

- [2] J.-M. Conoir, A. N. Norris, F. Luppé, Generalization of the Waterman & Truell formula for an elastic medium containing random configurations of cylinders, Actes du 10^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Lyon, 12-16 avril 2010.
- [3] C. M. Linton, P. A. Martin, Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : second order corrections for the effective wavenumber, *J. Acoust. Soc. Am.* 117 (6), 3413-3423.
- [4] J.-M. Conoir, A. N. Norris, Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing a random configurations of cylindrical scatterers, *Wave Motion* 47 (2010), 183-197.
- [5] M. Lax, Multiple scattering of waves *Rev. Modern Phys.* 23 (1951) 287-310.
- [6] H. Franklin, F. Luppé, J.-M. Conoir, Multiple scattering in porous media : comparison with water saturated double porosity media, *J. Acoust. Soc. Am.* 135 (5) (2014), 2513-2522.
- [7] F. Luppé, J.-M. Conoir, H. Franklin, Scattering by a fluid cylinder in a porous medium : Application to trabecular bone, *J. Acoust. Soc. Am.* 111 (2002) 2573-2582
- [8] M. A. Biot, Theory of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I : low frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (1956) 168-178.