

Étude harmonique et réduction des systèmes non-linéaires géométriques : application au cas des éléments 3D volumiques

A. Martin^{a*}, B. Chouvion^a, F. Thouverez^a

a. École Centrale de Lyon, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR-CNRS 5513

*. contact : adrien.martin@doctorant.ec-lyon.fr

Résumé :

L'étude de problèmes dynamiques non-linéaires par la méthode d'équilibrage harmonique est très répandue pour les systèmes comportant des non-linéarités localisées. Nous proposons ici d'appliquer cette méthode sur un système comportant des non-linéarités globales de types géométriques modélisé à l'aide d'éléments finis volumiques que nous comparons à un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli respectant les hypothèses de von Karman. Les modèles obtenus sont par la suite réduits grâce à l'utilisation des dérivées modales ainsi qu'une procédure d'évaluation des raideurs réduites.

Abstract :

The harmonic balance method, well known procedure for the study of localised nonlinearities, is here applied to volumic finite element models subjected to geometric nonlinearities. Results are compared to an Euler-Bernoulli model choosen as reference. To deal with numerical difficulties, it is proposed to reduce the models by the use of modal derivatives coupled with a stiffness evaluation procedure.

Mots clefs : dérivée modale, raideur réduite, non-linéarité géométrique, éléments finis, équilibrage harmonique.

1 Introduction

La prise en compte des non-linéarités géométriques dans l'industrie aéronautique est une problématique qui se pose de plus en plus aujourd'hui avec l'augmentation de la taille de certains organes, notamment la soufflante dans l'optique d'une diminution de la consommation de carburant grâce à un fort taux de dilution. Mais une résolution frontale du système complet n'est pas envisageable, la faute à un grands nombre d'inconnues, et dont la complexité est accrue par les effets non-linéaires.

Des outils très puissants ont été développés afin de procéder à la réduction des systèmes non-linéaires, notamment avec l'utilisation des modes non-linéaires. Cette approche est parfaitement adaptée à l'étude de systèmes comportant un nombre modéré d'inconnues non-linéaires, comme par exemple les modèles poutres [2], ou les systèmes comportant des interfaces frottantes [4]. En revanche, lorsque le

nombre d'inconnues devient important, cette méthode perd de son intérêt par des temps de calcul prohibitifs. Slaats [7] propose une réduction par une procédure de Galerkin sur une base de modes linéaires complétée par des vecteurs spécifiques appelés dérivées modales parfaitement adaptée à l'étude des non-linéarités géométriques [5]. Il est cependant nécessaire de coupler cette méthode à une procédure d'évaluation des raideurs réduites STEP [6]. D'une part cela permet d'éviter de reconstruire le vecteur des efforts non-linéaires avant de les projeter sur la base de réduction. D'autre part, il est ainsi possible d'appliquer cette méthode à l'aide des logiciels éléments finis du commerce. Ces méthodes sont appliquées dans un premier temps à un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli respectant les hypothèses de von Karman auquel sera comparé une géométrie équivalente modélisée à l'aide d'éléments finis volumiques. La résolution sera réalisée dans les deux cas à l'aide d'une méthode d'Équilibrage Harmonique (HBM) sur le modèle complet et le modèle réduit.

2 Outils théoriques d'étude et de réduction des systèmes dynamique non-linéaires

On supposera que l'équation différentielle d'un système non-linéaire géométrique discrétisé par la méthode des éléments finis peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (1)$$

avec \mathbf{x} le vecteur des inconnues du problème, à savoir les degrés de libertés, de taille $(n, 1)$; \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} les matrices respectivement de masse, raideur et amortissement, de taille (n, n) ; \mathbf{f}^{nl} le vecteur des efforts non-linéaires, qui ne dépend que des déplacements étant donné que nous considérons une non-linéarité géométrique; et \mathbf{f}^{ext} le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système. Les 2 vecteurs d'efforts sont de taille $(n, 1)$.

2.1 Méthodes de projection a priori

Les méthodes de réduction qui vont être utilisées dans ce document sont basées sur une procédure de Galerkin. Cette procédure, appliquée à l'équation (1) sur une base $\Phi = [\varphi_k]_{1 \leq k \leq R}$ constituée de R vecteurs, $R \ll n$, mène à l'équation projetée (2b).

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^R \varphi_k q_k(t) \quad (2a)$$

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_r^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_r^{\text{ext}}(t) \quad (2b)$$

avec $\mathbf{A}_r = \Phi^T \mathbf{A} \Phi$ pour ce qui concerne les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} , et $\mathbf{b}_r = \Phi^T \mathbf{b}$ pour ce qui est des vecteurs \mathbf{f}^{ext} et \mathbf{f}^{nl} . Dans notre cas, un premier choix de base de projection peut être fait avec les modes linéaires, mais cette base trouve vite ses limites, comme nous le verrons plus tard, les non-linéarités induisant une dépendance de ceux-ci en fréquence et en déformée vis-à-vis de l'amplitude des déplacements. De ce constat, il est alors possible d'effectuer un développement de Taylor de (2a) au deuxième ordre. Cela mène à des expressions de dérivées modales $\partial \varphi_{ij}$ avec ou sans masse [7] en utilisant une approche du type méthode de Nelson [11]. Mais ces expressions nécessitent de connaître l'expression des matrices de raideurs non-linéaires du systèmes, ce qui est rarement le cas. Slaats [7] propose aussi une méthode de détermination numérique des dérivées modales basée sur une différence finie :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} = \frac{\varphi_i - \psi_i(h_j \varphi_j)}{h_j} \quad \partial \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \right) \quad (3)$$

avec φ_i le $i^{\text{ème}}$ mode linéaire de notre structure. $\psi_i(h_j \varphi_j)$ est défini comme le $i^{\text{ème}}$ mode linéaire de la structure calculé autour de la déformée statique selon le $j^{\text{ème}}$ mode linéaire de la structure non-déformée, associé à un coefficient d'amplitude h_j ; cette déformée statique étant obtenue par un calcul prenant en compte les effets géométriques.

Le traitement de la partie non-linéaire de l'équation (2b) par la procédure de Galerkin nécessite une attention particulière. En effet, il est nécessaire de reconstruire le vecteur \boldsymbol{x} non réduit afin de déterminer les efforts non-linéaires complets et les projeter ensuite sur Φ . Or, dans notre résolution non-linéaire, il va falloir effectuer cela à chaque itération du solveur, ce qui peut engendrer des temps de calcul prohibitifs. Il est cependant possible de déterminer l'expression des efforts non-linéaires réduits a priori par une procédure d'évaluation des raideurs réduites STEP [6], ce qui évite un va-et-vient entre systèmes complet et réduit.

2.2 Méthodes de résolution

Afin de déterminer la réponse périodique du système, nous nous appuyerons sur la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) qui consiste à rechercher les solutions sous forme de séries de Fourier tronquées à l'harmonique H :

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{\boldsymbol{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^H \left(\boldsymbol{a}_k \cos(k\omega t) + \boldsymbol{b}_k \sin(k\omega t) \right) \quad (4)$$

Cela revient à effectuer une projection de Galerkin de notre équation, générale (1) ou réduite (2b), sur la base des fonctions harmoniques à l'aide du produit scalaire associé (5).

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) g(t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

Les inconnues du problème deviennent alors les coefficients harmoniques \boldsymbol{a}_k et \boldsymbol{b}_k associés aux degrés de liberté. On obtient après projection un système d'équations algébriques (6) avec \mathbf{Z} une matrice tridiagonale par blocs, projection de la partie linéaire de notre équation, dépendante de la pulsation ω ; $\hat{\boldsymbol{f}}^{\text{ext}}$ et $\hat{\boldsymbol{f}}^{\text{nl}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ les vecteur des efforts respectivement extérieurs et non-linéaires projetés sur la base de Fourier. Ce dernier peut être obtenu analytiquement dans des cas simples, tels que l'oscillateur de Duffing, ou alors déterminé à l'aide d'une méthode d'Alternance Temps/Fréquence (AFT) [1].

$$\mathbf{Z}(\omega) \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\text{nl}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{f}}^{\text{ext}} \quad (6)$$

L'utilisation de ces méthodes est illustrée Figure 1.

3 Cas d'application : poutre bi-encastée

Ce cas a été choisi pour sa simplicité de mise en place ainsi que pour la possibilité de confronter nos résultats simulés sur un cas 3D volumique à des travaux existants dans la littérature [3] appliquées sur une poutre d'Euler-Bernoulli. Dans la suite la poutre considérée aura les caractéristiques suivantes :

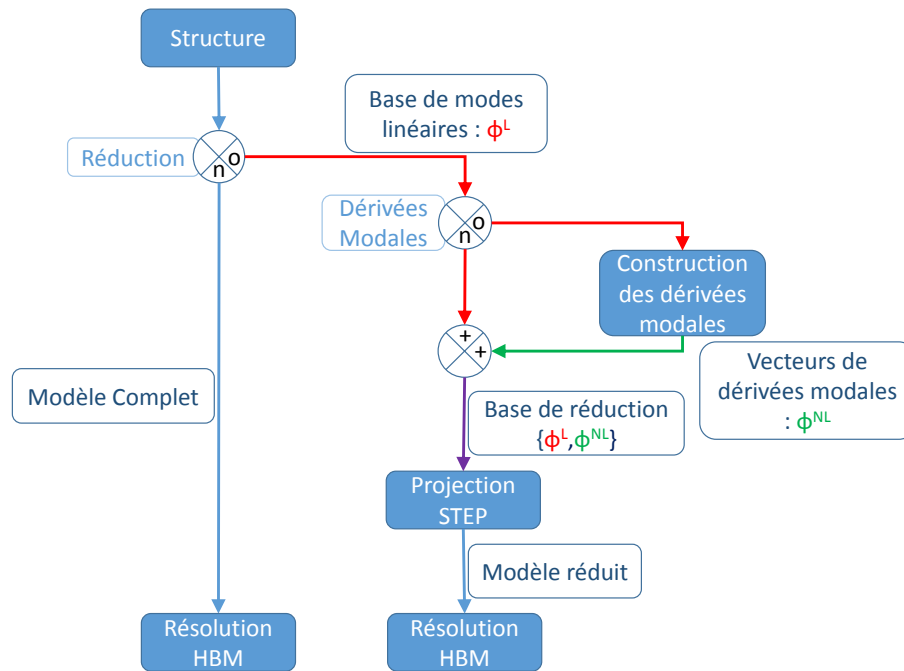


FIGURE 1 – Schéma récapitulatif des méthodes utilisées

Longueur	$L = 1 \text{ m}$
Section	$S = 0,03 \text{ m} \times 0,03 \text{ m}$
Masse volumique	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Module d'Young	$E = 210 \text{ GPa}$

TABLE 1 – Caractéristiques géométriques et matériau de la poutre

3.1 Modélisation 1D : poutre d'Euler-Bernoulli

3.1.1 Modèle théorique

Dans la théorie des poutres en grandes déformations on considèrera le tenseur de Green-Lagrange non-linéarisé et simplifié (7) selon les hypothèses de von Karmann [8], où u représente le déplacement longitudinal, v le déplacement transverse, et y l'ordonnée selon l'épaisseur de la poutre. Ainsi, la déformation selon la direction x est donnée par :

$$\mathbf{E}_{xx} = u_{,x} - y v_{,xx} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \quad (7)$$

On retrouve bien ici la partie linéaire classique du tenseur de Green-Lagrange à laquelle vient s'ajouter une partie quadratique. Une fois injectée dans l'énergie potentielle (8), cette expression va donner naissance à un terme quartique $v_{,x}^4$ et un terme cubique $u_{,x} v_{,x}^2$.

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{V_0} E \mathbf{E}_{xx}^2 dV_0 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(ES u_{,x}^2 + EI v_{,xx}^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_{,x} v_{,x}^2 + \frac{1}{4} v_{,x}^4 \right) dx \quad (8)$$

L'ensemble de ces composantes non-linéaires donneront naissance à des termes quadratique et cubique dans les équations du mouvement.

3.1.2 Étude harmonique du système complet et réduction à l'aide de dérivées modales

L'étude harmonique a été menée sur la poutre (voir caractéristiques Tableau 1) autour du premier mode de flexion. La non-linéarité mise en jeu dans notre cas provient du couplage entre flexion et membrane, du fait des deux encastremets. Les résultats, obtenus avec une poutre de 50 éléments et 3 harmoniques sont visibles Figure 2.

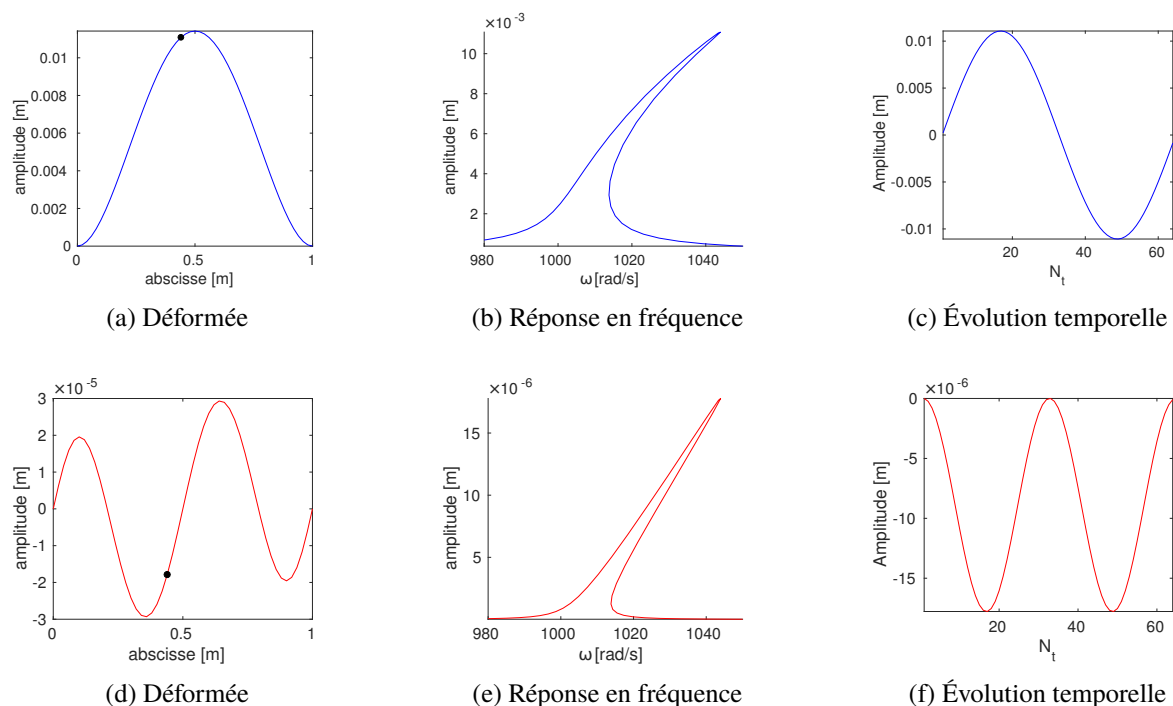


FIGURE 2 – Déformée, réponse en fréquence et évolution temporelle de la poutre d'Euler-Bernoulli (— : déplacement transverse, — : déplacement longitudinal) à l'abscisse $x = 44\text{cm}$ (●)

Le résultat de la réduction est visible Figure 3. L'utilisation du 1^{er} mode de flexion et du mode de membrane couplée donne des résultats mitigés. Ils sont corrects en ce qui concerne les déplacements transverses, beaucoup moins pour ce qui est des déplacements longitudinaux. L'utilisation du mode de flexion étudié et de sa dérivée modale associée donne quant à elle d'excellents résultats, tant transversalement que longitudinalement (voir erreur Tableau (2)), ainsi qu'un gain de temps non négligeable de plus de 95% (voir Tableau (3)). En s'intéressant à la forme des vecteurs de la base formée, notamment celle de la dérivée modale, on remarque que la partie longitudinale de celle-ci (Figure 4b) se rapproche fortement de la déformée longitudinale de la poutre (Figure 2f), ce qui indique que cette base est à même de rendre compte convenablement des effets de membrane dus au couplage.

3.2 Modélisation 3D : éléments hexaédriques à 27 nœuds

3.2.1 Élément volumique non-linéaire

La modélisation 3D qui sera développée ici s'appuiera sur l'expression complète du tenseur de Green-Lagrange (9).

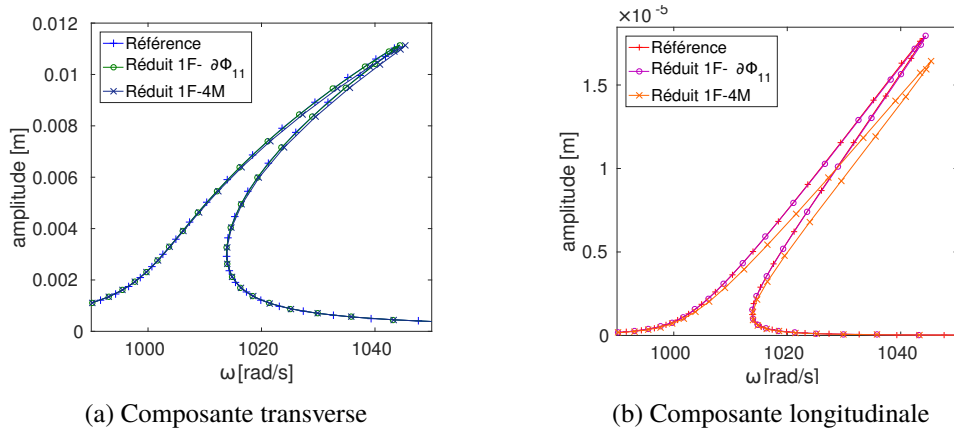
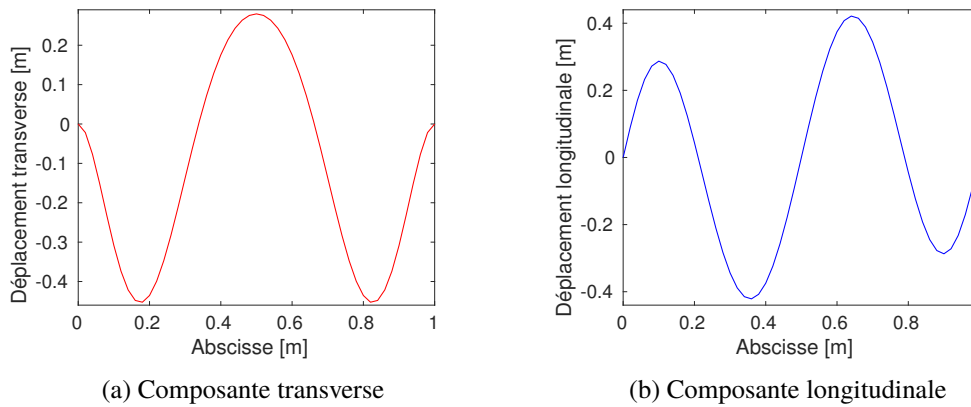


FIGURE 3 – Réponse en fréquence de la poutre d'Euler-Bernoulli réduite

FIGURE 4 – Dérivée modale $\partial\varphi_{11}$ Euler-Bernoulli

	Modèle réduit $1F - 4M$	Modèle réduit $1F - \partial\Phi_{11}$
Fréquence	0,14 %	0,04 %
Amplitude transverse	0,5 %	0,6 %
Amplitude longitudinale	7,5 %	0,8 %

TABLE 2 – Erreur relative du modèle complet d'Euler-Bernoulli

	Modèle complet	Modèle réduit $1F - \partial\varphi_{11}$
Durée	80,2 s	3,07 s
Gain		96,3 %

TABLE 3 – Gain en temps de la réduction du modèle d'Euler-Bernoulli

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla^T \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \quad (9)$$

Les matrices de raideurs sont obtenues par une approche de type Lagrangien Total et une loi matériau de type Saint-Venant-Kirchhoff [10]. La procédure est la même que pour la construction des matrices éléments finis linéaires. Seulement, le caractère non-linéaire de ces matrices se traduit par une dépendance de celles-ci vis-à-vis des inconnues du problème, à savoir les degrés de libertés. Les intégrations

se font par quadrature de Gauss sur la maille de référence.

3.2.2 Étude harmonique et comparaison avec la poutre d'Euler-Bernoulli

Le modèle utilisé reprend les caractéristiques de la poutre précédente (voir Tableau (1)). Elle se compose de 60 éléments, 4 dans la section et 15 selon la longueur, pour un total de 2325 degrés de libertés. La procédure HBM est effectuée à l'aide de 3 harmoniques. Le résultat obtenu après simulation est comparé au modèle d'Euler-Bernoulli en Figure (5).

A une translation en fréquence près, les réponses des 2 modèles sont très proches. Cette différence peut s'expliquer par certains effets mécaniques non pris en compte par le modèle poutre comme par exemple les effets de Poisson qui sont présents dans le modèle volumique. Quoiqu'il en soit, le résultat du modèle volumique vis-à-vis de celui d'Euler-Bernoulli reste satisfaisant.

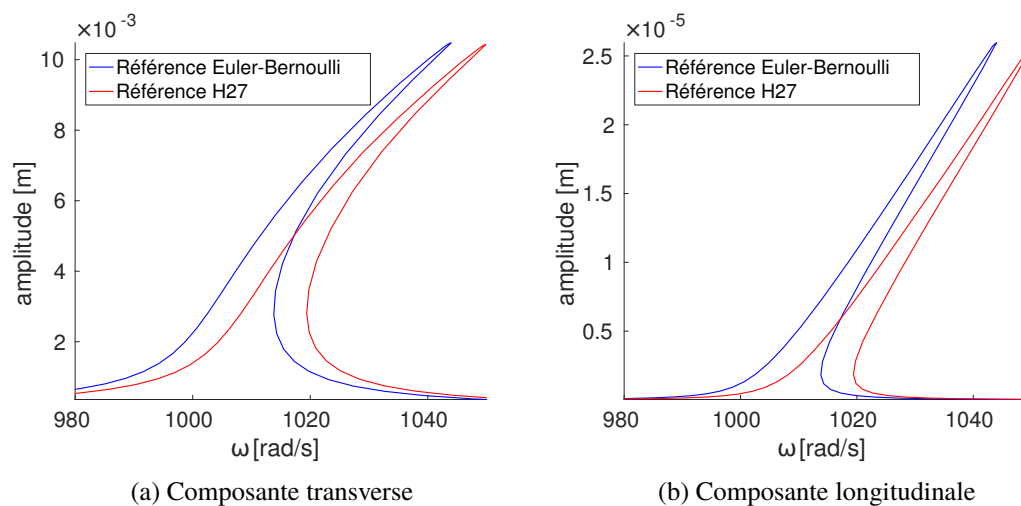


FIGURE 5 – Comparaison des 2 modèles à l'abscisse $x = 40\text{cm}$: Euler-Bernoulli et 3D volumique

3.2.3 Réduction à l'aide de dérivées modales

La réduction à l'aide d'une base composée du premier mode de flexion et de la dérivée modale $\partial\varphi_{11}$ donne de très bons résultats, similaires à ceux de la poutre d'Euler-Bernoulli (voir Figure (6)). Que ce soit pour les déplacements transverses ou longitudinaux, les résultats sont très proches (tableau (5)) avec une base constituée de seulement 2 vecteurs. Le temps de résolution est lui aussi très intéressant avec un gain significatif de 99,96 % (Tableau (4)).

	Modèle complet	Modèle réduit $1F - \partial\varphi_{11}$
Durée	20 042 s ($\sim 5,5$ h)	7,9 s
Gain		99,96 %

TABLE 4 – Gain en temps de la réduction du modèle 3D volumique

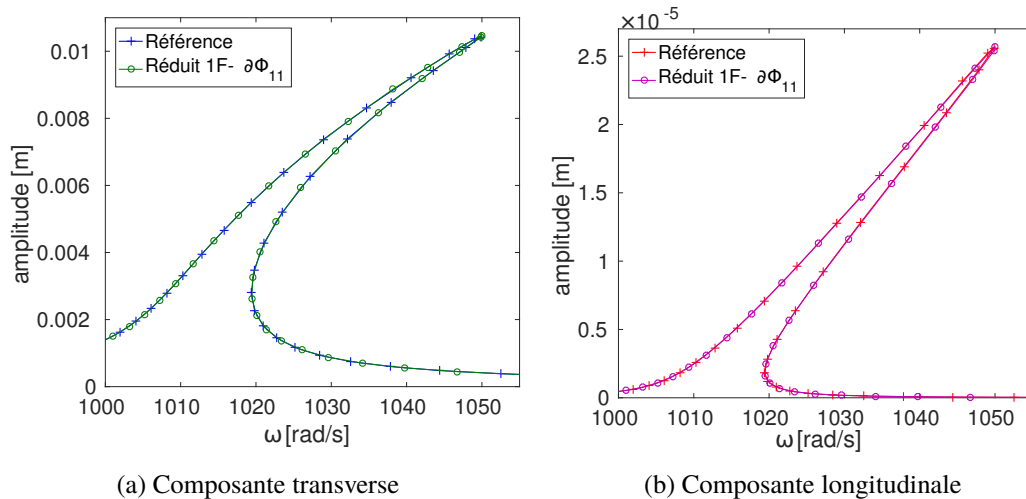


FIGURE 6 – Fonction de réponse en fréquence : Réduction du modèle 3D volumique

	Modèle réduit 1F – $\partial\varphi_{11}$
Pulsation	0,01 %
Amplitude transverse	0,4 %
Amplitude longitudinale	0,48 %

TABLE 5 – Erreur relative du modèle 3D volumique

4 Conclusion

La méthode d'équilibrage harmonique a été appliquée pour simuler les grands déplacements d'une poutre bi-encastée maillée avec des éléments finis volumiques. Ce modèle non-linéaire géométrique, initialement de grande taille, a été réduit en faisant appel à l'utilisation d'une base enrichie par des dérivées modales, et à la technique de l'évaluation des raideurs réduites pour calculer la projection des efforts non-linéaires. Les résultats obtenus ont été comparés à des résultats issus d'un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli respectant les hypothèses de von Karman. Les résultats sont très satisfaisants et ont permis de bien appréhender l'efficacité de la méthode.

Dans de futurs travaux, il serait intéressant d'appliquer les méthodes de réduction présentées dans cet article sur une géométrie plus complexe, comme une plaque vrillée encastée-libre. Le difficulté résidera alors dans les critères à appliquer pour choisir les modes et dérivées modales à prendre en compte dans la base de réduction [9].

Références

- [1] T.M. Cameron, J.H. Griffin. An alternating frequency-time method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, 56(1), 149–154, 1989.
- [2] C. Touzé, O. Thomas, A. Huberdeau, Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures, *Computers & Structures*, 82, 2671–2682, 2004.
- [3] A. Grolet, F. Thouverez. Model Reduction for nonlinear vibration analysis of structural systems using modal derivatives and stiffness evaluation procedure, *CanCNSM 2013*, Montreal, Canada.

-
- [4] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, J-P. Ousty, M. Mbaye, A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83, 75–92, 2017.
- [5] O. Weeger, U. Wever, B. Simeon, Nonlinear frequency response analysis of structural vibrations, *Computational Mechanics*, 54(6), 1477–1495, 2014.
- [6] A.A. Muravyov, S.A. Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures, *Computers and Structures*, 81(15), 1513–1523, 2003.
- [7] P.M. Slaat, J. de Jongh, A.A.H.J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics, *Computers and Structures*, 546(6), 1155–1171, 1995.
- [8] O. Thomas. Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques, HDR, École Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [9] P. Tiso. Optimal second order reduction basis selection for non linear transient analysis, *Proceedings of the 29th IMAC*, 2011, Jacksonville, Etats-Unis.
- [10] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method, Volume 2 : Solid Mechanics*, 2000.
- [11] M.I. Friswell. The Derivatives of Repeated Eigenvalues and Their Associated Eigenvectors. *Journal of vibration and Acoustics*, 118(3), 390–397, 1996.