

Convection thermique d'un fluide diélectrique confiné dans un anneau cylindrique en rotation auquel sont appliqué un gradient de température et une tension électrique alternative

A. MEYER^a, C. KANG^a, H. YOSHIKAWA^b & I. MUTABAZI^a

a. Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC), UMR6294 CNRS-Université Le Havre Normandie, Normandie Université – 53, rue de Prony, 76058 Le Havre Cedex, France

b. Laboratoire J-A Dieudonné (LJAD) – CNRS : UMR7151, Université de Nice Sophia Antipolis – Parc Valrose, 06108 Nice Cedex, France

Résumé :

Un fluide diélectrique présentant une inhomogénéité de permittivité électrique et soumis à un champ électrique alternatif de haute fréquence subit une force diélectrophorétique (DEP). Cette force peut être vue comme une poussée thermique générée par une gravité artificielle de nature électrique. On considère un fluide diélectrique confiné dans un anneau cylindrique en rotation autour de son axe. Les surfaces cylindriques sont des électrodes maintenues à des températures différentes afin d'induire le gradient de permittivité. Ainsi, deux gravités génèrent des poussées thermiques: l'accélération centrifuge due à la rotation de l'anneau cylindrique, et la gravité électrique centripète associée à la force DEP. A l'aide de l'analyse de stabilité linéaire, les différents modes d'instabilité pilotés par les deux poussées sont décrits dans le diagramme d'états caractérisé par deux nombres de Rayleigh Ra et L associés à chacune des poussées.

Abstract:

A dielectric fluid with an inhomogeneous electric permittivity and submitted to an alternating electric field of high frequency undergoes a dielectrophoretic (DEP) force. This force can be seen as a thermal buoyancy generated by an artificial electric gravity. We consider a dielectric fluid confined in a cylindrical annulus rotating about its axis. The cylindrical surfaces are electrodes maintained at different temperatures which induce the permittivity gradient. Thereby, two gravities generate thermal buoyancies: the centrifugal acceleration due to the cylindrical annulus rotation, and the centripetal electric gravity associated to the DEP force. Using the linear stability analysis, the instability modes driven by the two buoyancies are described by a state diagram spanned by two Rayleigh numbers associated with each of the buoyancy forces.

Mots clefs : anneau cylindrique, liquide diélectrique, gradient de température, champ électrique, poussée centrifuge, poussée diélectrophorétique

1 Introduction

L'effet du champ électrique sur un liquide diélectrique sous un gradient de température donne la possibilité de contrôler l'écoulement et d'améliorer le transfert thermique. En particulier, dans une géométrie cylindrique ou sphérique, la convection thermique peut être réalisée sous un champ de force central. En plus de l'intérêt pour les applications techniques telles que la réduction du volume de systèmes thermique, la force DEP peut être utilisée comme modèle pour l'étude de la convection à l'intérieur des planètes ou des étoiles. En géométrie cylindrique, Chandra et Smylie [1] ont mesuré l'amélioration du transfert thermique à l'aide de la force DEP. Yoshikawa et al. [2] ont réalisé l'analyse de stabilité du problème en conditions d'apesanteur et ont obtenu des modes critiques sous forme d'hélices stationnaires. L'existence de ces modes a été confirmée numériquement [3] et expérimentalement lors d'expériences en vol parabolique [4]. En plus de cette force de nature électrique, la rotation des cylindres peut également modifier les conditions de stabilité grâce à l'action de la poussée centrifuge. Dans ce cadre, Busse [5] a montré l'existence de cellules de convection dont l'axe est parallèle à l'axe des cylindres lorsque le cylindre extérieur est plus chaud que le cylindre intérieur. La combinaison de la force DEP et de la rotation du cylindre intérieur [6] entraîne une complexification des mécanismes d'instabilité à travers l'apparition de 5 modes d'instabilités aux propriétés spatio-temporelles différentes. Dans cet article, nous présentons des résultats d'analyse de stabilité linéaire de l'action combinée de la force DEP et de la rotation solide de l'anneau cylindrique. La section 2 introduira les équations régissant le système et la méthode de résolution employée. Les résultats sont présentés en section 3 et la section 4 est dédiée à la conclusion.

2 Analyse théorique

On considère un fluide diélectrique incompressible de densité ρ , de viscosité cinématique ν , de diffusivité thermique κ et de permittivité ε , confiné dans un anneau cylindrique en rotation à la fréquence Ω . Le cylindre intérieur de rayon R_1 , est maintenu à la température T_1 , et le cylindre extérieur de rayon R_2 est maintenu à la température T_2 . Une différence de potentiel électrique alternative de haute fréquence est appliquée entre les deux cylindres, créant un champ électrique radial \vec{E} dans l'entrefer. Le gradient de température induit une stratification de la masse volumique du fluide $\rho(T)$, et de sa permittivité $\varepsilon(T)$. L'accélération centrifuge due à la rotation de l'anneau cylindrique agit sur le gradient de masse volumique pour donner lieu à la poussée centrifuge \vec{F}_c . De façon analogue, le champ électrique agit sur la stratification de permittivité pour donner lieu à la poussée thermoélectrique \vec{F}_{DEP} . Ces deux poussées s'écrivent :

$$\vec{F}_c = -\alpha\rho_2(T-T_2)\vec{g}_c ; \quad \vec{F}_{DEP} = \vec{\nabla} \left(\frac{\varepsilon_2 e \vec{E}^2 (T-T_2)}{2} \right) - \rho_2 \alpha (T-T_2) \vec{g}_e \quad (1)$$

où α et e sont respectivement les coefficients d'expansion linéaire de la masse volumique et de la permittivité tels que $\rho(T) = \rho_2[1-\alpha(T-T_2)]$ et $\varepsilon(T) = \varepsilon_2[1-e(T-T_2)]$. ρ_2 et ε_2 sont respectivement la masse volumique et la permittivité du fluide à la température de référence T_2 . Le terme conservatif dans l'expression de la force DEP ne jouera de rôle qu'en présence d'une interface et peut être incorporé dans le terme de pression dans notre cas. La gravité centrifuge et celle électrique sont données par :

$$\vec{g}_c = \Omega^2 r \vec{e}_r ; \quad \vec{g}_e = \vec{\nabla} \left(\frac{e \varepsilon_2 \vec{E}^2}{2 \alpha \rho_2} \right) \quad (2)$$

2.1 Mise en équations

On suppose la fréquence du potentiel électrique grande devant l'inverse du temps caractéristique de dissipation visqueuse $\tau_v = d^2/\nu$ et devant celle du temps caractéristique de diffusion thermique $\tau_\kappa = d^2/\kappa$. On peut alors considérer que le fluide est soumis à une tension continue de valeur effective V_0 . Par la suite, le problème est rendu sans dimension en utilisant l'épaisseur de l'entrefer entre les deux cylindres $d = R_2 - R_1$ comme échelle de longueur, le temps caractéristique de dissipation visqueuse τ_v comme échelle de temps, l'écart de température $\Delta T = T_1 - T_2$ comme échelle de température et la tension électrique effective V_0 comme échelle de potentiel électrique. L'approximation de Boussinesq généralisée [7] est adoptée et on utilise le repère cylindrique (r, φ, z) en rotation autour de l'axe z à la fréquence Ω . Les équations gouvernant la vitesse $\vec{u} = (u, v, w)$, la température $\Theta = (T - T_2) / \Delta T$, et le potentiel électrique ϕ sont l'équation de continuité, les équations de conservation de la quantité de mouvement, l'équation de l'énergie et la loi de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3-a)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} \pi + \nabla^2 \vec{u} - \tau(1 - \gamma_a \theta)(\vec{e}_z \times \vec{u}) - f(\eta) \frac{Ra}{Pr} \theta \vec{e}_r - \frac{L}{Pr} \theta \vec{g}_e \quad (3-b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (3-c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot [(1 - \gamma_e \theta) \vec{\nabla} \phi] = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (3-d)$$

où $\tau = 2\Omega d^2$ est le nombre de Coriolis, $\eta = R_1 / R_2$ est le rapport des rayons des cylindres, $\gamma_a = \alpha \Delta T$ est le paramètre d'expansion thermique, $\gamma_e = e \Delta T$ est le paramètre thermoélectrique et $Pr = \nu / \kappa$ est le nombre de Prandtl. Le nombre de Rayleigh $Ra = \gamma_a \Omega^2 R_0 d^4 / \nu \kappa$ est défini à la position radiale médiane sans dimension $R_0 = (1 + \eta) / 2(1 - \eta)$. Il vient alors $f(\eta) = R_0^{-1}$. Le nombre de Rayleigh électrique $L = \gamma_e g_{e,0} d^3 / \nu \kappa$ où la gravité électrique est définie à la position médiane : $g_{e,0} = g_e(R_0)$. La pression généralisée π inclut le terme conservatif de la force DEP. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad \theta = 1, \quad \phi = 1, \quad \text{en } r = \eta / (1 - \eta) \quad (\text{surface intérieur}) \quad (4-a)$$

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad \theta = 0, \quad \phi = 0, \quad \text{en } r = 1 / (1 - \eta) \quad (\text{surface extérieur}) \quad (4-b)$$

L'état de base est un état stationnaire, axisymétrique et invariant par translation axiale. Le système d'équation (3) donne alors comme solutions pour la température et le potentiel électrique :

$$\Theta(r) = \frac{\ln[(1 - \eta)r]}{\ln(\eta)} \quad \text{et} \quad \Phi(r) = \frac{\ln(1 - \gamma_e \Theta)}{\ln(1 - \gamma_e)} \quad (5)$$

La gravité électrique de l'état de base est généralement centripète et s'écrit :

$$\vec{G}_e(r) = -\frac{e \varepsilon_2 V_0^2}{\rho_2 \alpha (\ln \eta)^2} \frac{F(\gamma_e, \eta, r)}{r^3} \vec{e}_r \quad (6)$$

La fonction F peut générer une gravité électrique centrifuge lorsque η et γ_e sont importants [2].

2.2 Analyse de stabilité linéaire

Dans le système d'équation (3), une perturbation infinitésimale est ajoutée à l'état de base et les termes de second ordre sont négligés. La perturbation est ensuite développée en modes normaux :

$$(u', v', w', \pi', \theta', \phi')^t = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\theta}, \hat{\phi})^t e^{st + in\varphi + ikz} \equiv \Psi e^{st + in\varphi + ikz} \quad (7)$$

où s est le taux de croissance complexe des perturbations, n est le nombre de modes azimutal et k est le nombre d'onde axial. Le chapeau désigne l'amplitude complexe de la perturbation qui ne dépend que de la position radiale et satisfait les conditions aux limites homogènes :

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = d\hat{u}/dr = \hat{\theta} = \hat{\phi} = 0 \quad \text{en} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta}; \frac{1}{1-\eta} \quad (8)$$

Les équations résultantes associées aux conditions aux limites (8) forment un problème aux valeurs propres de la forme matricielle :

$$sA(\eta, Pr, \gamma_a, \gamma_e, \tau, L, k, n)\Psi = B\Psi \quad (9)$$

Ce dernier problème est discrétisé par la méthode de collocation spectrale de Tchebychev, puis résolue en utilisant la décomposition QZ. Le plus grand ordre des polynômes de Tchebychev considérés pour assurer la convergence des résultats dépend du rapport des rayons et varie de 15 à 28.

3 Résultats

La valeur propre $s = \sigma + i\omega$, où σ est le taux de croissance et ω est la fréquence de propagation de la perturbation, est calculée pour un jeu de paramètres $(\eta, Pr, \gamma_a, \gamma_e, \tau, L, k, n)$. On a l'état marginal lorsque le maximum de σ s'annule. Des courbes marginales peuvent être tracées dans le plan (k, τ) ou (k, L) pour différentes valeurs de n . Le minimum global de ces courbes donne alors les valeurs des paramètres critiques $(\tau_c, L_c, k_c, n_c, \omega_c)$. Dans cet article, le rapport des rayons est fixé à $\eta = 0.5$ et les paramètres thermiques γ_a et γ_e sont fixés, en valeurs absolues, à 0.01.

3.1 Gradient de température négatif

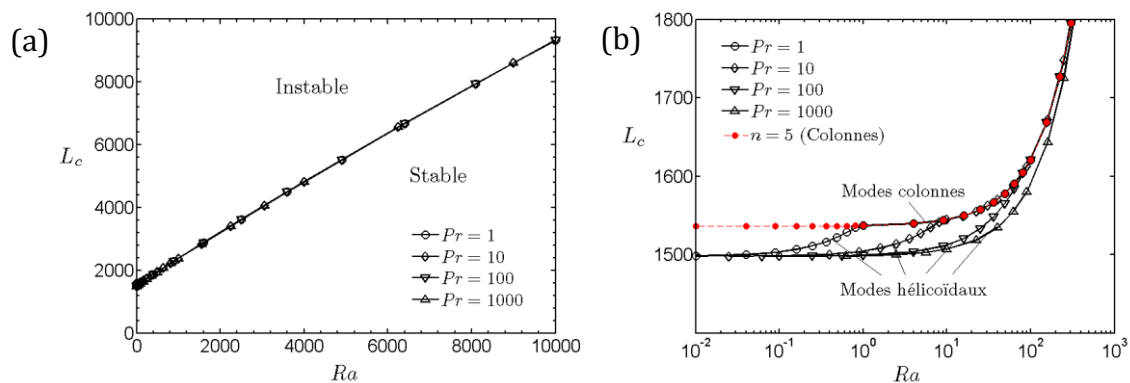


Figure 1 : Diagramme de stabilité pour $\gamma_a = \gamma_e = 0.01$ et pour plusieurs valeurs de Pr .

Lorsque le cylindre intérieur est plus chaud que le cylindre extérieur, la force DEP est la source d'instabilité et on étudie l'effet de la poussée centrifuge sur celle-ci. En l'absence de rotation ($Ra = 0$), on retrouve les modes critiques de nature électrique sous forme de spirales stationnaires [4]. Pour un rapport des rayons de 0.5, ces spirales présentent un nombre de modes azimutal de $n_c = 4$. Lorsque $Ra \neq 0$, la nature des modes critiques change : la figure 1 présente la variation du nombre de Rayleigh électrique critique L_c en fonction du nombre de Rayleigh centrifuge Ra . L'augmentation de la valeur critique L_c avec Ra souligne l'effet stabilisant de la poussée centrifuge lorsque $\gamma_a > 0$ ou $\gamma_e > 0$ (figure 1-(a)). A faible taux de rotation, les modes critiques restent des modes électriques sous forme hélicoïdales et l'augmentation du nombre de Prandtl diminue légèrement leur seuil. Au-delà d'une

certaine valeur de Ra , les modes critiques prennent la forme de colonnes dont l'axe est parallèle à l'axe des cylindres. Ces modes présentent un nombre de mode azimutal $n_c = 5$. Sur la figure 1-(b), la courbe marquée par des points correspond au seuil critique pour $n = 5$ qui est indépendante de Pr . Dès que les modes d'instabilités prennent la forme de colonnes, les seuils obtenus pour les différentes valeurs de Pr se superposent à cette courbe. La figure 2 montre le comportement de la fréquence critique en fonction du nombre de Rayleigh centrifuge. L'augmentation de la fréquence de rotation de l'anneau entraîne l'augmentation de la fréquence critique de ces modes, jusqu'à une certaine valeur de Ra . Peu avant la transition des modes hélicoïdaux vers les modes en colonnes, la fréquence diminue légèrement avec l'augmentation de Ra .

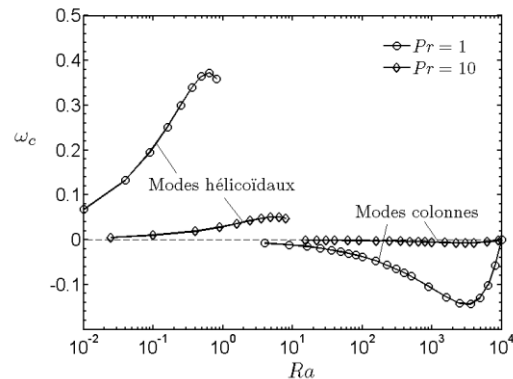


Figure 2 : Variation de la fréquence critique des modes en fonction de Ra pour $\gamma_a = \gamma_e = 0.01$ et pour plusieurs valeurs de Pr .

A la valeur de Ra pour laquelle la transition opère, la fréquence subit une discontinuité. La fréquence critique des modes en colonnes est négative, ce qui traduit une propagation rétrograde des vortex. Cette fréquence diminue avec l'augmentation du taux de rotation jusqu'à une certaine valeur de Ra qui semble indépendante du nombre de Prandtl. Au-delà de cette valeur de Ra , la fréquence de propagation des modes augmente avec Ra .

3.2 Gradient de température positif

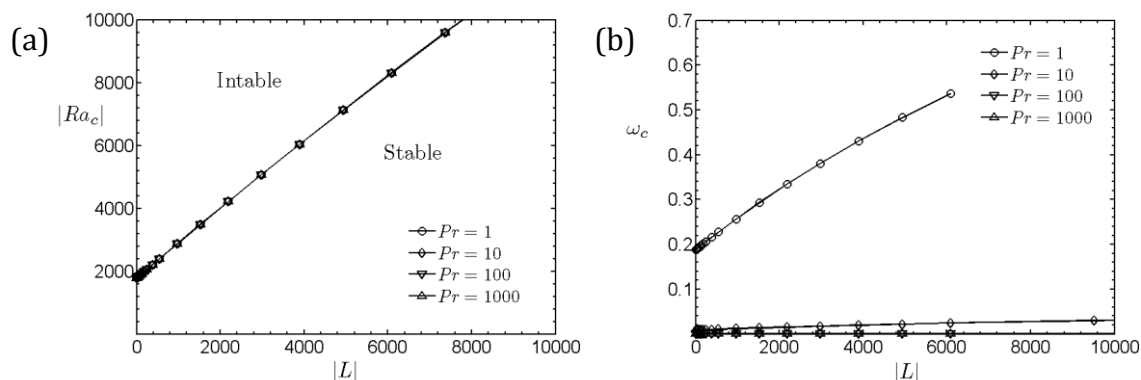


Figure 3 : (a) Diagramme de stabilité et (b) fréquences critiques pour $\gamma_a = \gamma_e = -0.01$ et pour différentes valeurs de Pr .

Lorsque le cylindre extérieur est plus chaud que le cylindre intérieur, la poussée centrifuge est le mécanisme déstabilisant. On étudie alors l'effet de la force diélectrophorétique sur cette instabilité. La figure 3 présente le comportement de $|Ra_c|$ (figure 3-(a)) et de la fréquence critique (figure 3-(b)) en

fonction de $|L|$. Les modes critiques sont toujours sous formes de colonnes oscillantes avec $n_c = 5$. L'augmentation de $|L|$ entraîne l'augmentation de $|Ra_c|$, ce qui souligne l'effet stabilisant de la force DEP lorsque $\gamma_a < 0$ ($\gamma_e < 0$). Le seuil critique est indépendant du nombre de Prandtl. La fréquence de propagation des modes est positive, ce qui traduit une propagation prograde des vortex. La fréquence augmente avec l'augmentation de $|L|$ et diminue lorsque Pr augmente.

4 Conclusion

L'analyse de stabilité linéaire d'un fluide confiné dans un anneau cylindrique en rotation et soumis à une force diélectrophorétique radiale a été réalisée. Lorsque le cylindre intérieur est plus chaud que le cylindre extérieur, la poussée thermoélectrique est le mécanisme déstabilisant. A faible taux de rotation, les modes critiques sont des modes électriques qui se manifestent sous forme d'hélices oscillantes sensibles aux propriétés de diffusion du fluide. Très rapidement, la rotation de l'anneau entraîne la transition des modes hélicoïdaux en modes colonnes également oscillantes. Le seuil de ces colonnes est indépendant du nombre de Prandtl, cependant la fréquence de ces modes est sensible au Pr .

Lorsque le cylindre extérieur est plus chaud que le cylindre intérieur, le mécanisme déstabilisant est cette fois-ci la poussée centrifuge. Les modes critiques sont alors toujours sous formes de colonnes oscillantes dont le seuil est indépendant de Pr . Ces colonnes se propagent de façon prograde à une fréquence qui dépend du nombre de Prandtl.

Dans ce problème, de nombreux mécanismes peuvent influencer la nature instationnaire des modes critiques. Notamment, la présence d'une gravité ayant un effet stabilisant sur une stratification de masse volumique peut engendrer des ondes internes par le mécanisme de Brunt-Väisälä. Prochainement, une analyse plus complète des fréquences calculées permettra une meilleure compréhension des effets combinés de la force DEP avec la poussée centrifuge.

Références

- [1] B. Chandra & D.E. Smylie, A laboratory model of thermal convection under a central force field, *Geophys. Fluid Dyn.* **3**, 211-224 (1972).
- [2] H.N. Yoshikawa, O. Crumeyrolle & I. Mutabazi, Dielectrophoretic force-driven thermal convection in annular geometry, *Phys. Fluids* **25**, 024106 (2013).
- [3] V. Travnikov, O. Crumeyrolle et I. Mutabazi, Numerical investigation of the heat transfer in cylindrical annulus with a dielectric fluid under microgravity, *Phys. Fluids* **27**, 054103 (2015).
- [4] A. Meyer, M. Yongmanns, M. Meier, C. Egbers & I. Mutabazi, Thermal convection in a cylindrical annulus under a combined effect of the radial and vertical gravity, *C. R. Mécanique* **345**, 11-20 (2017).
- [5] M. Auer, F.H. Busse & R.M. Clever, Three-dimensional convection driven by centrifugal buoyancy, *J. Fluid Mech.* **301**, 371-382 (1995).
- [6] H.N. Yoshikawa, A. Meyer, O. Crumeyrolle & I. Mutabazi, Linear stability of a circular Couette flow under a radial thermoelectric body force, *Phys. Rev. E* **91**, 033003 (2015).
- [7] J.M. Lopez, F. Marques, & M. Avila, The Boussinesq approximation in rapidly rotating flows, *J. Fluid Mech.* **737**, 56-77 (2013).