

Intérêt de la Méthode des Blocs Disjoints (MBD) de caractérisation des processus aléatoires non gaussiens et non stationnaires

B. COLIN^a

a. Nexter Systems, 11 Allées des Marronniers, 78022 Versailles Cedex

...

Résumé :

Dans le domaine des véhicules Terrestres militaires, les processus aléatoires de vibrations générés par les véhicules à roues, en situation Tout-Terrain, sortent du schéma classique des processus stochastiques, à caractère stationnaire et gaussien. Le caractère non-gaussien des processus s'exprime notamment par des niveaux d'aplatissement très importants, pouvant remettre en cause le dimensionnement aux contraintes extrêmes et à la fatigue des structures mécaniques, acquis classiquement par les démarches spectrales.

De ces considérations techniques, il convenait de faire évoluer les techniques de caractérisation des processus aléatoires d'excitation, générés par ce type de situation de roulage, en proposant des méthodes de caractérisation innovantes, non plus basées sur des démarches spectrales et/ou temporelles déterministes, mais sur des démarches temporelles, de nature stochastique. En effet, pour caractériser les valeurs extrêmes et l'endommagement par fatigue produit par les processus aléatoires non stationnaires et non gaussiens, l'auteur montre qu'il est désormais nécessaire de mixer les techniques de détection d'extrema et de comptage temporel utilisées dans le domaine de la fatigue vibratoire avec celles de la statistique de l'échantillonnage, utilisées dans la théorie de l'estimation.

Cette approche permet en effet de pouvoir extrapoler favorablement dans le temps, les valeurs extrêmes et le niveau d'endommagement des structures, sous l'angle statistique, alors que cette phase d'extrapolation est dans la pratique réalisée de façon déterministe. Cette technique dénommée « MBD » pour Méthode des Blocs Disjoints a été éprouvée avec succès dans le cadre des techniques de spécification d'organes, sous l'angle fiabilité depuis 2010, et viennent d'intégrer récemment les normes AFNOR.

L'avantage de cette méthode MBD couplée aux notions de Spectres de Réponse (SRX-SFX) sera mise en exergue, en s'appuyant sur le cas d'une mesure de roulage en tout terrain sur véhicules à roues, et ceci comparativement aux approches spectrales, basées sur l'hypothèse de gaussiannité des processus.

Abstract :

In the field of military land vehicles, random vibration processes generated by all-terrain wheeled vehicles in motion are not classical stochastic processes of a stationary and Gaussian nature. The non-Gaussian nature of the processes is expressed in particular by very significant flattening levels that can affect the fatigue design of mechanical structures, conventionally acquired by spectral approaches, based essentially on spectral moments of stress processes. Due to these technical considerations, techniques for the characterization of random excitation processes generated by this

type of driving situation need to be developed, by proposing innovative characterization methods no longer based on deterministic spectral and/or temporal approaches but on temporal approaches of a stochastic nature. Indeed, to characterize the fatigue damage produced by non-stationary and non-Gaussian random processes, the author shows that it is now necessary to mix time-counting techniques used in the field of vibration fatigue with those of the sampling statistics used in estimation theory. This approach makes it possible to extrapolate favorably over time the level of damage to structures, from a statistical perspective, when this extrapolation phase is in practice carried out deterministically. This technique, referred to as the disjoint block method (DBM), has been tested successfully in the context of component specification techniques from the reliability standpoint since 2010, and just recently integrated AFNOR standards.

Mots clefs : Vibrations aléatoires, non stationnaires et non gaussiennes, Méthode des Blocs Disjoints (MBD), SRX et SFX spectral, et/ou SRX et SFX temporel

1 Introduction

Dans le contexte du dimensionnement des structures à la fatigue vibratoire, il est courant de caractériser les processus aléatoires d'excitation stationnaire de ces dernières par leur DSP d'accélération, sur une bande de fréquences pertinente, couvrant en général le domaine BF [1 à 50Hz] et MF [50Hz à 500Hz], pour le cas des véhicules à roues.

Puis en s'appuyant sur les hypothèses classiques des signaux gaussiens, des méthodes de caractérisation de l'endommagement moyen par fatigue généré par ces processus aléatoires d'accélération, peuvent être utilisées. C'est le cas notamment des techniques de caractérisation par la méthode des Spectres de Réponse (SR), largement utilisée par les industriels du monde Civil et Militaire, dans le cadre de l'élaboration de spécifications vibratoires de conception.

La technique des Spectres de Réponse (SR) consiste à caractériser la sévérité du processus d'excitation, au travers d'un modèle mécanique simple, constitué par un système linéaire à un degré de liberté (1 d.d.l) dont on fait varier la fréquence propre f_0 dans un domaine assez large couvrant les fréquences propres de la structure à dimensionner, et limité par le critère classique des masses effectives. Dans un grand nombre d'applications industrielles, ce critère de masses effectives consiste à retenir l'ensemble des modes dont la somme des masses effectives se situe à 90% de la masse totale de la structure à dimensionner [1]. A ce stade, il s'agit ainsi d'une généralisation du modèle de Biot, utilisé historiquement dans le calcul du Spectre de Réponse au Choc (SRC) des excitations transitoires et que l'on adapte au cas des vibrations aléatoires [2] en parlant de Spectre de Dommage par Fatigue (SDF). Ainsi pour un processus de vibrations aléatoires, évalué en générale sur une portion limitée T_{ref} de la durée totale de sollicitation T_t donnée, il est possible d'en caractériser sa sévérité en appliquant soit une démarche spectrale (approche stochastique) ou soit une démarche temporelle (approche déterministe), qui possède chacune des inconvénients dans le cas des processus aléatoires non gaussiens, comme discuté ci-après.

2 Système étalon retenu

Lorsqu'un processus d'excitation vibratoire $\ddot{x}(t)$ est appliqué à la base d'un système mécanique à un degré de liberté (masse – ressort – amortisseur), ce système étalon répond en générant un déplacement relatif $z(t)$ entre la masse et l'embase du système étalon (voir Figure 1). Ce déplacement relatif dépend alors de la fréquence propre f_0 de l'étalon et est proportionnel à l'état de contrainte uni-axiale $\sigma(t)$ généré dans la structure, pour autant que cette dernière soit considérée linéaire (hypothèse couramment utilisée en conception). La constante de proportionnalité K (Contrainte – Déplacement relatif) est imposée par le concepteur et est conservée constante, quelle que soit la valeur de la fréquence propre f_0 .

On a donc :
$$\sigma(t) = K.z(t) \quad (1)$$

Où : $\sigma(t)$: amplitude de la contrainte vibratoire (N/m²)
 K : constante de proportionnalité (N/m³) entre contrainte et déplacement relatif (K est une constante dans la mesure où l'on considère que la structure à dimensionner est linéaire)
 $z(t)$: amplitude du déplacement relatif (m)

Avec :
$$z(t) = y(t) - x(t) \quad (2)$$

Où $y(t)$: déplacement absolu de la masse m (m)
 $x(t)$: déplacement absolu de la base mobile (m)

Le système étalon de masse m (en Kg), de raideur k (en N/m) et d'amortissement visqueux c (en N.s/m) est alors caractérisé par ses paramètres modaux, à savoir :

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k.m}} \quad \text{et } Q = 1/2\xi \quad \text{et } f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Et :
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et } \omega_0 = 2\pi.f_0 \quad (4)$$

Où ξ : amortissement critique ou modal du système étalon
 Q : facteur de surtension modal du système étalon
 f_0 : fréquence propre ou modale du système étalon (Hz)
 ω_0 : pulsation propre ou modale du système étalon (rd/s)

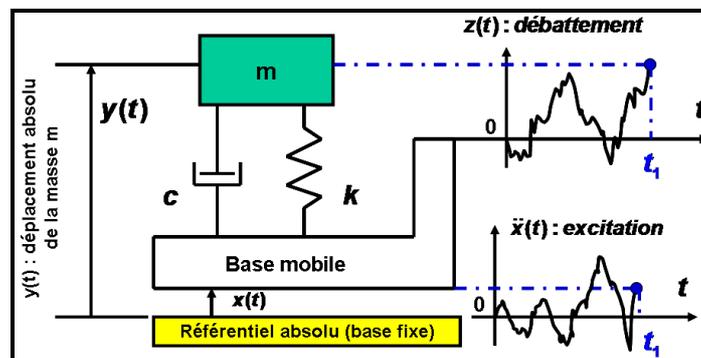


Figure 1. Système étalon à 1 d.d.l.

L'état de contrainte uni-axial du système étalon est donc caractérisé au travers de ce système étalon en évaluant sa réponse, en terme de déplacement relatif que l'on estime soit sous forme fréquentielle ou temporelle, selon que l'on utilise une démarche fréquentielle ou temporelle pour évaluer l'endommagement par fatigue associé au système étalon considéré.

2.1 Approche fréquentielle

Dans le cas d'une démarche fréquentielle, le système étalon est caractérisé par sa fonction de transfert $H_{\ddot{x}z}(\omega=2.\pi.f)$, définie entre l'accélération $\ddot{x}(t)$ de l'excitation vibratoire et le déplacement relatif $z(t)$ de la réponse, que l'on caractérise alors par sa DSP unilatérale (Densité Spectrale de Puissance) notée $DSP_{zz}(\omega=2.\pi.f)$.

L'expression de la fonction de transfert du système étalon est alors définie comme suit :

$$H_{\ddot{x}z}(\omega) = \frac{Z(\omega)}{\ddot{X}(\omega)} = |H_{\ddot{x}z}(\omega)| \cdot e^{j.\angle H_{\ddot{x}z}(\omega)} \quad (5)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \text{TF}[z(t)] \quad \text{et} \quad \ddot{X}(\omega) = \text{TF}[\ddot{x}(t)] \\ |H_{\ddot{x}z}(\omega)| &\text{ module de la Fonction de Transfert} \\ \angle H_{\ddot{x}z}(\omega) &\text{ phase de la Fonction de Transfert} \\ \text{TF}[\cdot] &\text{ opérateur de la Transformée de Fourier} \end{aligned} \quad (6)$$

Et :

$$|H_{\ddot{x}z}(\omega)| = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4.\xi^2.h^2}} \quad (7)$$

$$\text{avec } h = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.\pi.f_0 \quad \text{et} \quad Q = 1/2.\xi$$

De ces considérations techniques, il est alors possible d'évaluer simplement l'allure de la DSP unilatérale du déplacement relatif $DSP_{zz}(\omega)$ en m^2/Hz , connaissant la DSP unilatérale de l'excitation $DSP_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)$ en $(\text{m/s}^2)^2/\text{Hz}$; et ceci en s'appuyant sur les expressions classiques de la dynamique des structures linéaires [3], à savoir :

$$\begin{aligned} DSP_{zz}(\omega) &= |H_{\ddot{x}z}(\omega)|^2 \cdot DSP_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) \\ \text{pour } \omega &\in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 Approche temporelle

Dans le cas d'une démarche temporelle, le système étalon est caractérisé par sa fonction impulsionnelle $h_{\ddot{x}z}(t)$, définie entre l'accélération $\ddot{x}(t)$ de l'excitation vibratoire et le déplacement relatif $z(t)$ de la réponse, que l'on caractérise ensuite par sa Transformée en z , $H_{\ddot{x}z}(z)$ au sens de la méthode FOH (First Order Hold), utilisée pour la reconstruction mathématique de la réponse $z(t)$ échantillonnée [4]. L'expression de la transformée en z de la fonction impulsionnelle du système étalon est alors définie comme suit [5] :

$$H_{\ddot{x}}(z) = \frac{(z-1)^2}{\Delta t \cdot z} \cdot TZ \left\{ TL^{-1} \left[\frac{H_{\ddot{x}}(p)}{p^2} \right] \right\} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \quad (9)$$

avec $z = \exp(p \cdot \Delta t)$ et $F_e = \frac{1}{\Delta t}$

Où : F_e : Fréquence d'échantillonnage des processus aléatoire d'excitation $\ddot{x}(t)$ et de réponse $z(t)$ en Hz.

L'intérêt d'utiliser cette transformée en z au lieu de la fonction impulsionnelle réside essentiellement dans la rapidité des calculs de la réponse $z(t)$ échantillonnée, qui constitue dans le cadre de la démarche de caractérisation des p.a de contrainte non-gaussien, un enjeu important comme on le verra ci-après avec la notion de SFX Temporel, explicitée ci-après au §5.2.

De ces considérations techniques, il est alors possible d'évaluer simplement l'expression de la réponse échantillonnée du déplacement relatif $z(i, \Delta t) = z(i)$ sur la durée de référence $T_{réf}$ correspondant à la durée d'acquisition des processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ à caractériser sur le plan de la fatigue vibratoire, à savoir :

$$z(i) = -a_1 \cdot z(i-1) - a_2 \cdot z(i-2) + b_0 \cdot \ddot{x}(i) + b_1 \cdot \ddot{x}(i-1) + b_2 \cdot \ddot{x}(i-2) \quad (10)$$

avec $i = [1, n]$ et $n = T_{réf} \cdot F_e$ où $T_{réf}$ représente la durée d'acquisition

Avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_d \cdot \Delta t) \quad \text{et} \quad a_2 = \exp(-2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \quad \text{et} \quad \omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad Q = 1 / (2 \cdot \xi) \quad \text{et} \quad F_e = 1 / \Delta t \\ b_0 &= \frac{1}{\omega_0^3 \cdot \Delta t} \cdot \left\{ 2 \cdot \xi \cdot [\exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_d \cdot \Delta t) - 1] + \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \left[\frac{\omega_0}{\omega_d} \cdot (2 \cdot \xi^2 - 1) \cdot \sin(\omega_d \cdot \Delta t) \right] + \omega_0 \cdot \Delta t \right\} \\ b_1 &= \frac{1}{\omega_0^3 \cdot \Delta t} \cdot \left\{ -2 \cdot \omega_0 \cdot \Delta t \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_d \cdot \Delta t) - 2 \cdot \frac{\omega_0}{\omega_d} \cdot (2 \cdot \xi^2 - 1) \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_d \cdot \Delta t) + 2 \cdot \xi \cdot [1 - \exp(-2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t)] \right\} \\ b_2 &= \frac{1}{\omega_0^3 \cdot \Delta t} \cdot \left\{ (2 \cdot \xi + \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \exp(-2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) + \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot \Delta t) \cdot \left[\frac{\omega_0}{\omega_d} \cdot (2 \cdot \xi^2 - 1) \cdot \sin(\omega_d \cdot \Delta t) - 2 \cdot \xi \cdot \cos(\omega_d \cdot \Delta t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

3 Démarches de calcul des SDF

Comme présenté en introduction, il existe deux démarches possibles pour calculer le SDF d'un processus aléatoire d'excitation stationnaire, selon que l'on souhaite :

- se placer dans le cas **d'une approche stochastique**, permettant d'estimer la statistique des niveaux d'endommagement par fatigue produits par le processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ que l'on souhaite caractériser favorablement en termes de valeur moyenne et de α -quantile (ou quantile d'ordre α), sur la durée totale T_t de la sollicitation du processus aléatoire d'excitation. Cette approche stochastique est d'autant plus importante qu'elle permet d'extrapoler sur le plan statistique les niveaux d'endommagement par fatigue sur une durée T_t , plus importante ($T_t > T_{réf}$) que celle associée à la durée de référence $T_{réf}$ pour laquelle le processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ est mesuré ou estimé par modélisation (comme présenté au §3.1),
- ou se placer dans le cas **d'une approche déterministe** permettant uniquement de calculer les niveaux d'endommagement par fatigue produits par le processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ acquis sur la durée de référence $T_{réf}$ par mesure ou par modélisation numérique, sans pouvoir les extrapoler favorablement sur la durée totale T_t , autrement que par une approche déterministe de

proportionnalité, comme présenté au §3.2. De ce fait, il est clair que **cette méthode de calcul temporelle peut s'avérer non conservative** et peut donc conduire à des sous-dimensionnement mécaniques non négligeables pour les structures étudiées. Ce point est d'autant plus vrai que la durée $T_{réf}$ est faible devant la durée totale T_t de la sollicitation considérée.

Au-delà du risque de sous-dimensionnement identifié dans le cas des approches temporelles, ces dernières conduisent à des temps de calcul prohibitifs, que ne possèdent pas les méthodes spectrales. En effet l'avantage des méthodes spectrales réside dans le fait que le calcul du SDF est analytique, **avec toutefois une notion de risque de dépassement α associé qu'il convient de bien préciser**. Par exemple si l'on se place pour simplifier, dans le cas des processus aléatoires stationnaires et gaussiens, **il est possible de montrer que cette notion de SDF spectral est implicitement associée à un risque de dépassement qui n'est pas constant et égale à 50%, comme le pense un grand nombre de concepteurs et de spécificateurs**. En effet les travaux menés par l'auteur en 2007 [6] ont montré que le niveau d'endommagement cumulé pouvait favorablement se décrire par une loi de Weibull à 2 paramètres $(\tilde{\beta}, \tilde{\sigma})$ et non par une loi normale classiquement utilisée par certains auteurs. De ces considérations techniques, il est alors possible de montrer que la notion de SDF spectral est associée à un risque de dépassement, fonction du paramètre de forme $\tilde{\beta}$ de cette loi de Weibull, qui est alors fonction des paramètres de calcul du SDF Spectral :

- f_0 et Q : paramètres du système étalon
- T_t : durée totale de la sollicitation vibratoire $\ddot{x}(t)$ considérée (s)
- b : pente de la loi de Basquin du comportement en fatigue de la structure considérée, décrit par l'expression (12) suivante.

$$N.[\sigma_a]^b = C = A^b \quad (12)$$

Où :

- b et $C = A^b$: paramètres matériau de la structure considérée
- A : contrainte alternée à rupture du matériau (N/m²)
- N : nombre moyen de cycles à rupture (cycles)
- σ_a : contrainte alternée sinusoïdale, correspondant aux extrema locaux (maxima et/ou minima) du processus de contrainte $\sigma(t) = K.z(t)$ définie par (1) en N/m².

La fluctuation du seuil de dépassement associé à l'expression classique du SDF Spectral, en fonction de la fréquence f_0 , constitue un élément peu sécurisant pour les concepteurs qui sont en charge de structures complexes, aux performances élevées. **C'est d'ailleurs pour ces raisons que le modèle du SDF spectral classique, largement utilisé dans le cadre de l'établissement des spécifications vibratoires [7], à été généralisé par l'approche du SFX spectral, qui constitue le pendant du SRX spectral proposé également en 2007 par l'auteur [6].**

3.1 Calcul du SDF spectral

Il existe différentes approches possibles pour le calcul du SDF spectral selon la méthode de comptage considérée (Peak-Valley et/ou Rainflow Counting [8]). Dans le cas présent, celle proposée ici repose sur la méthode de comptage des extrema (Peak-Valley) et est associée aux éléments suivants :

- **le processus d'excitation** $\ddot{x}(t)$ de durée T_t **est stationnaire, ergodique, gaussien et à moyenne nulle** (tous les moments spectraux sont donc constants et calculables à partir de la DSP du déplacement relatif du système étalon),
- le système étalon retenu étant linéaire, le déplacement relatif $z(t)$ du modèle est lui-même stationnaire, ergodique, gaussien et à moyenne nulle. **De plus le système étalon étant de facteur de surtension $Q \geq 3$** , le processus aléatoire de contrainte est à bande étroite centré sur f_0 , dont les maxima locaux sont caractérisés par **une loi de Rayleigh**,
- le comportement en fatigue de la structure est décrit par sa loi de Basquin, définie par ses paramètres b et $C = A^b$ (voir relation 12 précédente),
- le cumul des dommages par cycle est basée sur la loi classique d'accumulation linéaire de Miner [9],
- seuls les maxima locaux positifs et les minima locaux négatifs du processus de contrainte $\sigma(t) = K.z(t)$ sont supposés endommageant.
- Le SDF spectral est alors calculé à partir de la DSP unilatérale du processus aléatoire de contrainte $\sigma(t)$ supposé gaussien et donc du processus aléatoire associé au déplacement relatif $z(t)$ du système étalon, dans la mesure où ce dernier est considéré ici linéaire. A chaque fréquence propre f_0 , la valeur de l'endommagement moyen cumulé $E[D_c(\xi)]$, est calculé à partir de l'endommagement produit par les différents cycles extraits sur la durée totale T_t du processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ considéré et cumulés linéairement, au travers du comportement en fatigue de la structure considérée. En s'appuyant sur les hypothèses précédentes, on montre aisément que l'expression analytique du SDF spectral d'un processus aléatoire $\ddot{x}(t)$ gaussien est calculable simplement en utilisant la loi de Rayleigh $f_{z_{max}}(z)$, associée au processus aléatoire des maxima locaux du déplacement relatif $z(t)$, à savoir :

$$f_{z_{max}}(z) = \frac{z}{\sqrt{m_0}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2m_0}\right) \text{ avec } z \in [0, +\infty[\quad \text{et } m_0 = z_{eff}^2(f_0) = \int_{f=0}^{+\infty} DSP_{zz}(f) \cdot df \quad (13)$$

$DSP_{zz}(f)$: DSP unilatérale du processus aléatoire de réponse $z(t)$

D'où l'expression conservative du SDF Spectral (à bande étroite) $SDF_{sp}^{BE}(f_0)$:

$$SDF_{sp}^{BE}(f_0) = \begin{cases} \frac{C}{K^b} \cdot E[D_c(\xi)] = n \cdot \int_{z=0}^{+\infty} z^b \cdot f_{z_{max}}(z) \cdot dz \\ (f_0 \cdot T_t) \cdot [2 \cdot z_{eff}^2(f_0)]^{b/2} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right) \end{cases} \text{ avec } n = f_0 \cdot T_t \quad (14)$$

Cette expression simple du SDF spectral à bande étroite est conservative et peut être généralisée au cas des processus gaussiens à bande large, en s'appuyant sur la Théorie de Rice des processus aléatoires gaussiens stationnaires [10-11]. **Néanmoins, l'inconvénient de ces méthodes spectrales est qu'elles restent assujetties à une hypothèse restrictive de gaussiannité, dont il convient désormais de s'affranchir, pour élargir favorablement le champ d'application de la méthode des Spectres de Réponse (SR).**

3.2 Calcul du SDF temporel (à caractère déterministe)

Dans le cas du SDF temporel, le déplacement relatif $z(t)$ est obtenu par la méthode FOH présentée au paragraphe 2.2 précédent et ceci pour $t \in [0, T_{réf}]$, puisque l'excitation $\ddot{x}(t)$ n'est connue que sur la durée de référence $T_{réf}$. Puis les valeurs absolues des pics (maxima positifs) et des vallées (minima négatifs) du déplacement relatif $z(t)$ évalués sur la durée $T_{réf}$, sont déterminées à partir de la méthode de comptage classique des extrêma, qui à un maxima ou minima associe un demi-cycle d'endommagement pour rester dans les mêmes hypothèses de calcul que celles du SDF spectral. Cette méthode « Peak-Valley » permet alors d'extraire au niveau du déplacement relatif $z(t)$ de durée $T_{réf}$:

- ✓ les n_{max} demi-cycles d'endommagement associés aux maxima positifs d'amplitude $Z_{max}(i)$ pour $i = 1$ à n_{max} ,
- ✓ les n_{min} demi-cycles d'endommagement associés aux minima négatifs d'amplitude $Z_{min}(i)$ pour $i = 1$ à n_{min} ,

Les demi-cycles ainsi extraits du processus aléatoire de contrainte $\sigma(t) = K.z(t)$, défini sur la durée de référence $T_{réf}$ sont ensuite cumulés linéairement, en terme d'endommagement partiel D_p en utilisant la loi de Basquin définie par (12) et la loi de Miner définie comme suit :

$$D_p = \sum_{j=1}^{n_{max}} d_{max}(j) + \sum_{j=1}^{n_{min}} d_{min}(j) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d_{max}(j) = \frac{K^b}{2.C} \cdot [Z_{max}(j)]^b \\ d_{min}(j) = \frac{K^b}{2.C} \cdot [Z_{min}(j)]^b \end{cases} \quad (15)$$

L'extrapolation dans le domaine temporel de ce dommage partiel sur la durée de sollicitation totale T_t est réalisée de façon déterministe, en utilisant la règle de proportionnalité suivante; et ainsi permettre le calcul du dommage cumulé D_c , en respectant les mêmes hypothèses que celles utilisées pour le calcul de l'endommagement moyen cumulé $E[D_c(\xi)]$:

$$D_c = \frac{T_t}{T_{réf}} \cdot D_p = \frac{T_t}{T_{réf}} \cdot \frac{K^b}{2.C} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n_{max}} [Z_{max}(j)]^b + \sum_{j=1}^{n_{min}} [Z_{min}(j)]^b \right] \quad (16)$$

Cette procédure de calcul est alors appliquée à l'ensemble des systèmes à 1 d.d.l considérés pour chacune des fréquences propres f_0 , ce qui conduit à l'expression suivante du SDF temporel $SDF_p^D(f_0)$ à caractère déterministe :

$$SDF_p^D(f_0) = \frac{C}{K^b} \cdot D_c = \frac{T_t}{2.T_{réf}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n_{max}} [Z_{max}(j)]^b + \sum_{j=1}^{n_{min}} [Z_{min}(j)]^b \right] \quad (17)$$

Note : Comme dans le cas des SRC [12] et du SRE temporel, il est ici recommandé d'échantillonner le processus aléatoire d'excitation $\ddot{x}(t)$ à une fréquence au moins 10 fois supérieure à la fréquence maxi de l'analyse des spectres de réponse considérés, pour évaluer correctement le SDF temporel.

Très facile à développer d'un point de vue numérique, cette technique de calcul du SDF temporel à caractère déterministe, s'avère très souvent inadaptée au contexte de dimensionnement sécurisé des structures, qui nécessite obligatoirement de prendre en compte la statistique du dommage cumulé des processus de contrainte à caractère stochastique. Et ceci passe donc forcément par l'utilisation de

méthodes probabilistes et non plus déterministes, capables d'extrapoler les valeurs des α -quantiles du dommage cumulé, pour une durée de sollicitation totale donnée T_i .

4 Sécurisation des structures et maîtrise du risque de conception

Pour sécuriser le dimensionnement à la fatigue des structures mécaniques soumises à des processus aléatoires stationnaires de durée de sollicitation T_i , il convient désormais de s'intéresser aux caractéristiques statistiques des niveaux d'endommagement par fatigue cumulé générés par ces processus sur la durée T_i , en s'imposant un risque de dépassement α , que l'on fixe en fonction du niveau de criticité de la structure à dimensionner.

Dans la pratique, les trois niveaux de risque, couramment utilisés en conception mécanique dans le domaine des véhicules terrestres militaires, sont :

- $\alpha = 10\%$: risque associé au développement d'équipements et/ou de structures mécaniques « courants », ne faisant pas partie d'une chaîne fonctionnelle de performance importante pour le client final. **C'est le cas notamment des organes qui sont associés à des fonctions secondaires du Système,**
- $\alpha = 1\%$: risque associé au développement d'équipements et/ou de structures mécaniques « standards », faisant partie d'une chaîne fonctionnelle de performance importante (sensible) pour le client final, mais dont le niveau d'exigence client reste modéré. **C'est le cas notamment des organes qui sont associés à des fonctions principales du Système, pour lesquelles les niveaux de performance fonctionnelle spécifiés par le client final sont atteignables, sans risque,** et ceci vis-à-vis des sollicitations vibratoires prises en compte dans le développement,
- $\alpha = 0,1\%$: risque associé au développement d'équipements et/ou de structures mécaniques « sécurisées », faisant partie d'une chaîne fonctionnelle de performance importante pour le client final, mais dont le niveau d'exigence client est élevé. **C'est le cas notamment des organes qui sont associés à des fonctions principales du Système, pour lesquelles les hauts niveaux de performance fonctionnelle spécifiés par le client final ne peuvent être atteignables, sans risque, que si les sollicitations prises en compte dans le développement sont bien maîtrisées.**

De ces considérations techniques, il est donc apparu important dans les années 2005 à 2010 [6, 13] de proposer des évolutions majeures, aux techniques des Spectres de Réponse (SR), afin de mieux appréhender ces risques de dépassement des niveaux d'endommagement par fatigue vibratoire, dans le cas des processus d'excitation générés par les véhicules Terrestres militaires. **Ces travaux se sont tout d'abord inscrits dans le contexte des processus aléatoires gaussiens, ce qui a permis de mettre en place la notion de SFX spectral à risque de dépassement α imposé, qui se substitue au cas du SDF spectral, associé par définition au niveau moyen d'endommagement cumulé.**

Au paragraphe 5 qui suit, on rappellera donc les principaux résultats de cette notion de SFX spectral, qui est assujettie au cas des processus gaussiens. **Et cette dernière sera complétée favorablement par des approches innovantes, permettant de proposer des notions de SFX temporels, capables désormais de tenir compte du caractère non-gaussien des processus aléatoires, générés par les véhicules Terrestres.**

5 Démarche de calcul des SFX

Comme présenté précédemment, il est essentiel de pouvoir désormais estimer le modèle statistique des niveaux d'endommagement cumulé associé aux processus aléatoires de contrainte sur la durée totale T_i du processus d'excitation, et ceci quelle que soit la nature statistique du processus d'excitation (gaussien ou non-gaussien). Ceci conduit donc à ne plus favoriser l'utilisation des techniques de SDF temporel, à caractère déterministe, qui semblait se généraliser grandement chez les concepteurs, à défaut de disposer de méthodes probabilistes adaptées à l'enjeu technique recherché. En effet, l'objectif recherché désormais consiste à évaluer le seuil du niveau d'endommagement cumulé (α -quantile de la variable aléatoire D_c) sur la durée totale d'excitation T_i , avec un risque de dépassement α constant pour chaque fréquence propre f_0 imposé par le concepteur et/ou le spécificateur; alors que pour le cas du SDF spectral (voir §5.1), ce risque α est fonction des valeurs de fréquence f_0 retenues.

Ces Spectres de Réponse à risque de dépassement α imposé, ont été notés SFX pour les différencier du vocable SDF et couvrent désormais le cas des processus aléatoires stationnaires gaussiens et/ou non-gaussiens, comme présentés ci-après.

5.1 Calcul du SFX spectral

Sur la base des travaux menés en 2007 par l'auteur, autour d'une démarche conservative, associé au cas des processus aléatoires gaussiens, stationnaires, à moyenne nulle et à bande étroite, une approche analytique du SFX spectral a été établie sous les hypothèses suivantes, hypothèses complémentaires à celles définies pour le calcul du SDF spectral :

- **le processus d'excitation** $\ddot{x}(t)$ de durée T_i **est stationnaire, ergodique, gaussien, à moyenne nulle et à bande large de type bruit blanc** (hypothèse très restrictive et peu en accord avec la réalité physique des véhicules terrestres du Secteur Défense),
- le niveau d'amortissement ξ du système étalon retenu est faible ($\xi \leq 0,05$), correspondant à un facteur de surtension $Q \geq 10$,
- les nombres de cycles de sollicitation, associés aux différents systèmes étalons, sont importants et doivent respecter la relation d'ordre suivante, à savoir : $(\xi \cdot f_0 \cdot T_i \geq 1)$
- la loi de distribution du dommage cumulé $D_c(\xi)$ est supposé être représentée par une loi de Weibull à 2 paramètres $(\tilde{\beta}, \tilde{\sigma})$, où $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\sigma}$ représentent respectivement le paramètre de forme et le paramètre d'échelle de la loi de Weibull considérée.

En effet, dans la mesure où le dommage cumulé $D_c(\xi)$ est une variable aléatoire à support positif, il est clair que le modèle statistique à retenir ne peut pas être de type gaussien comme le prétendent certains auteurs. Le choix d'un modèle de Weibull a donc été préféré, compte-tenu de sa décroissance exponentielle, qui est de même nature que celle associée au modèle de Rayleigh caractérisant les maxima locaux du processus de contrainte aléatoire à bande étroite considéré. Ainsi, sur la base de ces hypothèses, le coefficient de variation du dommage cumulé $D_c(\xi)$ est calculable par voie analytique et conduit au résultat approximatif suivant, à savoir [14] :

$$CV[D_c(\xi)] \approx \left[\frac{2 \cdot Q \cdot f_1(b)}{n} \right]^{1/2} \quad \text{avec } n = f_0 \cdot T_t$$

$$\text{avec } f_1(b) = \exp[c_2 \cdot b^2 + c_1 \cdot b + c_0] \quad \text{pour } b \in [3, 20]$$

$$\text{et } c_2 = 2,51419E-03, \quad c_1 = 5,04776E-01, \quad c_0 = -2,38747E+00$$
(18)

De ces considérations techniques, il ressort que le modèle de Weibull à deux paramètres ($\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}$) du dommage cumulé est désormais ajustable par la méthode des moments, en s'attachant à recalculer pour chaque système étalon, la valeur moyenne du dommage cumulé fourni par l'expression (14) ainsi que son coefficient de variation fourni par l'expression (18) précédente. De ce fait, on montre que le SFX spectral à risque α imposé est calculable à partir du SDF spectral classique, en utilisant l'expression simple suivante :

$$\frac{SFX_{sp}^{BE}(f_0)}{SDF_{sp}^{BE}(f_0)} = \frac{[\ln(1/\alpha)]^{\tilde{\lambda}}}{\Gamma(1+\tilde{\lambda})} = g_4(\alpha, b, Q, n) \quad \text{où } \tilde{\lambda} \text{ est telle que } h(\tilde{\lambda}) = 0$$

$$\text{avec } h(\lambda) = \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma^2(1+\lambda)} - \mu \quad \text{et } \mu = \frac{2 \cdot Q \cdot f_1(b)}{n} + 1 \quad \text{avec } n = f_0 \cdot T_t$$
(19)

Le coefficient $\tilde{\lambda}$ obtenu par dichotomie d'après (19) est directement relié au paramètre de forme $\tilde{\beta}$ de la loi de Weibull, retenue pour décrire le modèle statistique du dommage cumulé $D_c(\xi)$ sur la durée T_t de sollicitation du processus aléatoire d'excitation considérée, puisque l'on peut écrire :

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \quad (20)$$

Ainsi pour le cas des équipements électroniques ($b=4$) et mécaniques ($b=8$), on constate que la valeur du coefficient $\tilde{\lambda}$ dépend du nombre n de cycles, associé au processus de réponse en contrainte, pour une valeur de Q donnée (généralement pris égale à 10 dans le cas des démarches de personnalisation [7], [15]). Graphiquement, on constate que la valeur de ce coefficient $\tilde{\lambda}$ décroît avec le nombre de cycles n , pour un paramètre b donné. Par ailleurs pour une valeur de nombre de cycles donnée, plus la valeur de b (représentatif de la pente du modèle de Basquin) augmente, et plus le coefficient $\tilde{\lambda}$ est important, comme le présente la Figure 2 suivante.

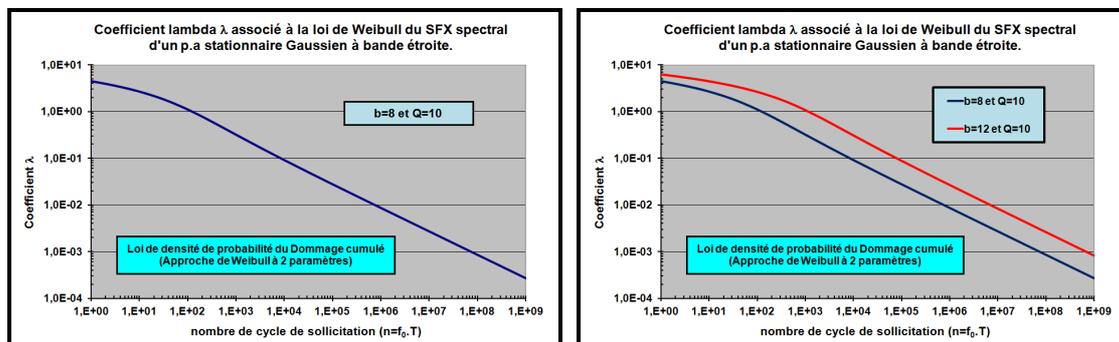


Figure 2. Coefficient $\tilde{\lambda}$ associé au modèle SFX spectral pour $b=8$ et 12.

En injectant désormais cette valeur du coefficient $\tilde{\lambda}$ dans l'expression analytique du SFX, fournie par (19), il est alors possible de tracer le rapport entre le SFX spectral et le SDF spectral, utilisé classiquement en personnalisation des essais, et ceci pour un risque de dépassement α donné. On obtient alors les graphes suivants.

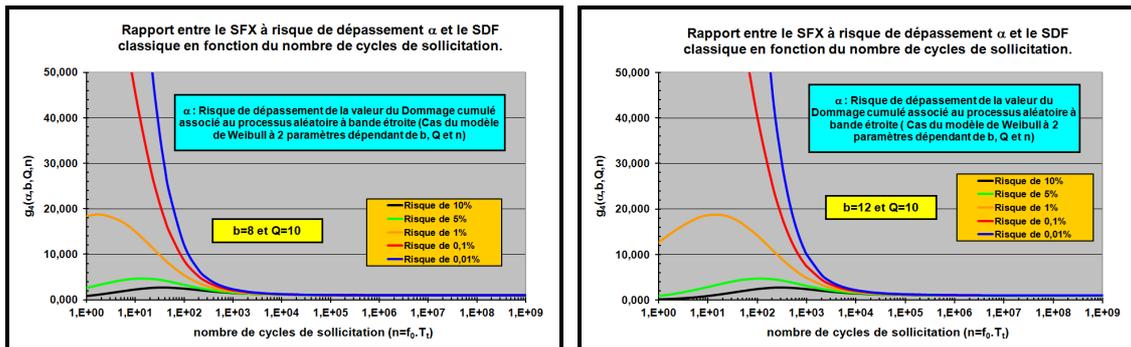


Figure 3. Rapport entre le SFX spectral et le SDF classique pour b=8 et 12.

A ce stade, il convient de noter que le SFX spectral est d'autant plus pertinent à prendre en compte que le nombre de cycles de sollicitation n considéré est faible, que le risque α retenu par le spécificateur et/ou concepteur est faible et que la pente de Basquin du matériau b de la structure est élevée, comme le montre les courbes de la Figure 3, tirées des travaux de 2007 [6].

En s'appuyant sur le modèle du SFX spectral présenté ci-dessus et associé au cas des processus aléatoire gaussien stationnaire à bande étroite, il est désormais possible d'évaluer l'expression analytique de la valeur du risque α_0 qui est associé implicitement au cas de l'expression du SDF spectral. En effet, il semble important de bien identifier le risque de dépassement auquel est associé le concept du SDF spectral, qui est très largement répandu dans le secteur de la validation expérimentale des produits, tout comme d'ailleurs aujourd'hui dans le domaine de la conception des produits, qui utilise de plus en plus ce contour technique pour justifier la tenue des structures soumises à un environnement vibratoire, sous l'angle fiabilité. De ces considérations techniques, on peut alors d'après (19) et (20) écrire que :

$$\alpha_0 = \exp \left[- \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]^\beta \right] \tag{21}$$

Graphiquement pour des valeurs de b et de Q données, l'allure de ce risque de dépassement α_0 en fonction du nombre de cycles n est présentée à la Figure 4 qui suit, à savoir :

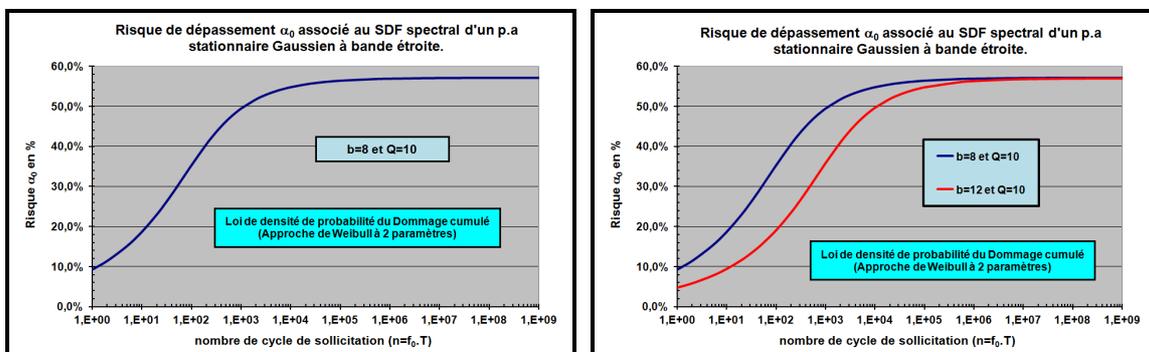


Figure 4. Risque de dépassement associé au SDF classique pour b=8 et 12.

On constate donc que le SDF spectral d'un processus aléatoire d'excitation gaussien stationnaire est associé à un risque de dépassement α_0 **qui n'est pas constant et qui n'est pas égale à 50%** comme certains auteurs ont tendance à le dire. Ce risque α_0 est fonction des paramètres b et Q , mais surtout du nombre de cycles de sollicitation, vu par la structure en terme de réponse en contrainte, comme illustré par la Figure 4 précédente. Plus le nombre de cycles augmente et plus ce risque de dépassement α_0 augmente, pour atteindre une valeur asymptotique **de l'ordre de 57%**, dans le cas de structures caractérisées par des valeurs de b courantes allant de 8 à 12 par exemple. On constate également que pour une valeur de nombre de cycles donné n , plus la valeur de b est élevée et plus ce risque α_0 est faible, montrant la nécessité de bien identifier la nature des zones critiques de défaillance, lorsque l'on veut en évaluer son niveau de fiabilité, en maîtrisant le risque associé.

5.2 Calcul du SFX temporel

Dans le cas d'un processus stationnaire non gaussien de durée T_t , caractérisé par un seul échantillon temporel de contrainte $z(t)$ de durée limitée T_{ref} ($T_{ref} < T_t$), il n'est plus possible de s'appuyer sur des approches spectrales pour en évaluer son SFX. Bien que ces processus non-gaussiens soient toujours caractérisables en fréquence par leurs DSP, la structure probabiliste des dommages partiels n'est accessible que par l'analyse de leurs premiers moments statistiques, évalués sur la période de temps $[0, T_{ref}]$. Pour ce faire, l'approche temporelle [15] (**appelée méthode MBD, pour Méthode des Blocs Disjoints**) mise en place dans le cas d'un processus aléatoire stationnaire non-gaussien consiste à analyser désormais l'endommagement par fatigue local du processus de contrainte par blocs de durée T_b .

Pour simplifier, on se place ici dans le cas des processus aléatoires non gaussiens, que l'on suppose être stationnaire à l'ordre 2 (en se restreignant à la stationnarité en termes de valeurs efficaces). La non-stationnarité des processus, induite par exemple par la vitesse véhicule ne constitue pas une difficulté en soit, sachant que pour s'en affranchir, il convient de classifier les blocs de données de durée T_b , extraits sur le processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ non gaussien et non stationnaire, en terme de valeurs efficaces \ddot{x}_{eff} .

De ces considérations techniques, et après avoir calculé par la technique FOH sur chaque système étalon le déplacement relatif $z(t)$ sur la durée de référence T_{ref} de l'excitation $\ddot{x}(t)$ stationnaire non gaussienne, les réponses $z(t)$ des systèmes étalons sont comme pour $\ddot{x}(t)$ découpés par bloc de durée T_b , sans recouvrement. Le nombre de blocs N d'analyse est alors égal au rapport (T_{ref} / T_b) et le niveau d'endommagement par fatigue partiel $d(i)$ de chaque bloc ($i=1$ à N) est estimé. L'endommagement par fatigue partiel $d(i)$ de chaque bloc de durée T_b est alors évalué dans le domaine temporel par l'expression (15) précédente, au sens des lois de Basquin et de Miner.

Pour chaque réponse $z(t)$ de nature non gaussienne, l'échantillon des N valeurs d'endommagement $\{d(i), i=1$ à $N\}$ ainsi évalué sur la durée T_b , constitue alors un N -échantillons aléatoires permettant de caractériser les premiers moments statistiques du dommage par fatigue partiel $D(\xi)$ de $z(t)$, produit sur la durée T_b . Les deux premiers moments statistiques de la variable aléatoire $D(\xi)$ sont alors facilement calculables et ont pour expressions les relations suivantes, en terme de moyenne \bar{D} et de variance $\hat{\sigma}_D^2$, qui sont ici deux estimateurs statistiques non biaisés, à savoir :

$$\bar{D} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N d(i) \quad \text{avec } N = \frac{T_{\text{réf}}}{T_b} \quad \text{et } \hat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N [d(i) - \bar{D}]^2 \quad (22)$$

Le dommage par fatigue cumulé $D_c(\xi)$, associée au processus aléatoire de contrainte stationnaire (à l'ordre 2), non-gaussien et de moyenne nulle sur la durée totale T_i est alors défini par la relation (23) suivante. Pour ce faire, on utilise une fois encore le principe de Miner, en considérant un facteur d'extrapolation en durée (noté M), qui est associé au processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ mesuré ou estimé sur $T_{\text{réf}}$, sachant que l'objectif recherché est d'évaluer désormais l'endommagement par fatigue cumulé sur la durée totale $T_i > T_{\text{réf}}$ en en comprenant sa statistique.

$$D_c(\xi) = \sum_{i=1}^M D_i(\xi) \quad \text{avec } M = T_i/T_b \quad (23)$$

M : facteur d'extrapolation en durée

Les M variables aléatoires représentatives du dommage par fatigue partiel $D_i(\xi)$ sont ici supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), ce qui permet désormais d'appliquer le Théorème Centrale Limite (TCL) pour définir la loi de probabilité asymptotique du dommage cumulé $D_c(\xi)$. Cette hypothèse, liée à l'utilisation du TCL n'est acceptable que si le facteur d'extrapolation en durée M est suffisamment grand, ce qui constitue un critère de validation statistique à satisfaire en priorité, à savoir :

- ✓ Si les lois des variables aléatoires $D_i(\xi)$ sont proches d'une loi normale, alors ($M > 4$) est suffisant,
- ✓ Si les lois des variables aléatoires $D_i(\xi)$ sont moyennement proches d'une loi normale, alors ($M > 12$) est suffisant (cas des lois symétriques autour de leur moyenne),
- ✓ Si les lois des variables aléatoires $D_i(\xi)$ ne sont pas proches d'une loi normale, alors ($M \geq 100$) est à considérer (cas des lois fortement asymétriques, qui correspond ici à notre cas d'étude, puisque le dommage par fatigue cumulé est par définition à support positif).

Dans la pratique, on peut se satisfaire d'un facteur d'extrapolation en durée minimal de 30, mais il serait imprudent de vouloir descendre en-dessous, pour éviter d'estimer des α -quantiles d'endommagement par fatigue non pertinents et non représentatifs du processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ considéré. De ce fait la loi asymptotique $f_{D_c}(y)$ de l'endommagement par fatigue cumulé est assimilable à une loi normale (sous l'hypothèse que les variables aléatoires $D_i(\xi)$ soient i.i.d) centrée sur \bar{D}_c et d'écart type $\hat{\sigma}_{D_c}$. Elle s'écrit donc de la façon suivante :

$$f_{D_c}(y) \xrightarrow{M \text{ grand}} \frac{1}{\hat{\sigma}_{D_c}} \cdot \varphi\left(\frac{y - \bar{D}_c}{\hat{\sigma}_{D_c}}\right) \quad \text{avec } \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (24)$$

$$\bar{D}_c = M \cdot \bar{D} \quad \text{et } \hat{\sigma}_{D_c} = \sqrt{M} \cdot \hat{\sigma}_D \quad \text{et où } M : \text{facteur d'extrapolation en durée}$$

Où : $\varphi(y)$ représente la loi normale centrée réduite (moyenne nulle et variance unitaire), notée très souvent $N(0,1)$ en statistique.

De ces considérations techniques, il est alors possible d'évaluer l'expression du SFX temporel, associé à un risque de dépassement α donné, en s'appuyant sur la définition du α -quantile de la loi de distribution $f_{D_c}(y)$ définie à la relation (24) précédente. On obtient alors l'expression analytique du α -quantile, noté $D_{c,\alpha}$, qui est homogène à la quantité D_c de l'expression (16) de la démarche temporelle à caractère déterministe.

$$D_{c,\alpha}(f_0) = \bar{D}_c \cdot \left[1 + \sqrt{2} \cdot CV[D_c(\xi)] \cdot \text{erf}^{-1}(1 - 2\alpha) \right] \quad (25)$$

avec $CV[D_c(\xi)] = \hat{\sigma}_{D_c} / \bar{D}_c$ et $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp(-\lambda^2) \cdot d\lambda$

En s'appuyant sur l'unité d'un SDF qui correspond à celle d'un dommage par fatigue (valeur adimensionnelle), rapporté au coefficient forfaitaire (K^b / C), il est alors possible d'écrire l'expression analytique du SFX temporel comme suit :

$$SFX_{tp}(f_0) = \frac{C}{K^b} \cdot D_{c,\alpha} = M \cdot \bar{D} \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{2}{M}} \cdot CV[D(\xi)] \cdot \text{erf}^{-1}(1 - 2\alpha) \right] \quad (26)$$

avec $CV[D(\xi)] = \hat{\sigma}_D / \bar{D}$ et où $(\bar{D}, \hat{\sigma}_D)$ sont définis par (22)

Où : $CV[D(\xi)]$ représente le coefficient de variation expérimental du dommage partiel, associé au processus aléatoire de réponse en contrainte, évalué au travers sur système étalon (f_0, Q) , pour une durée de mesure égale à $T_{réf}$.

Par définition, le SDF temporel, noté $SDF_{tp}(f_0)$, étant associé au risque de dépassement égale à 50%, on constate que l'on peut écrire d'emblée :

$$\frac{SFX_{tp}(f_0)}{SDF_{tp}(f_0)} = 1 + \sqrt{\frac{2}{M}} \cdot CV[D(\xi)] \cdot \text{erf}^{-1}(1 - 2\alpha) \quad (27)$$

avec $CV[D(\xi)]$: coefficient de variation expérimental du dommage partiel

On constate donc que le rapport du SFX temporel sur le SDF temporel est une fonction de α , de M et de $CV[D(\xi)]$ que l'on peut représenter graphiquement comme suit, pour un coefficient d'extrapolation en durée M de 10, 100 ou 1000 (tracés respectivement sur les Figures 7, 8 et 9 suivantes).

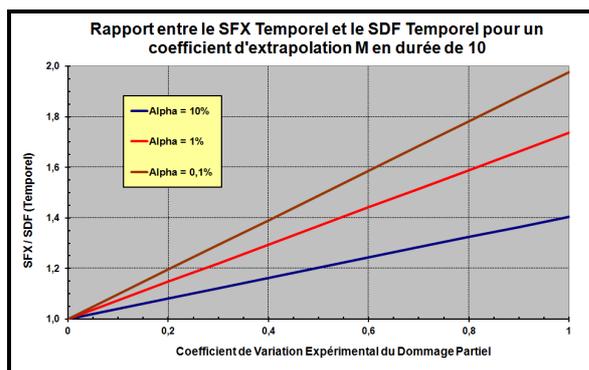


Figure 7. SFX_{tp}/SDF_{tp} pour $M=10$.

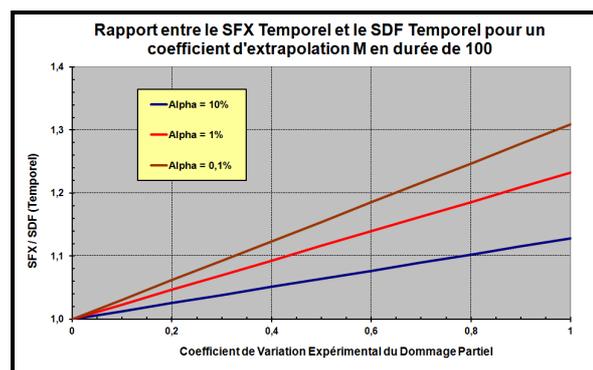


Figure 8. SFX_{tp}/SDF_{tp} pour $M=100$.

Pour un coefficient d'extrapolation M de durée donné, on constate que le rapport entre le SFX temporel et le SDF temporel augmente avec l'augmentation du coefficient de variation expérimental du dommage partiel $CV[D(\xi)]$, ainsi qu'avec la diminution du risque de dépassement α que l'on s'impose.

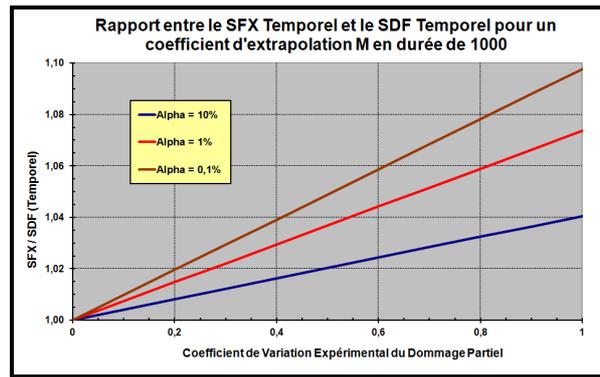


Figure 9. SFX_{tp}/SDF_{tp} pour $M=1000$.

En s'appuyant donc sur les résultats des graphes précédents, on montre que pour un processus de contrainte aléatoire stationnaire non gaussien donné (coefficient de variation du dommage partiel donné) et un niveau de risque donné, plus la durée de sollicitation sera importante (plus M augmente) et plus le rapport entre le SFX temporel et le SDF temporel sera faible.

Ces techniques de calcul du SDF temporel et/ou du SFX temporel sont conditionnées par le choix de la durée T_b du bloc d'analyse du dommage partiel, associé au processus aléatoire non gaussien considéré. Les fondements scientifiques développés précédemment, montrent qu'il est alors important de respecter certains critères fondamentaux pour définir la valeur optimale de cette durée T_b d'analyse, à savoir :

- diminuer le plus possible T_b , afin d'obtenir un nombre N (voir relation 22) suffisamment élevé pour évaluer, avec un bon niveau de précision les deux premiers moments statistique du dommage partiel $D(\xi)$. Ceci va d'ailleurs dans le sens d'augmenter également le facteur d'extrapolation en durée M du processus (voir relations 23 et 24) permettant ainsi de justifier l'utilisation du Théorème central limite (TCL) pour évaluer le modèle statistique du Dommage cumulé $D_c(\xi)$.
- augmenter le plus possible T_b , afin d'assurer l'existence d'un nombre suffisant de cycles pour évaluer un dommage partiel peu corrélé entre deux blocs successifs, afin de satisfaire à l'hypothèse d'indépendance de la relation (23) précédente

Ces deux critères étant antinomiques par nature, le choix de la durée T_b de la dite méthode MBD est dans la pratique, réalisé en fonction de la durée de mesure de référence T_{ref} et de la valeur minimale de f_0 souhaitée.

6 Conclusions

Les techniques de Spectres de Réponses (SR), développées historiquement en termes de SDF temporel pour les phénomènes de chocs, et de SDF spectral pour les phénomènes de vibrations aléatoires, ne permettent pas de caractériser correctement les processus aléatoires non-gaussiens, en terme d'endommagement par fatigue.

Pour ce faire, des techniques de SFX temporel ont été développées et éprouvées dans le cadre des programmes d'Armement Terrestre (VBCI, ARAVIS et CAESAR), mettant en exergue leurs caractères de robustesse et de rapidité de calcul. Face à l'accroissement de l'utilisation des Spectres de Réponses, pour le dimensionnement des structures et la rédaction des spécifications d'essais de qualification des équipements, ces techniques de calculs de SFX temporel ont été proposées récemment dans le cadre de travaux de normalisation AFNOR. Compte-tenu des retours d'expérience,

acquis par Nexter Systems sur l'utilisation de ces approches innovantes développées par l'auteur dans un contexte industriel, les membres du Groupe AFNOR les ont adoptés dans le cadre de la norme NF X50-144-3 [16], pour leurs capacités à étendre favorablement les techniques de Spectres de Réponses à des processus très largement répandues dans l'industries, et jusqu'ici mal caractérisables par les approches classiques du SDF Temporel et/ou du SDF spectral.

Comme illustré par cette norme, ces outils (SFX temporels) de caractérisation des dommages par fatigue, à risque de dépassement imposé, permettent donc d'élargir grandement le champ d'application des méthodes de calcul des Spectres de Réponses, en couvrant désormais le cas des processus non-gaussiens (à bande étroite ou à bande large).

Le caractère non gaussien des processus, étant désormais pris en compte par ces démarches temporelles à caractère stochastique, il n'est donc plus nécessaire d'utiliser les démarches temporelles à caractère déterministe, exposées au paragraphe 3.2, d'autant que ces dernières sont non conservatives.

Références

- [1] J.F. Imbert, Analyse des Structures par Eléments Finis- Cépadues Editions
- [2] C. Lalanne, Vibrations et chocs mécaniques- Hermes Science publications, copyright Lavoisier, 1999 : Tome 5-Élaboration des spécifications
- [3] J.S. Bendat, Principles and Applications of Random Noise Theory, John Wiley & Sons, 1958
- [4] R.W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, Second Edition, ISBN0486652416
- [5] D.O. Smallwood, An improved recursive formula for calculating shock response spectra', The Shock and Vibration Bulletin, 51, Part 2, May 1981, p211-p217
- [6] B. Colin, La probabilisation des SDF : une réponse à la comparaison des sévérités d'environnement déterministe et stochastique, en termes d'endommagement par fatigue, 25-27 Septembre 2007, ASTELAB 2007
- [7] NORMDEF 0101, Guide d'application de la démarche de personnalisation en environnement mécanique, DGA 2009, Edition 01, Juillet 2009
- [8] B. Colin, Approche stochastique de la Fatigue vibratoire : comparaison entre les méthodes Peak-Valley et Rainflow Counting, Revue de Métallurgie, EDP Sciences, 2012, DOI :10.1051/metal/2012024
- [9] M.A. Miner, Cumulative damage in Fatigue, Journal of Applied Mechanics, 1945, 67, A159-A164
- [10] S.O Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, B.S.T.J., Vol 23, pp 282-332, 1944
- [11] A. Preumont, Random Vibration and Spectral Analysis, Kluwer Academics Publishers, 1994
- [12] C. Lalanne, Vibrations et chocs mécaniques- Hermes Science publications, copyright Lavoisier, 1999 : Tome 2-Chocs mécaniques
- [13] B. Colin, La probabilisation des SRE : une réponse à la comparaison des sévérités d'environnement déterministe et stochastique, en termes de contraintes extrêmes, 25-27 Septembre 2007, ASTELAB 2007
- [14] Stephen H. Crandall and W.D Mark, Random vibration in mechanical systems (1963, Hardcover)
- [15] B. Colin, Characterisation of random Gaussian and non-Gaussian stress processes in terms of extreme responses, Matec Web of Conferences, edp sciences, October 2014, DOI: 10.1051/mateconf/20152006001
- [16] AFNOR, Norme NF X50-144-3, Démonstration de la tenue aux environnements-Conception et réalisation des essais en environnement-Partie 3 : Application de la démarche de personnalisation en environnement mécanique, 201