

# Mesure de résonances nonlinéaires et de courbes maitresses d'une poutre piézoélectrique

V. DENIS<sup>a</sup>, M. JOSSIC<sup>b</sup>, A. RENAULT<sup>a</sup>, C. GIRAUD-AUDINE<sup>c</sup>, O. THOMAS<sup>a</sup>

a. Arts et Métier Paristech, LSIS UMR CNRS 7296, 8 bd Louis XIV 59046 Lille,  
vivien.denis@ensam.eu

b. Institut d'Alembert UMR CNRS 7190, Université P. et M. Curie, 4 pl. Jussieu, 75252 Paris

c. Arts et Métier Paristech, L2EP, 8 bd Louis XIV 59046 Lille

## Résumé :

*On s'intéresse ici à une poutre piézoélectrique encastrée-libre excitée directement ou paramétriquement pour un objectif de récupération d'énergie vibratoire. Ce système montre des effets nonlinéaires géométriques qui jouent un rôle important dans le cadre de la récolte d'énergie en augmentant notamment la plage fréquentielle de récupération par incurvation de la courbe de résonance. On cherche alors à caractériser le système nonlinéaire et identifier les paramètres d'un modèle réduit de celui-ci. D'autre part, dans le cas d'une poutre piézoélectrique, le coefficient de couplage électromécanique est un indicateur de performance du système et peut-être obtenu par la connaissance des fréquences de résonance du système en circuit ouvert et fermé. La caractérisation nonlinéaire et l'estimation de facteur de couplage peuvent tous deux être faits en mesurant la courbe maitresse d'un mode nonlinéaire du système, qui est définie comme la relation entre amplitude et fréquence des oscillations libres pour un mode donné. Une méthode récente utilisant une boucle à verrouillage de phase pour la mesure de courbe maitresse est employée ici et permet de suivre le lieu de la quadrature de phase entre excitation et réponse du système. Une variation de cette méthode permet de plus une continuation expérimentale de la courbe de résonance au voisinage d'un mode en faisant varier le déphasage entre excitation et réponse ; Le système contrôlé est stable même dans la zone instable de la résonance, ce qui évite le phénomène de saut. La méthode de mesure est également appliquée à la caractérisation des modes nonlinéaires d'un gong chinois. Les résultats sont comparés à des méthodes classiques : variation en fréquence en régime forcé pour obtenir la courbe de résonance et mesure de décroissance des oscillations libres pour obtenir la courbe maitresse.*

**Mots clefs : vibration, nonlinéaire, récolte d'énergie**

## 1 Introduction

Les vibrations nonlinéaires sont un aspect important à prendre en compte dans le contexte de la récolte d'énergie vibratoire. Les nonlinéarités peuvent par exemple augmenter la plage fréquentielle de récupération par incurvation de la courbe de résonance. La poutre piézoélectrique monomorphe encastrée-libre considérée dans cette étude constitue un récupérateur d'énergie nonlinéaire très simple [1], sous excitation directe ou paramétrique. Il est important de bien comprendre dans un premier temps la dynamique

d'un tel système, et donc de caractériser son comportement nonlinéaire de façon à, par exemple identifier les paramètres d'un modèle réduit. De plus, le facteur de couplage électro-mécanique (MEMCF *Modal Electro-Mechanical Coupling Factor*) [2], qui peut être calculé en mesurant les fréquences de résonance de la poutre piézoélectrique en circuit ouvert et court-circuit, est aussi un indicateur de performance du système. La caractérisation nonlinéaire, par identification de modes nonlinéaire, et l'estimation d'un facteur de couplage peuvent toutes deux être faites en mesurant la courbe maitresse d'un mode nonlinéaire.

## 2 Identification de modes nonlinéaires

### 2.1 Contexte

Les modes nonlinéaires (NNM *Nonlinear normal modes*) sont un outil utile pour l'interprétation et le calcul de la dynamique des systèmes nonlinéaires. Les NNM d'un système conservatif peuvent être vues de façon équivalent comme des familles de solutions périodique et comme des variétés invariantes dans l'espace des phases [3]. Cette dernière propriété, qui spécifie que le mouvement initié sur un NNM reste sur celui-ci sans transfert sur aucun autre, permet de les calculer comme des oscillateurs de Duffing invariants de la forme [4] :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \Gamma_1 q^3 + \Gamma_2 q \dot{q}^2 = 0, \quad (1)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre et  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les deux raideurs cubiques nonlinéaires. La solution de l'équation (1) s'écrit  $q(t) = a \cos(\omega_{nl}t + \varphi)$ , ce qui définit la courbe maitresse (ou *backbone curve*) comme une relation amplitude-fréquence, donnée par un calcul de perturbation au premier ordre :

$$\omega_{nl} = \omega_0(1 + \Gamma_0 a^2), \quad (2)$$

où  $\omega_{nl}$  est la pulsation nonlinéaire qui dépend de l'amplitude  $a$ , et où  $\Gamma_0 = (3\Gamma_1 + \omega_0^2 \Gamma_2)/8\omega_0^2$ . Le plus facile pour une identification nonlinéaire est alors de déterminer  $\omega_0$  et  $\Gamma_0$  en mesurant la courbe maitresse. On peut remarquer que l'équation (1) s'applique au premier ordre à n'importe quel système avec des nonlinéarités quadratiques ou cubiques, et est donc complètement générique. Si on s'intéresse à des modes nonlinéaires assouplissants, on identifiera alors un coefficient  $\Gamma_0$  négatif. De plus, même si deux coefficients cubiques apparaissent dans (1) (avec l'approche en forme normale décrite dans [4]), il n'est pas possible au premier ordre de distinguer l'effet de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  puisqu'ils sont rassemblés dans  $\Gamma_0$ . Par conséquent, identifier seulement  $\Gamma_0$  et l'utiliser dans un oscillateur de Duffing standard avec le terme cubique  $\Gamma_0 q^3$  semble la stratégie d'identification la plus efficace en pratique.

### 2.2 Résonances d'amplitude et de phase

On étudie maintenant les oscillations forcées du système (1), sous un forçage harmonique  $F \cos \Omega t$ , tout en ajoutant un terme dissipatif linéaire  $2\mu \dot{q}$ . Les réponses en fréquence pour différentes amplitude de forçage sont calculées en utilisant une méthode d'équilibrage harmonique et le logiciel MANLAB [5], et tracées sur la figure 1. Celle-ci montre également trois autres courbes : la résonance de phase, qui correspond à la courbe maitresse et pour qui le déplacement est en quadrature de phase avec l'excitation ; la résonance d'amplitude, qui correspond au maxima d'amplitude de chaque réponse forcée ; la courbe suivant la bifurcation nœud-col, qui délimite le saut et la région instable. Cette figure montre que pour un système amorti, la *backbone curve* est distincte et légèrement en dessous de la résonance d'amplitude. Elle est également au dessus de la bifurcation et donc reste dans la partie stable de la réponse forcée.

Pour des systèmes faiblement amortis, la différence entre les résonances de phase et d'amplitude devrait être négligeable.

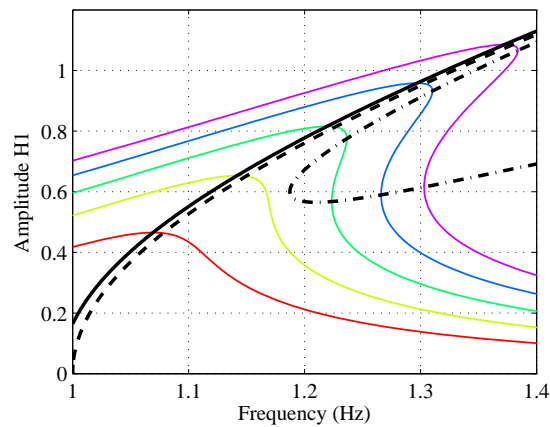


FIGURE 1 – Réponse en fréquence (traits fins colorés,  $F=0.1$  0.15 0.2 0.25 0.3  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), continuation de la résonance d'amplitude (trait plein noir) et de la résonance de phase (trait interrompu), et continuation de la bifurcation (trait mixte noir) pour le système (1) avec  $\omega_0 = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\Gamma_1 = 1 \text{ m}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $\Gamma_2 = 0$  et  $\mu = 0.1 \text{ s}^{-1}$ .

### 3 Méthodes de mesure de courbes maitresses

La méthode la plus aisée pour obtenir expérimentalement une courbe maitresse nonlinéaire est de mesurer plusieurs réponse en fréquence pour différentes amplitudes de vibration en faisant varier la fréquence pas à pas, et de trouver la résonance d'amplitude comme le maximum de chaque réponse. Une meilleure estimation peut-être obtenue par la méthode *resonant decay* [6], qui consiste à exciter le système à la résonance de phase d'un de ses modes, puis arrêter l'excitation et mesurer les vibrations libres. L'estimation de la fréquence et de l'amplitude instantanées permet d'obtenir la *backbone curve*. Une autre technique récente est la *control-based continuation* (CBC) [7, 8], qui combine un contrôle stabilisant et un algorithme de suivi, comme dans les méthodes de continuation numérique. La méthode utilisée ici consiste à suivre la courbe maitresse en verrouillant le système à sa résonance en utilisant une boucle à verrouillage de phase (PLL, *phase-locked-loop*) comme cela a été récemment fait dans [9, 10]. L'idée de base de la PLL est de générer un signal harmonique qui s'accorde pour minimiser une différence de phase entre le signal d'excitation et un signal de référence (par exemple le déplacement de la structure). La PLL utilisée ici s'inspire d'une conception proposée par [11] et déjà utilisée dans [10] pour le suivi de courbes maitresses. Elle est constituée d'un détecteur de phase, un contrôleur proportionnel-intégral et un oscillateur contrôlé en tension. Les propriétés de stabilité sont étudiées au préalable et on montre que la stabilité est assurée notamment dans la zone instable de l'oscillateur de Duffing, avec une dépendance aux caractéristiques du détecteur de phase, du contrôleur et de l'amplitude de vibration. La *backbone curve* est mesurée en excitant le système à faible amplitude, en attendant que la PLL s'ajuste à la résonance de phase, puis en augmentant progressivement l'amplitude, tout en enregistrant le déplacement. On récupère finalement l'amplitude de la première harmonique du signal en utilisant une détection synchrone. La mesure de la réponse en fréquence est faite de façon similaire en fixant l'amplitude et faisant progressivement varier la consigne de déphasage.

## 4 Résultats expérimentaux

La méthode d'identification est appliquée pour l'identification du premier mode de flexion d'une poutre munie d'un patch piézoélectrique (PZT PIC 151), utilisée à des fins de récolte d'énergie, et du premier mode axisymétrique d'un gong chinois, pour lequel les nonlinéarités jouent un rôle important dans le son en situation de jeu, provoquant notamment des glissements fréquentiels. La poutre est excitée par un pot vibrant et le gong par un dispositif bobine-aimant, tous deux commandés par un amplificateur BK 2712. Un vibromètre laser Polytec PSV-400 mesure la vitesse vibratoire de la structure. Le schéma de contrôle (boucle à verrouillage de phase) est implémenté via Matlab/Simulink sur une carte dSPACE MicroLabBox.

### 4.1 Poutre piezoélectrique

La figure 2(a) montre les courbes maitresses du premier mode de la poutre piézoélectrique dans les configurations circuit ouvert et court-circuit. Les courbes sont approximativement des droites et sont parallèles. A partir des deux fréquences de résonances on peut déduire un facteur de couplage électromécanique de 21% constant avec l'amplitude de vibration, montrant l'efficacité du couplage entre poutre et patch piézoélectrique pour le premier mode. Ce couplage est influencé par la taille et la position de la céramique ainsi que par la qualité du contact et du collage. Puisque que la courbe est une droite, il n'est pas possible d'identifier un coefficient nonlinéaire pour ce mode en utilisant le modèle présenté en Sec. 2; tout au plus est-il possible de dire que ce mode est assouplissant et des études supplémentaires sont nécessaires sur ce point.

### 4.2 Gong chinois

La figure 2(b) montre la courbe maitresse du premier mode axisymétrique du gong chinois, ainsi que les courbes de réponse forcée aux abords de la résonance pour quatre niveaux d'excitations. On constate que le comportement est nonlinéaire raidissant et que l'on peut identifier un coefficient  $\Gamma_0 = 229.89 \times 10^6 \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  associé à une fréquence propre  $\omega_0 = 1775.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (282.5 Hz). On remarque également que le contrôle par la phase permet de suivre la courbe de réponse, y compris dans la zone instable (le contrôle stabilise le système) et que le phénomène de saut est ainsi évité aux amplitudes d'excitation élevées. On peut finalement insister sur la précision du suivi puisque la variation de la résonance de phase n'est que de 1 Hz à 283 Hz.

## 5 Conclusions

Cet article s'intéresse à une méthode récente de suivi de courbe maitresse et de réponse en fréquence nonlinéaires utilisant un contrôle par la phase, via une boucle à verrouillage de phase. La méthode est appliquée à l'identification de modes nonlinéaires de deux structures : une poutre piézoélectrique et un gong chinois. On a pu voir que cette méthode donne des résultats précis et stables, permettant notamment d'éviter le phénomène de saut. Des études supplémentaires sont nécessaires pour mieux comprendre la dynamique de la poutre piézoélectrique utilisée.

## Références

- [1] Erturk A., Inman, D. J. (2011) *Piezoelectric Energy Harvesting*, J. Wiley & sons

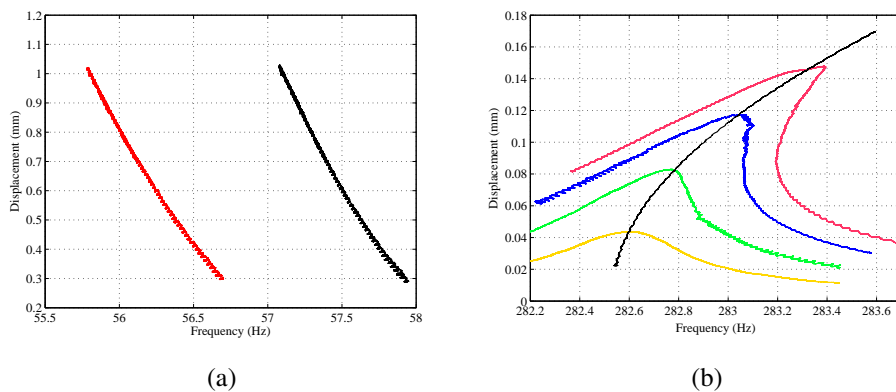


FIGURE 2 – (a) Courbes maitresses du premier mode de flexion de la poutre piézoélectrique en circuit ouvert (noir) et court-circuit (rouge) (b) Réponses en fréquence aux abords de la résonance (jaune, vert, bleu, rouge) et courbe maitresse (noir) du premier mode axisymétrique du gong chinois.

- [2] Ducarne J., Thomas O., Deu J.-F. (2012) Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *J. Sound Vib.* **331**(14) :3286-3303.
- [3] Kerschen G., Peeters M., Golinval J.-C., Vakakis A. F. (2009) Nonlinear normal modes, Part I *Mech. Syst. Sig. Proc.* **23** :170-194
- [4] Touzé C., Thomas O., Chaigne A. (2004) Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *J. Sound Vib.* **273** :77-101.
- [5] Arquier A., Cochelin B., Karkar S., Lazarus A., Thomas O. (2010) MANLAB 2.0, an interactive continuation software, <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>
- [6] Peeters M., Kerschen G., Golinval, J.C. (2011) Dynamic testing on nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes. *J. Sound Vib.* **333**(3) : 486-509.
- [7] Sieber J., Krauskopf B. (2008) Control based bifurcation analysis for experiments. *Nonlinear Dynamics* **51**(3) :365-377.
- [8] Renson L., Gonzalez-Buelga A., Barton D.A.W., Neild S.A. (2016) Robust identification of backbone curves using control-based continuation. *J. Sound Vib.* **367** :145-158.
- [9] Mojrzisch S., Twiefel J. (2015) Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude. *Archive of Applied Mechanics* **86**(10) :1763-1769
- [10] Peter S., Riethmuller R., Leine R. (2016) Tracking of backbone curves of nonlinear systems using phase-locked-loops. In *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, volume 1 :107-120.
- [11] Fan M., Clark M., Feng Z.C. (2007) Implementation and stability study of phase-locked-loop nonlinear dynamic measurement systems. *Communications in Nonlinear Science and Simulation*, **12**(7) :1302-1315.