

# Flambement d'une sphère sous cisaillement circonférentiel

M. TALL<sup>a,b</sup>, S. HARIRI<sup>b</sup>, P. LE GROGNEC<sup>c</sup>, Y. SIMONET<sup>a</sup>

a. CETIM - Centre Technique des Industries Mécaniques  
5, avenue Félix Louat - BP 80067, 60304 Senlis, France  
mamadou.tall@cetim.fr  
yves.simonet@cetim.fr

b. École des Mines Douai  
Département Technologie des Polymères et Composites & Ingénierie Mécanique  
941, rue Charles Bourseul - CS 10838  
59508 Douai Cedex, France  
said.hariri@imt-lille-douai.fr

c. ENSTA Bretagne  
FRE CNRS 3744, IRDL  
2, rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9, France  
philippe.le\_grognecc@ensta-bretagne.fr

## Résumé :

*Les structures de type coque sont très utilisées dans l'industrie, notamment pour les appareils à pression, les transports et le bâtiment. Le choix de telles structures minces représente assurément un avantage économique mais pose naturellement des problèmes de tenue mécanique, vis-à-vis de structures plus massives. Dans les appareils à pression en particulier, les sollicitations sont telles que la tenue au flambement doit être considérée avec soin, compte tenu des risques matériels et humains associés. Depuis plus d'un siècle, le flambement des coques fait l'objet de nombreuses études, aussi bien fondamentales qu'appliquées, d'autant plus qu'il est fréquemment caractérisé par de grandes disparités entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques (comme le montrent déjà les résultats précurseurs de Lorenz, Timoshenko et Southwell dans le cas d'un cylindre sous compression axiale). Il faut attendre les travaux de von Kármán et Tsien, puis ceux de Koiter [1], pour disposer d'un début d'explication à ce phénomène. Ce dernier montre, en établissant les bases de l'analyse du post-flambement, que contrairement aux poutres et plaques, les coques (cylindriques, sphériques, ...) sont très sensibles aux imperfections initiales. Ne connaissant pas, le plus souvent, la nature et l'amplitude précises de ces imperfections, et à des fins d'efficacité, le dimensionnement au flambement est en pratique réalisé en combinant des résultats théoriques sur la structure parfaite et des facteurs d'abattement permettant la prise en compte de défauts géométriques et matériels éventuels, ou d'effets induits par le chargement et les conditions aux limites. Dans ce travail, on se propose d'explicitier le comportement au flambement et en post-flambement de structures sphériques sous cisaillement circonférentiel en utilisant le formalisme des Recommandations Européennes (Texte ECCS) [2]. Les différentes analyses préconisées par le texte ECCS permettront, d'une part, de discuter le degré de sensibilité aux imperfections géométriques et d'autre part, d'extraire les différents paramètres clefs associés à la courbe de voilement d'une sphère sous cisaillement circonférentiel qui sont, à la connaissance des auteurs, tout à fait nouvelles.*

## Abstract :

*Shell structures are widely used in industrial applications, such as pressure vessels, transportation facilities and buildings. However, the economic interest of such thin structures is counteracted by their weaknesses in terms of mechanical strength, when compared to solid structures. In the particular case of pressure vessels submitted to compressive/shear loadings, buckling is one of the main failure mode and leads to significant material and human risks. It has been therefore the subject of many studies for more than a century, all the more so as large discrepancies between theoretical predictions and experiments are commonly observed (since the pioneering works of Lorenz, Timoshenko and Southwell in the case of a cylindrical shell under axial compression). Much later, this phenomenon has been explained, thanks to the contributions of von Kàrman and Tsien, and then to the decisive one of Koiter [1]. The latter built the foundations of the post-buckling analysis and proved that, contrary to beams and plates, shells are generally shown to be very imperfection-sensitive. Unsure of the precise nature and amplitude of the initial defects, and for efficiency purposes, the most current design method used in shell buckling relies then on a combination of theoretical results on perfect structures and the use of knock-down factors, which are supposed to account for possible geometric and material imperfections, or loading and boundary condition effects. In this work, the buckling behavior of spherical shells subjected to circumferential shear loads is investigated through the use of the European Recommendations framework (ECCS) [2]. Thus, parametric studies using the different analyses which are currently implemented in the ECCS text make it possible to retrieve the key parameters of the capacity curves for spherical shells under circumferential shear.*

**Mots clefs : Flambement, Post-flambement, Sphères sous cisaillement circonférentiel, Analyse GMNIA, Recommandations Européennes, Sensibilité aux imperfections.**

## 1 Introduction

Dans cette étude, le flambement de la sphère sous cisaillement circonférentiel est présenté. La motivation primaire de cette étude est que dans les Équipements Sous Pression (ESP), on note souvent la présence de jonctions ou de zones de transition pouvant induire un cisaillement local. Or, les ingénieurs ne disposent pas actuellement de règles de dimensionnement suffisamment claires et précises quant à l'influence éventuelle de ce cisaillement sur la tenue au flambement d'une sphère sous pression externe, par exemple. Aussi dans cette étude, les résultats issus de calculs numériques paramétriques aussi bien sur la structure parfaite qu'imparfaite d'une demi-sphère sous cisaillement circonférentiel sont présentés. Ces calculs numériques préalables permettent de mettre en exergue certains aspects importants durant le processus de flambement des structures minces : sensibilité aux imperfections géométriques, influence des non-linéarités géométriques et matérielles ... Ils permettent finalement d'extraire les différents paramètres clefs (Équation 1, Tableau 1) des courbes de voilement d'une sphère sous cisaillement circonférentiel qui sont, à la connaissance des auteurs, tout à fait nouvelles.

## 2 Formalisme du texte ECCS

Nous adoptons le formalisme de courbes de voilement du texte ECCS. Ces courbes permettent de mettre en exergue la relation entre la résistance relative de flambement  $\chi$  (Équation 1) et l'élancement réduit  $\lambda$  (Équation 3). L'avantage de l'utilisation de ces courbes est qu'elles sont parfaitement déterminées par la connaissance de quatre grands paramètres clefs (Tableau 1) qui permettent de mettre en exergue, individuellement, une caractéristique essentielle durant le flambement.

$$\chi = \begin{cases} \chi = 1 & \text{quand } \lambda \leq \lambda_0 \\ \chi = 1 - \beta \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^\eta & \text{quand } \lambda_0 < \lambda < \lambda_p \\ \chi = \frac{\alpha}{\lambda^2} & \text{quand } \lambda_p < \lambda \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}} \quad (2)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{R_{MNA}}{R_{LBA}}} \quad (3)$$

$\alpha$	Non-linéarités géométriques et imperfections géométriques
$\beta$	Définition du domaine plastique
$\eta$	Interaction élastique-plastique
$\lambda_0$	Délimitation plateau plastique

TABLE 1 – Paramètres clefs des courbes de voilement [2, 3]

Les courbes de voilement font intervenir un ensemble de facteurs de résistance qui sont parfaitement déterminés via les différentes analyses préconisées par le texte ECCS et l'EN 1993-1-6 (Tableau 2). Ces analyses vont de la plus simple (LBA) à la plus sophistiquée (GMNIA) permettant de prendre en compte aussi bien les défauts que les effets inélastiques du matériau.

Analyse	Résistance	Description
LBA	$R_{LBA}$	Analyse Linéaire de Bifurcation (Calcul linéaire élastique de valeurs propres, Structure parfaite)
GNA	$R_{GNA}$	Analyse Géométriquement Non-linéaire (Grandes transformations, matériau élastique, Structure parfaite, Recherche de points de bifurcation ou de points limites ("snap-through"))
MNA	$R_{MNA}$	Analyse Matériellement Non-linéaire (Estimation de la résistance plastique, loi matériau parfaitement plastique, hypothèse des petites transformations)
GMNA	$R_{GMNA}$	Analyse Géométriquement et Matériellement Non-linéaire (Grandes transformations, Structure parfaite, loi matériau parfaitement plastique, Recherche de points de bifurcation ou de points limites ("snap-through"))
GNIA	$R_{GNIA}$	Analyse Géométriquement Non-linéaire de la structure imparfaite (matériau élastique, Introduction d'une imperfection de "substitution")
GMNIA	$R_{GMNIA}$	Analyse Géométriquement et Matériellement Non-linéaire de la structure imparfaite (matériau parfaitement plastique, Introduction d'une imperfection de "substitution")

TABLE 2 – Analyses préconisées par le texte ECCS et l'EN 1993-1-6 [2, 3]

## 3 Modélisation numérique

Pour les différents résultats numériques présentés dans ce papier, sauf indication contraire, les caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées sont données en Tableau 3. Cette géométrie est désignée par

la suite par l'appellation géométrie de référence. Pour optimiser les temps de calculs, une demi-sphère pour laquelle les conditions de symétrie adéquates sont retenues est modélisée. Toutes les analyses numériques sont effectuées à l'aide du logiciel commercial ABAQUS [4]. Un maillage quadrangle structuré avec des éléments quadratiques *S8R5* à 8 nœuds, intégration réduite et 5 degrés de liberté par nœud est utilisé. Le cisaillement est modélisé à l'aide d'une distribution circonférentielle de pression (Équation 4) qui s'inspire des travaux de Yinyi [5]. La modélisation de cette pression circonférentielle est possible grâce aux routines utilisateurs présentes dans ABAQUS. Les analyses géométriquement non-linéaires sont effectuées en utilisant la méthode de longueur d'arc de Riks [6]. Enfin, le premier mode de l'analyse LBA est pris, dans toutes les analyses numériques sur la structure imparfaite, comme étant l'imperfection initiale avec une amplitude  $\delta_0$ .

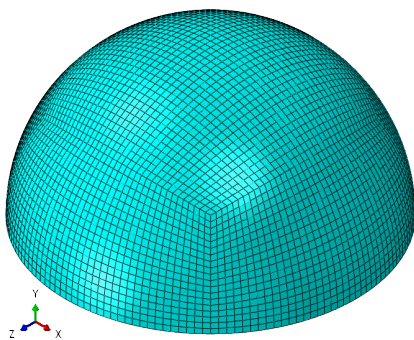
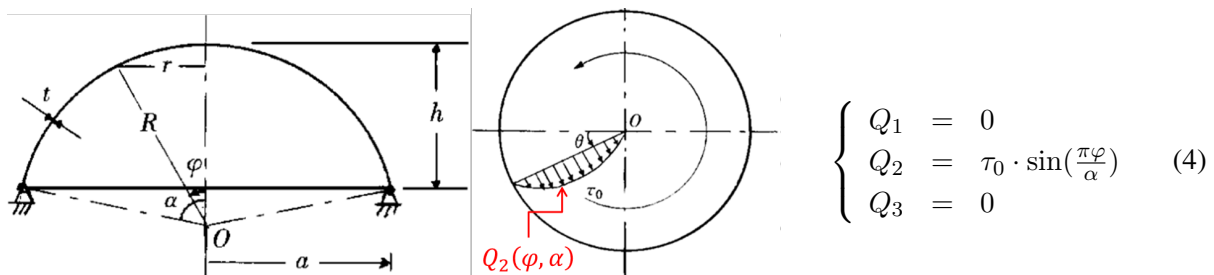


FIGURE 1 – Maillage quadrangle structuré de la demi-sphère

Matériau	P235	-
Module d'Young	$E$	210 GPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3
Rayon	$R$	500 mm
Épaisseur	$t$	4 mm
Limite élastique	$\sigma_y$	235 MPa

TABLE 3 – Caractéristiques mécaniques et géométriques du modèle de référence

## 4 Résultats et Discussions

### 4.1 Analyse LBA, GNA

L'analyse LBA permet de constater l'existence de modes de flambement de forme ellipsoïdale (Figure 2) comme l'ont d'ailleurs déjà montré Mow et Sadowski [7] dans leurs travaux précurseurs sur une sphère soumise à un moment de torsion au niveau des pôles. Par ailleurs, les valeurs critiques obtenues s'avèrent alternées en termes de signe. Cela implique ici au vu de la symétrie de la structure et de la nature du chargement, que le flambement a lieu même si le chargement est appliqué en sens inverse. De plus, l'analyse de bifurcation en grandes transformations (GNA) montre que la charge critique  $Q_{GNA}$  est égale à 98.7% de  $Q_{LBA} = Q_{cr}$ . Par ailleurs, les déplacements des nœuds le long d'un arc de la demi-sphère obtenus avec une analyse linéaire classique (LA) et au point de bifurcation lors de l'analyse GNA sont donnés à la Figure 2c. On peut constater qu'il n'existe quasiment aucune différence (moins de 1%) entre les deux courbes. Cette tendance est observée aussi, en changeant les paramètres géométriques et mécaniques, ce qui permet de postuler que les non-linéarités géométriques n'ont pas d'influence notable ici comme nous le constaterons avec l'extraction des différents paramètres des courbes de voilement.

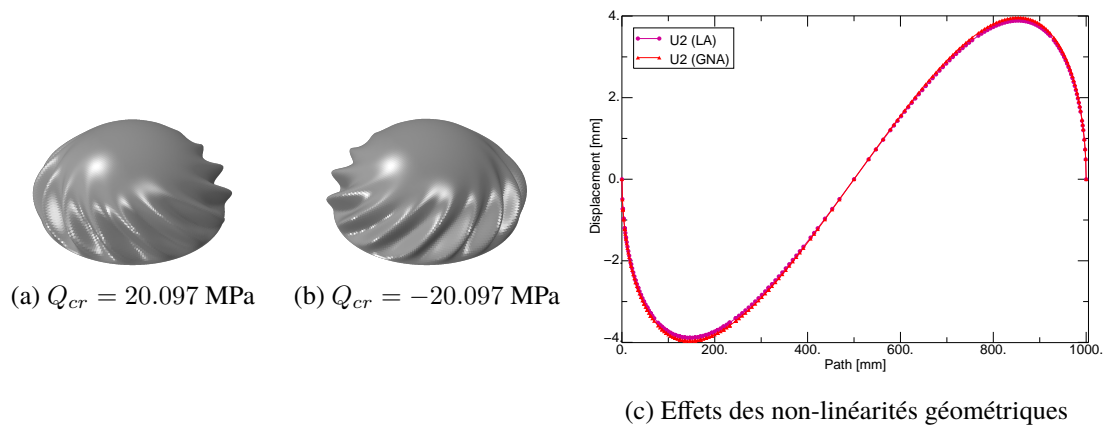


FIGURE 2 – Les deux premiers modes linéaires de l’analyse LBA ((a) et (b)) et l’influence des non-linéarités géométriques.

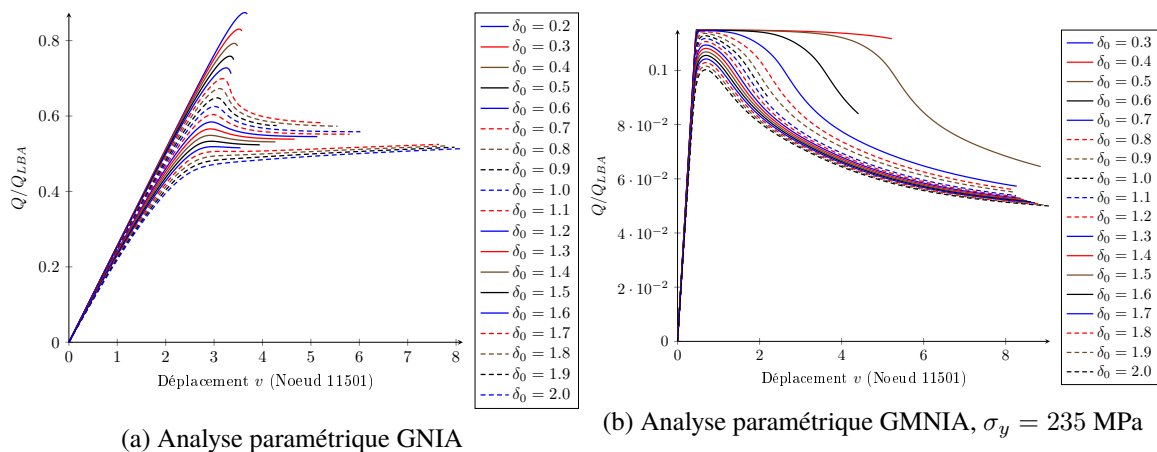
## 4.2 Analyse GNIA, GMNIA

Le flambement des structures de type coque est caractérisé par l’existence d’une dispersion conséquente entre les résultats expérimentaux et théoriques [8]. Il est maintenant connu que cette disparité est due, en grande partie du moins, à la sensibilité aux imperfections initiales induites par le processus de fabrication et inévitables en pratique. Il est alors nécessaire de quantifier les effets de ces défauts sur la tenue au flambement d’une sphère sous cisaillement circonférentiel.

La Figure 3 est un exemple d’analyses paramétriques GNIA et GMNIA pour une sphère sous cisaillement circonférentiel effectuées sur la géométrie de référence. L’analyse GNIA (Figure 3a) permet de constater que contrairement à la sphère sous pression externe, la réduction de la charge critique à de très faibles amplitudes d’imperfection se fait progressivement. Cette diminution commence à se stabiliser pour une amplitude d’imperfection proche de  $\delta_0 = 1.6 \times$  l’épaisseur. De plus, à partir de cette amplitude d’imperfection, l’on commence à observer une certaine réserve en post-flambement. L’analyse GMNIA (Figure 3b) permet de constater que la réduction de la charge critique est beaucoup moins prononcée que celle observée dans l’analyse GNIA. Toutefois, la charge critique obtenue est beaucoup plus faible que dans le cas GNIA. Cela s’explique ici par le fait que, pour cette géométrie, la structure plastifie avant le point limite. Cette perte de rigidité combinée aux effets de l’imperfection géométrique provoque une chute assez importante de la capacité portante de la coque. Globalement, il existe un plateau pour de très faibles amplitudes d’imperfection. Ce plateau tend à s’annihiler au fur et à mesure que l’amplitude de l’imperfection devient conséquente.

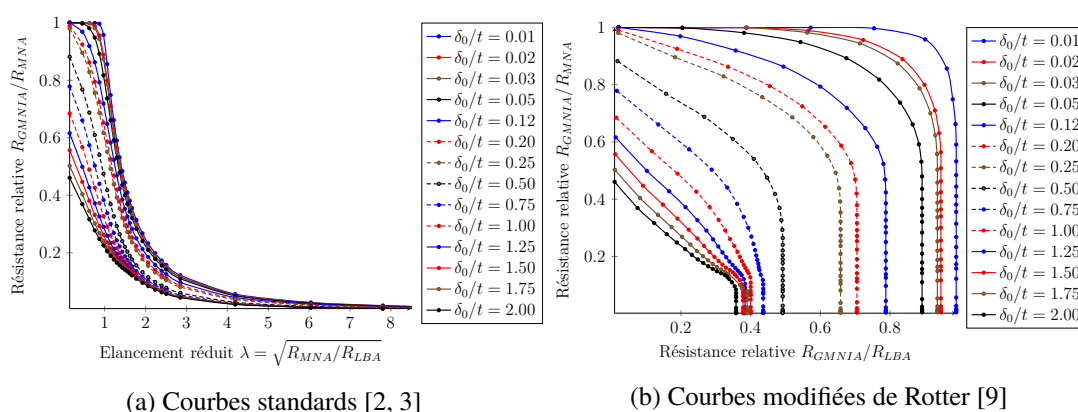
## 5 Courbes de voilement

Les différentes analyses paramétriques initiales préconisées par le texte ECCS permettent une extraction immédiate des différents paramètres des courbes de voilement. Pour ce faire, nous utilisons ici les courbes de voilement modifiées de Rotter [9]. Ces courbes sont une alternative de représentation des courbes standards (Équation 1) et ont l’avantage de faciliter l’extraction des différents paramètres. Pour établir ces courbes numériquement, il suffit, pour une amplitude d’imperfection donnée et un ratio  $R/t$  constant, de faire varier la limite d’élasticité  $\sigma_y$ . La courbe établie est valable pour toutes les géométries de même ratio. Cette méthode peut paraître ubuesque au premier abord car pouvant faire intervenir des limites d’élasticité théoriques et peu réalistes, mais elle donne néanmoins des résultats très satisfai-

FIGURE 3 – Exemple de calculs paramétriques :  $R/t = 125$ 

sants [10, 11]. La Figure 4 est un exemple de courbes de voilement standards et modifiées obtenues pour  $R/t = 500$ . Des courbes semblables sont obtenues pour différentes géométries ( $R/t = 125$ ,  $R/t = 500$ ,  $R/t = 1000$ ). L'interpolation non-linéaire des différents points numériques obtenus pour les paramètres clefs ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ ) permet d'aboutir à des expressions qui ne dépendent que de l'amplitude adimensionnelle de l'imperfection  $\delta_0/t$ .

La Figure 5 représente le facteur d'imperfection élastique  $\alpha$  obtenu pour différentes géométries. On peut constater qu'il n'existe quasiment pas de différences notables entre les valeurs de  $\alpha$ . Le facteur  $\alpha$  permettant, par définition, de mettre en exergue l'influence des non-linéarités géométriques et des imperfections, au vu du constat en 4.1, on peut conclure que les déplacements avant flambement n'ont pas d'influence pour cette configuration. Par ailleurs, la comparaison de ce facteur  $\alpha$  avec celui qui est actuellement codifié pour une sphère sous pression externe permet de constater que la sphère sous cisaillement circonférentiel est nettement moins critique. Et en ce sens, elle peut être considérée comme "moins" sensible aux imperfections initiales.

FIGURE 4 – Courbes de voilement standards et modifiées de Rotter pour  $R/t = 500$ 

## 6 Conclusion

Dans cette étude, des analyses paramétriques numériques sur la structure parfaite et imparfaite ont permis d'explicitier un certain nombre de résultats concernant le flambement et le post-flambement d'une demi-sphère sous cisaillement circonférentiel. Les différentes analyses préconisées par le texte ECCS

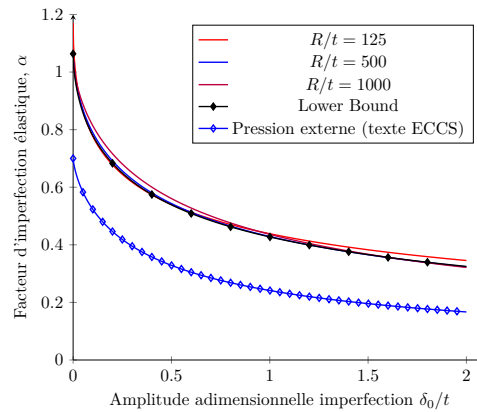


FIGURE 5 – Sphère sous cisaillement circonférentiel : Facteur d'imperfection élastique  $\alpha$

permettent d'apporter des éclaircissements quant à l'influence des non-linéarités géométriques et matérielles mais aussi des imperfections initiales pour cette configuration. Enfin, l'extraction des différents paramètres ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ ) permettent de définir complètement, suivant le formalisme de l'EN 1993-1-6 et du texte ECCS, les courbes de voilement d'une sphère sous cisaillement circonférentiel.

## Références

- [1] W. T. KOITER : *Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht (On the stability of elastic equilibrium)*, Thèse de Doctorat, Delft University of Technology, 1945, [English translations : NASA TT-F10, 833 (1967) and AFFDL TR-7025 (1970)].
- [2] J. M. ROTTER, H. SCHMIDT et EDITORS : *Buckling of steel shells : European Design Recommendations*. 5<sup>th</sup> Edition, *Published by European Convention for Constructional SteelWorks*, 2008.
- [3] EN 1993-1-6 : *Calculs des structures en acier : Partie 1-6 : Résistance et stabilité des structures en coques*. Rapport Technique, *CEN*, 2007.
- [4] SIMULIA, D. S. : *ABAQUS 6.14 User's manual*. *Dassault Systems, Providence, RI.*, 2014.
- [5] Z. YINYI : *Torsional buckling of spherical shells under circumferential shear loads*. *Applied Mathematics and Mechanics*, 20(4) :426-432, 1999.
- [6] E. RIKS : *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47(3) :219-259, 1984.
- [7] C. C. MOW et M. A. SADOWSKI : *Determination of the critical torque inducing buckling in a twisted spherical shell subject to internal or external pressure*. Rapport technique, *DTIC Document*, 1962.
- [8] S. F. EGGWERTZ et L. SAMUELSON : *Buckling strength of spherical shells*. *Journal of Constructional Steel Research*, 17(3) :195-216, 1990.
- [9] C. DOERICH et J. M. ROTTER : *Generalised capacity curves for stability and plasticity : Application and limitations*. *Thin-Walled Structures*, 49(9) :1132–1140, 2011.
- [10] J. M. ROTTER : *The Practical Design of Shell Structures Exploiting Different Methods of Analysis*, in *Shell Structures : Theory and Applications*, Eds Pietraszkiewicz, W. and Szymczak, C., Taylor and Francis, London, 71-86
- [11] J. M. ROTTER : *Elephant's foot buckling in pressurised cylindrical shells*, *Stahlbau*, 75(9), pages 742-747, 2006, Wiley Online Library