

Réduction de modèles pour la prédiction de charges critiques de flambement sous variabilité

T.V. DOAN, F. MASSA, T. TISON, H. NACEUR

LAMIH UMR CNRS 8201 - Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Résumé :

Dans cet article, on se focalise sur une analyse multi-paramétriques de structures mécaniques en flambement linéaire, où des paramètres matériau et géométriques topologiques du modèle éléments finis sont sujets à des variabilités. En considérant un cadre numérique commun, on évalue, dans un premier temps, l'efficacité de métamodèles bien établis, tels que le krigeage et la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), ainsi que les méthodes de projection intégrant soit des modes POD, soit des données issues de développements homotopiques, pour approximer la charge critique de flambement. Dans un second temps, un modèle original d'ordre réduit multi-niveaux est proposé pour pallier aux faiblesses des approches classiques.

Mots clefs : Flambement, Variabilités, Métamodèles, Modèles réduits, Développement homotopique

1 Introduction

Les approches non déterministes de nature ensembliste ou probabiliste, les plans d'expériences, les analyses de sensibilité ou encore les optimisations multi objectifs sont de plus en plus présents durant la phase de conception et de dimensionnement des structures mécaniques [1]. L'objectif est de tendre vers une meilleure fiabilité et une robustesse accrue des produits. Un des points communs à ces outils numériques est d'avoir recours à de multiples évaluations du problème étudié pour diverses valeurs de paramètres physiques, tels que la géométrie, le matériau ou les conditions aux limites du modèle numérique utilisé.

Pour faciliter la mise en place d'approches dites multi-paramétriques, il est primordial de développer de nouveaux outils de résolution appropriés, alternatifs aux méthodes de résolution classiques. Ceux-ci doivent permettre d'approximer les champs mécaniques, pour des modèles numériques de plus en plus complexes et de taille matricielle croissante, avec un haut degré de précision tout en conservant des temps de calcul compatibles avec l'exigence des contraintes industrielles.

Dans la littérature, de multiples méthodes regroupées sous diverses terminologies, telles que les techniques d'approximation ou de perturbations, les surfaces de réponses, les métamodèles ou les réanalyses, sont disponibles pour traiter cette problématique avec différents degrés de performance [1]. Les métamodèles les mieux établis sont le krigeage [2] et la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) [3] qui ont été appliquées pour de nombreux problèmes mécaniques de nature plus ou moins linéaire. Cependant, leur efficacité dépend clairement de différents paramètres, tels que le nombre de tirages, la

nature des fonctions de corrélation ou le nombre de modes de référence. D'autre part, de nombreux travaux font référence à des techniques de projection où la solution est recherchée dans un sous-espace judicieusement choisi, de taille nettement réduite vis-à-vis du problème de référence. Dans ce cas, le gain en terme de temps de calculs peut être toutefois limité car chaque nouvelle évaluation nécessite, bien que de taille réduite, un assemblage matriciel.

Dans cet article, on traite le problème de flambement linéaire de structures mécaniques, où des paramètres matériau et géométriques topologiques du modèle éléments finis sont sujets à des variabilités. L'objectif à court terme est d'étudier l'évolution de la charge critique de flambement de différentes conceptions de microstructures absorbantes, définies par fabrication additive, et d'intégrer des incertitudes inhérentes au procédé de fabrication sur des paramètres tels que le module d'Young, les sections et les angles des poutres internes en fonction de la direction de fabrication. L'étude proposée ici a pour but d'évaluer l'efficacité de différentes catégories de métamodèles et techniques de perturbation pour des analyses multiparamétriques nécessaires à la représentation de la variabilité des charges critiques observées.

Tout d'abord, une analyse comparative des techniques classiques est faite, quant à l'efficacité du krigage, de la POD ainsi que des techniques de projection pour laquelle la base de projection est construite soit à partir des modes de la POD, soit à partir d'un développement homotopique. Ensuite, on s'intéresse à un couplage entre ces méthodes afin de proposer un nouveau méta-modèle multi-niveaux optimal et modulaire garantissant le meilleur compromis recherché entre la précision et le temps de calcul. La méthodologie proposée est validée sur une application académique de flambement de treillis ayant une solution analytique, mais elle demeure généralisable à tout type de structure mécanique soumise au flambement.

2 Analyses multi-paramétriques

2.1 Flambement linéaire en contexte éléments finis

Les procédés de fabrication de structures mécaniques génèrent des imperfections inévitables de type géométrique (non-planéité, non-coaxialité, etc.) ou de matériau (non-homogénéité, contraintes résiduelles, etc.), qui peuvent affecter de manière significative la charge ultime de flambement et/ou de voilement de ces structures. Le problème de flambement linéaire dans un contexte éléments finis peut être résolu numériquement en considérant trois étapes [4]. La première concerne la recherche de la solution fondamentale U obtenue par une analyse statique linéaire, calculée à partir d'un système d'équations linéaires intégrant la matrice de rigidité linéaire K_l et le vecteur chargement extérieur en compression F_{ext} :

$$K_l U = F_{ext} \quad (1)$$

La seconde étape consiste à assembler la matrice de rigidité géométrique K_σ à partir des contraintes initiales relatives au cas de la solution fondamentale U calculée précédemment. La dernière étape, quant à elle, est associée au calcul du facteur critique de flambement λ_{cr} grâce à la résolution d'un problème aux valeurs propres linéaire intégrant les matrices K_l et K_σ .

$$(K_l + \lambda_{cr} K_\sigma) z = 0 \quad (2)$$

où z représente le mode de flambement.

Finalement, la première charge critique de flambement F_{cr} est obtenue en multipliant la charge extérieure F_{ext} par le plus petit facteur critique de flambement λ_{cr} .

$$F_{cr} = \lambda_{cr} F_{ext} \quad (3)$$

2.2 Description du modèle numérique

Afin d'analyser l'efficacité des différentes approches numériques, l'application académique de flambement de treillis formé de deux poutres présentée sur la Figure 1 est traitée. Les deux poutres formant un angle $\alpha = 15^\circ$ sont de section rectangulaire pleine $b \times h$. La structure est en acier de module d'Young $E = 210GPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Elle repose sur des appuis fixes à ces deux extrémités et soumise à une charge verticale de compression $F = 1000kN$ sur sa partie supérieure centrale. Les dimensions utilisées sont les suivantes : longueur $L = 1m$, largeur de section $b = 0.1m$, épaisseur de section $h = 0.1m$.

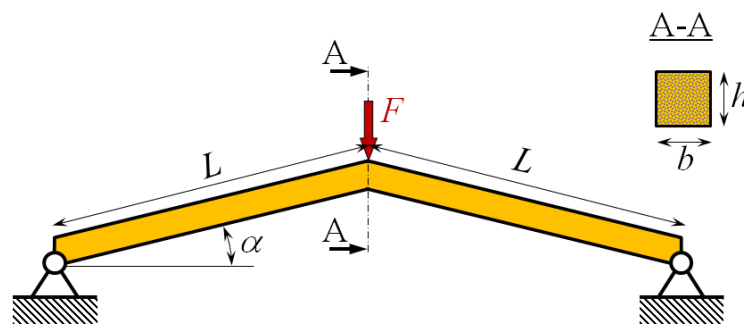


FIGURE 1 – Description du cas test

Naturellement, une modélisation optimale par éléments finis de cette application, suppose l'utilisation d'éléments finis de type poutre. Cependant, pour des raisons de comparaison des temps de calcul des différentes méthodes, il est nécessaire que le modèle éléments finis soit de taille relativement importante. Ainsi, nous avons choisi de modéliser le treillis par des éléments hexaédriques linéaires H8, $4 \times 4 \times 40$ soit 1280 éléments H8, ce qui correspond à 4030 degrés de liberté actifs. Considérant les propriétés déterministes décrites précédemment, la simulation numérique du problème de flambement engendre un facteur critique de flambement λ_{cr} de 11.09 et donc une charge critique $F_{cr} = 11090kN$.

2.3 Effet des variabilités sur la charge critique de flambement

On considère maintenant une variabilité de $\pm 10\%$ de la valeur nominale sur le module d'Young ainsi que sur la largeur et l'épaisseur de section alors qu'une variabilité de 30% est affectée à l'angle d'inclinaison des poutres (Figure 1). Pour étudier les effets de ces 4 variables sur le facteur critique de flambement, un plan d'expériences complet avec 7 niveaux par facteur est utilisé, soit 2401 échantillons. L'objectif est de manipuler un ensemble d'échantillons important de données à approximer afin de tester les méthodes alternatives sur des critères de précision et de temps de calcul. Bien évidemment, des techniques plus efficaces de propagation des incertitudes sont disponibles dans la littérature à la fois pour des modélisations de nature probabiliste ou ensembliste mais ne feront pas l'objet d'étude dans ce document.

La Figure 2 présente deux surfaces de réponse relatives à l'évolution du facteur critique de flambement en fonction du module d'Young et de l'angle d'inclinaison, puis en fonction de la largeur et de l'épaisseur de section.

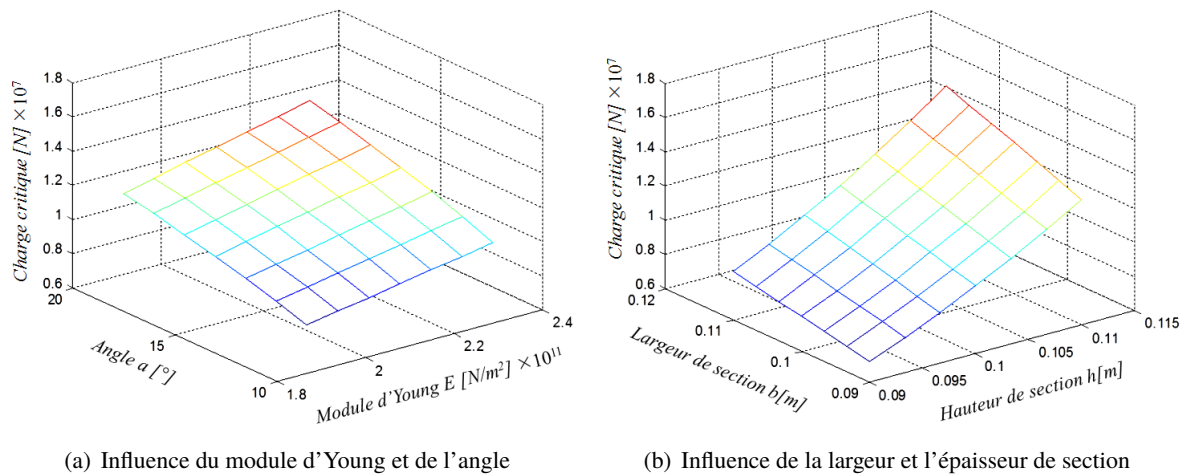


FIGURE 2 – Surface de réponse de la charge critique

Les évolutions, présentées Figure 2, semblent être quasi-linéaires pour tous les paramètres. Cependant, comme l'angle d'inclinaison, la largeur et l'épaisseur de la section de poutre agissent directement sur les coordonnées des noeuds des éléments finis volumiques, ces évolutions ne le sont pas. La modélisation de ces perturbations, de nature topologique, nécessite un polynôme d'ordre 4 afin de réduire l'écart vis-à-vis de la référence. D'autre part, ces paramètres topologiques n'interviennent pas de manière linéaire dans l'expression des matrices éléments finis, contrairement au module de Young. Finalement, on observe que la largeur et la hauteur de section ont des effets plus significatifs sur la charge critique de flambement que le module d'Young et l'angle.

Les temps de calcul pour ce plan d'expériences, considérant 2401 échantillons à évaluer, s'élèvent à 3 heures, ce qui renforce le besoin de développer des modèles mathématiques alternatifs si l'on vise des simulations reposant sur des modèles éléments finis de grande taille en contexte multi-paramétrique.

3 Métamodèles basés sur un échantillonnage de l'espace d'étude

Ce paragraphe résume brièvement les principaux concepts liés à l'exploitation du krigeage et de la POD pour approximer des données mécaniques. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à l'article [5].

3.1 Krigeage

Le krigeage est une méthode d'estimation spatiale, où la solution scalaire recherchée $\hat{y}(x)$ est calculée comme la somme d'une fonction polynomiale et d'un processus gaussien stationnaire $Z(x)$ de moyenne nulle et de variance σ_Y^2 , comme suit :

$$\hat{y}(x) = \mathbf{f}(x)^T \cdot \boldsymbol{\beta} + Z(x) \quad (4)$$

La quantité $\mathbf{f}(x)^T \cdot \boldsymbol{\beta}$ représente la moyenne du processus. Elle est de nature quadratique dans cet article. La fonction d'auto-corrélation du processus $Z(x)$, quant à elle, est définie à partir d'un modèle d'auto-

corrélation gaussien. Ainsi, l'estimation par krigeage pour un nouvel échantillon x est vue comme une réalisation d'une variable aléatoire gaussienne.

Pour définir ce modèle mathématique, on considère comme données d'entrée un ensemble d'échantillons générés aléatoirement à partir d'un plan d'expériences de type Latin Hypercube Sampling (LHS), dont les solutions étudiées sont calculées avec la méthode de référence. Dans le cas présent, un noyau gaussien anisotrope permet de représenter au mieux les évolutions des échantillons après analyse des variogrammes et aucun effet pépité n'a été observé. Leur nombre sera discuté dans le paragraphe dédié à l'application numérique.

3.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres

Comme pour le krigeage, le point de départ à la définition d'un modèle POD est la génération d'un ensemble d'échantillons/solutions. Ensuite, la POD consiste à déterminer un ensemble de vecteurs ϕ_i avec $i = 1 \dots n_{vec}$ qui maximise la somme des produits scalaires entre les vecteurs recherchés et les solutions des échantillons au carré.

Ce problème se présente sous la forme d'un problème linéaire aux valeurs propres :

$$C\phi_i = \phi_i\lambda_i \quad (5)$$

où C est la matrice de corrélation générée à partir des échantillons. Les vecteurs ϕ_i définissent une base orthonormale. La contribution d'un mode ϕ_i est proportionnelle à la valeur propre associée λ_i .

La solution scalaire recherchée $\hat{y}(x)$ peut être alors approximée sous la forme :

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^{n_{vec}} \alpha_i \phi_{ji} \quad (6)$$

où α_i sont les coefficients scalaires définissant les solutions des échantillons d'entrée dans la base des vecteurs ϕ_i avec $i = 1 \dots n_{vec}$. Le nombre de vecteur n_{vec} ne doit pas être trop grand afin de réduire la taille du problème initial. De plus, ϕ_{ji} représente la $j^{ème}$ composante du vecteur ϕ_i .

Pour faire le lien entre l'espace de variation des paramètres du modèle numérique et l'espace de variation des coefficients α_i , on utilise un krigeage, comme défini dans la référence [5].

4 Utilisation de techniques de projection

4.1 Définition du problème réduit avec les modes POD

On propose d'avoir recours à une projection des équations régissant le problème de flambement sur une famille de vecteurs judicieusement choisis, permettant ainsi de réduire la taille du problème à résoudre. Dans le cas présent, cette technique peut être appliquée à la fois au niveau du problème fondamental et du problème linéaire aux valeurs propres.

Dans le cas du problème linéaire aux valeurs propres, nous obtenons en considérant la matrice de projection T_z les équations suivantes :

$$([T_z^T K_l T_z] + \lambda_{cr} [T_z^T K_\sigma T_z]) q_z = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}_z \mathbf{q}_z \quad (8)$$

où \mathbf{q}_z est le vecteur réduit relatif au mode de flambement.

Une solution intéressante pour construire la matrice de projection \mathbf{T}_z est d'intégrer les modes issus du calcul POD, comme suit :

$$\mathbf{T}_z = [\phi_1 \dots \phi_{n_{vec}}] \quad (9)$$

Ainsi, la taille du problème réduit à résoudre est directement liée au nombre de modes retenus dans la décomposition POD. Cette matrice de projection est fixe quelque soit la combinaison de paramètres à simuler, seules les matrices \mathbf{K}_l et \mathbf{K}_σ doivent être mises à jour pour chaque nouvel échantillon.

4.2 Développement homotopique et vecteurs perturbés d'ordre élevé

Une alternative pour la définition de la matrice de projection \mathbf{T}_z est d'exploiter des vecteurs perturbés d'ordre élevé, que l'on peut identifier à partir de développements homotopiques du problème étudié.

Ainsi, la base de projection est composée de données nominales $\mathbf{z}^{(0)}$, calculées à partir des propriétés nominales des paramètres, ainsi que de données perturbées $\mathbf{z}_{p_i}^{(j)}$ d'ordre (j) , $j = 1 \dots n$, pour chaque paramètre p_i , $i = 1 \dots n_p$.

$$\mathbf{T}_z(p_1, \dots, p_{n_p}) = [\mathbf{z}^{(0)} \quad \mathbf{z}_{p_1}^{(1)} \dots \mathbf{z}_{p_1}^{(n)} \dots \mathbf{z}_{p_{n_p}}^{(1)} \dots \mathbf{z}_{p_{n_p}}^{(n)}] \quad (10)$$

L'indice (0) représente les données nominales alors que les perturbations, référencées par le symbole Δ , sont calculées comme la différence entre la solution perturbée, définie par l'indice (m) , et la solution nominale. Par exemple, on obtient pour la matrice de rigidité :

$$\Delta \mathbf{K}_l = \mathbf{K}_l^{(m)} - \mathbf{K}_l^{(0)} \quad (11)$$

Considérant une perturbation relative au paramètre p_i , le calcul du vecteur perturbé d'ordre 1 se calcule en résolvant le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_l^{(0)} + \lambda_{cr}^{(0)} \mathbf{K}_\sigma^{(0)} & \mathbf{K}_\sigma^{(0)} \mathbf{z}^{(0)} \\ \mathbf{z}^{(0)T} \mathbf{K}_\sigma^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{p_i}^{(1)} \\ \lambda_{cr}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{K}_l(p_i) \phi^{(0)} - \Delta \mathbf{K}_\sigma(p_i) \phi^{(0)} \lambda^{(0)} \\ -0.5 \phi^{(0)T} \Delta \mathbf{K}_\sigma(p_i) \phi^{(0)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ce calcul peut être facilement généralisé aux ordres supérieurs. Pour plus de détails concernant le calcul de solutions perturbées par développement homotopique, le lecteur pourra se référer aux articles [6] and [7].

5 Définition d'un métamodèle multi-niveaux

5.1 Approximation des matrices éléments finis

Etant donné que le point faible des techniques de projection est relatif à la mise à jour des matrices éléments finis pour chaque nouvelle évaluation, on propose de décomposer les matrices \mathbf{K}_l et \mathbf{K}_σ en considérant une approximation polynomiale dépendante des paramètres variables du problème. Dans le cas de \mathbf{K}_l , on a :

$$\mathbf{K}_l(p_1, \dots, p_{n_p}) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(p_1, \dots, p_{n_p}) \mathbf{K}_l^{(i)} \quad (13)$$

Les n_f fonctions $f(p_1, \dots, p_{n_p})$ contiennent les variations de paramètres p_1, \dots, p_{n_p} alors que les contributions $\mathbf{K}_l^{(i)}$ sont des matrices constantes quel que soit l'échantillon investigué.

En considérant cette décomposition, il est alors possible de calculer, durant la phase offline, l'ensemble des matrices de taille réduite utile à la définition du problème linéaire aux valeurs propres.

$$\mathbf{T}_z^T \mathbf{K}_l(p_1, \dots, p_{n_p}) \mathbf{T}_z = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(p_1, \dots, p_{n_p}) (\mathbf{T}_z^T \mathbf{K}_l^{(i)} \mathbf{T}_z) \quad (14)$$

Bien évidemment, cette étape nécessite l'évaluation des coefficients de la régression à partir d'échantillons, tout comme précédemment dans le cas du krigeage ou la POD. L'objectif est de choisir l'ordre optimal du polynôme en fonction de la nature des paramètres variables en lien avec le problème physique. Dans le cas présent, un approximation d'ordre 1 est suffisante pour le module d'Young alors qu'un ordre 4 est primordial pour les autres paramètres.

5.2 Calculs offline/online

La stratégie proposée repose sur deux phases de calculs offline et online. La phase offline a pour but de simuler un ensemble d'échantillons dans l'espace de variation des paramètres en privilégiant la donnée nominale, les bornes supérieures de chaque paramètre et des tirages aléatoires. Ceux-ci seront utilisés, d'une part, pour approximer les matrices éléments finis du problème, et, d'autre part, pour générer la matrice de projection (composée de modes POD ou de vecteurs perturbés), pour réduire la taille du problème linéaire aux valeurs propres.

Etant donné que l'évaluation d'un problème réduit aux valeurs propres sera toujours plus coûteuse en temps que l'évaluation par un krigeage, on génère, dans un second temps, les échantillons nécessaires au krigeage grâce à la projection, précédemment définie.

La phase online est donc relative à l'évaluation des charges critiques à partir du krigeage.

Cette stratégie est non intrusive, en se basant sur un ensemble d'échantillons, et modulaire, en faisant appel à différents métamodèles et projections en fonction du problème et des paramètres étudiés.

6 Analyse comparative

6.1 Evaluation des métamodèles et techniques de projection

Tout d'abord, on s'intéresse à l'erreur commise lors de l'approximation des charges critiques de flambement en utilisant le krigeage, la POD ainsi qu'une projection basée sur les modes POD. Ces 3 méthodes sont respectivement référencées Krigeage, POD-krigeage et ROM-POD.

Les résultats sont présentés sur la Figure 3 en fonction du nombre d'échantillons utilisés pour appliquer les méthodes alternatives. Concernant le krigeage, on utilise un modèle de regression d'ordre 2 et une corrélation gaussienne tandis qu'un minimum de 10 modes sont retenus pour la POD-krigeage. Tout autre paramétrage engendre des erreurs de niveau supérieur.

Comme le paramétrage optimal pour obtenir les échantillons du modèle de Krigeage n'est pas connu a priori, ces échantillons sont générés aléatoirement avec un plan d'expérience de type LHS. La précision des estimations des charges critiques est donc dépendante de ce tirage. Le métamodèle est alors créé plusieurs fois pour estimer les possibles variations de l'erreur vis-à-vis de la référence. Cette variation est représentée sur la Figure 3 par des marqueurs autour de la position moyenne.

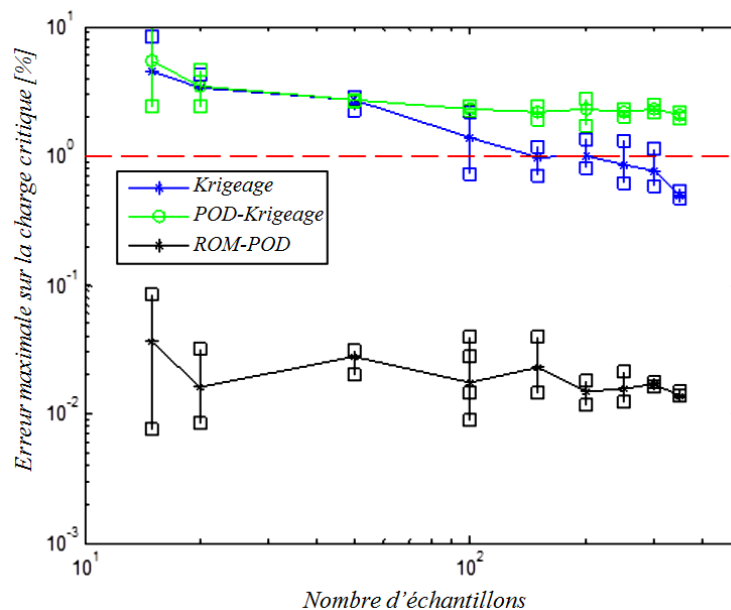


FIGURE 3 – Evolution de l'erreur maximale en fonction du nombre d'échantillons utilisés

En considérant un seuil cible à 1% d'erreur, on observe que la POD-krigeage ne permet pas d'atteindre l'objectif fixé avec une erreur à 3% pour 350 échantillons. La convergence est très lente même si un nombre conséquent d'échantillons est utilisé. Le krigeage, quant à lui, requiert au minimum 350 échantillons pour garantir le seuil cible. On remarque, là encore, que la convergence est assez lente pour un ensemble d'échantillons de faible taille. Dans le cas présent, il est difficile d'atteindre au bon niveau de précision étant donné que 3 des paramètres variables sont de nature topologique et que la charge critique de flambement évolue suivant un modèle polynomial d'ordre 4 pour ces paramètres. Enfin, la projection basée sur les modes ROM-POD s'avère être très efficace même si un faible nombre d'échantillons est retenu. Avec 15 échantillons, on atteint une erreur de l'ordre 0.1%. Finalement, on observe que la variation de l'erreur décroît avec le nombre d'échantillons pour toutes les méthodes.

Concernant les temps de calcul, le coût pour le krigeage et la POD-krigeage est directement lié à la phase dite offline correspondant à la génération des échantillons par la méthode de référence. La phase online, associée à l'approximation des quantités recherchées, n'est pas très consommatrice en temps, même si l'on étudie la charge critique et le mode de flambement associé. A contrario, le temps associé à la génération des approximations par la méthode de projection reste globalement élevé compte tenu de l'assemblage matriciel nécessaire pour chaque nouvelle solution étudiée. Le gain en temps n'est que de 30% par rapport au calcul de référence.

On se focalise maintenant sur la définition des matrices de projection composées des vecteurs perturbés d'ordre élevé. Cette méthode est nommée ROM-HPP. Le choix des ordres d'approximation est un critère essentiel pour obtenir une bonne précision et les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4 en considérant alternativement une réanalyse statique ou une réanalyse modale.

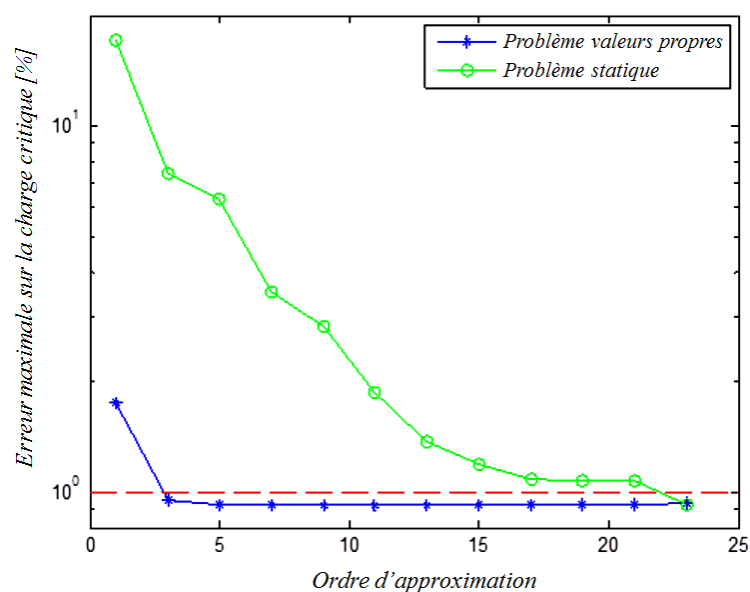


FIGURE 4 – Evolution de l'erreur maximale en fonction de l'ordre d'approximation des vecteurs perturbés

Dans le cas présent, on observe qu'il est nécessaire de considérer un ordre 23 pour le calcul statique et un ordre 5 pour le calcul modal pour obtenir une précision inférieure à 1%. La convergence pour le problème statique est nettement plus lente que pour le problème aux valeurs propres. Finalement, une attention particulière doit être portée sur la précision des solutions issues du problème statique, lequel combiné au problème aux valeurs propres, peut générer au final des erreurs conséquentes sur l'évaluation de la charge critique. La taille de la matrice de projection est plus grande que celle construite sur la base des modes POD. Cependant, la projection ne requiert que 5 calculs de référence contre 15 pour le calcul ROM-POD. Le temps de calcul lié à l'approximation est globalement du même ordre de grandeur que pour la projection ROM-POD.

En conclusion, l'utilisation du krigeage permet de garantir une précision intéressante avec des coûts de simulation acceptables. Le principal inconvénient est lié au nombre d'échantillons à générer en phase offline. L'utilisation directe de la POD-krigeage ne fournit pas les résultats escomptés. Toutefois, l'intégration des modes extraits dans une matrice de projection permet de garantir une très bonne précision pour un faible nombre d'échantillons. Cependant, cette voie conduit à une faible réduction du temps de calcul durant la phase online, étant donné l'assemblage des matrices éléments finis.

6.2 Exploitation du métamodèle multi-niveaux

Forts des constats précédents, on propose d'investiguer l'efficacité de deux méthodes, basées sur une approximation des matrices, une projection des équations et enfin un métamodèle de type krigeage. La projection est constituée soit des vecteurs issus de développement homotopique, soit de modes POD. Ces 2 méthodes sont nommées ROM-HPP-krigeage et ROM-POD-krigeage.

Tout d'abord, on définit une approximation des matrices éléments finis en utilisant une régression polynomiale d'ordre 4 pour les paramètres géométriques topologiques et d'ordre 1 pour le paramètre matériau. Cette étape requiert l'utilisation de 48 échantillons, lesquels sont utilisés en parallèle pour la génération des vecteurs POD ou perturbés d'ordre élevés, intégrés dans les matrices de projection. Ensuite, 350 échantillons sont simulés à partir des modèles d'ordre réduits pour définir les données d'entrée du modèle de krigeage. Enfin, le modèle de krigeage est exploité classiquement pour approximer les 2401 solutions étudiées. La Figure 5 présente l'évolution de l'erreur obtenue pour les deux méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis, afin de tester la robustesse des deux méthodes pour des problèmes matriciels de plus grande taille.

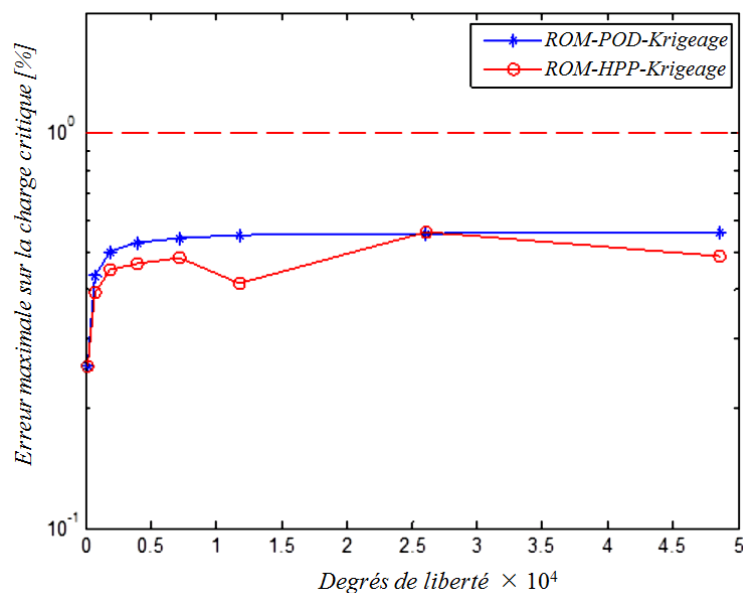


FIGURE 5 – Evolution de l'erreur maximale en fonction du nombre de degré de liberté du modèle éléments finis

Les deux méthodes ROM-HPP-krigeage et ROM-POD-krigeage fournissent globalement le même niveau de précision avec une erreur de l'ordre 0.5% quelle que soit la taille du modèle éléments finis testé entre 4000 et 50000 degrés de liberté. Les temps de calcul sont, là encore, assez comparables entre les deux projections. Pour un modèle éléments finis comptant 50000 degrés de liberté, on observe un gain en temps d'un coefficient 20 par rapport au plan d'expériences utilisant la méthode de référence et un coefficient 4 vis-à-vis du krigeage.

7 Conclusion

Cet article a permis de synthétiser les premières pistes pour identifier un couplage optimal et modulaire de méthodes numériques pour obtenir le compromis recherché précision/temps de calculs compatible

avec des modèles numériques de grande taille en flambement linéaire. La stratégie proposée repose sur une approximation des matrices éléments finis grâce à un ensemble d'échantillons, lesquels sont utilisés en parallèle pour générer une matrice de projection. Le modèle réduit, ainsi construit à partir des vecteurs POD ou perturbés d'ordre élevé, est utilisé pour générer les échantillons nécessaires au calcul par krigeage. Les travaux actuels s'orientent nécessairement sur l'étape la plus coûteuse en temps à savoir la génération des approximations pour les matrices éléments finis.

Références

- [1] Proceedings of the 6th International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics (USD 2016). Editors : P. Sas, D. Moens, A. van de Walle, ISBN : 978-9073802940, 19-21 September 2016, Leuven, Belgium.
- [2] J. Sacks, W. J. Welch, T. J. Mitchell, H. P. Wynn, Design and analysis of computer experiments, *Statistical Science*, 4(4) (1989) 409–435.
- [3] L. Sirovich, Turbulence and the dynamics of coherent structures. I - Coherent structures. II - Symmetries and transformations. III - Dynamics and scaling., *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 (1987) 561–571.
- [4] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*. ISBN-13 : 978-0979004957, Edition Prentice Hall, 2nd edition, New Jersey (2014), 1043 Pages.
- [5] M. Hamdaoui, G. Le Quilliec, P. Breilkopf, P. Villon, POD surrogates for real-time multi-parametric sheet metal forming problems, *International Journal of Material Forming*, 7(3) (2014) 337–358.
- [6] F. Massa, T. Tison, B. Lallemand, O. Cazier, Structural modal reanalysis methods using homotopy perturbation and projection techniques, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45–46 (2011) 2971–2982.
- [7] F. Massa, B. Lallemand, T. Tison, Multi-level homotopy perturbation and projection techniques for the reanalysis of quadratic eigenvalue problems : The application of stability analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52–53 (2015) 88–104.