

Mélange irréversible et aspect énergétique de la turbulence stratifié

E. Horne ^a, A. Delache ^b, L. Gostiaux^a, A. Venaille^c

a. LMFA UMR CNRS 5509, Ecole Centrale de Lyon, Université de Lyon, France

b. Univ Lyon, UJM-Saint-Etienne, LMFA site de Saint Etienne UMR CNRS 5509, F-42023, Saint-Etienne, France

c. Univ Lyon, Ens de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France

Résumé :

L'efficacité du mélange turbulent dans les fluides stratifiés reste un problème largement ouvert, aux nombreuses applications géophysiques. Nous avons effectuées des simulations numériques directes d'un fluide linéairement stratifié dans le cadre d'une turbulence en déclin. Nous observons que l'efficacité du mélange augmente en fonction du nombre Richardson Ri , et sature à une valeur maximale de 0.25. Nos résultats sont proches quantitativement des prédictions récentes par la mécanique statistique [9].

Abstract :

The efficiency of turbulent mixing in laminated fluids remains a widely open problem with numerous geophysical applications. Direct Numerical Simulations of a linearly stratified bounded fluid in decaying turbulence are performed. We observe that mixing efficiency increases as a function of the Richardson number Ri , and saturates to a maximum value of 0.25. This evolution adjusts quantitatively to recent predictions of statistical mechanics [9].

Mots clefs : fluide stratifié, turbulence, efficacité de mélange, mixing efficiency, stratified turbulence.

Introduction

Le mélange turbulent à l'intérieur des océans joue un rôle crucial sur le budget énergétique mondial car il permet le brassage des énergies entre le soleil, l'atmosphère et la croûte terrestre. Les modèles climatiques qui ne représentent pas ce mélange de manière appropriée seront incapables de reproduire précisément le climat présent ou futur [8]. De plus, le transport vertical dans l'océan est suffisamment important pour séquestrer dans ses profondeurs, de grandes quantités de gaz à effet de serre de l'atmosphère. Or dans ce mélange turbulent océanique, fortement dépendant de la stratification thermique et saline, la proportion d'énergie des structures turbulentes utilisée pour obtenir un mélange efficace est très difficile à estimer à partir des observations [2], et les détails de ce transfert énergétique ne sont pas encore entièrement compris.

Osborn a proposé une relation simple entre la dissipation cinématique turbulente ϵ_k et le mélange irréversible de la densité ϵ_p :

$$\epsilon_p = \Gamma \cdot \epsilon_k \quad (1)$$

avec une valeur constante pour le coefficient de mélange $\Gamma = 0.2$ [5]. Or des études expérimentales ont montré que ce coefficient de mélange Γ est loin d'être constant [1],[6]. En effet, dans la limite de faible stratification, l'écoulement turbulent dissipera bien plus d'énergie cinétique qu'il ne produira de mélange irréversible, c'est-à-dire $\epsilon_p = \Gamma \cdot \epsilon_k \sim 0$. Une dépendance de Γ par rapport à la stratification est donc attendue.

Notre objectif est d'étudier l'efficacité du mélange et la dynamique de la turbulence stratifié au moyen de simulations numériques directes à haute résolution : nous injectons de l'énergie turbulente dans un profil de stratification d'un domaine borné verticalement et nous évaluons le transfert entre énergie cinétique et les différentes formes de l'énergie potentiel. Cette approche diffère avec l'approche classique de la turbulence homogène stratifiée (comme par exemple [4]) où la stratification moyenne est fixée car dans notre étude, celle-ci évolue dans le temps. L'intérêt principal de notre approche est que le mélange irréversible est directement calculé à partir du champ de pleine densité.

Contexte du problème

Equation

Dans le cadre d'une turbulences en déclin, nous considérons un fluide stratifié incompressible. En utilisant, l'équation de Navier-Stokes sous l'approximation Bousinessq, les équations sans dimension s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} - \omega^* \times \mathbf{u}^* = -\nabla p^* - \theta^* \cdot Ri \cdot \mathbf{z}^* + \frac{1}{Re} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}^*, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \right) \theta^* = \frac{1}{Re \cdot Sc} \nabla^2 \theta^*, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (4)$$

où $\theta^* = \frac{1}{\theta_0} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ est la densité réduite sans dimension, ρ est la densité totale, $\rho_0 = \langle \rho \rangle$ est la moyenne spatiale de ρ (dans ce qui suit, nous utiliserons $\langle \rangle$ pour les moyennes spatiales sur le volume), $\theta_0 = \frac{N^2 \cdot H}{g}$ est la différence entre les densités réduites supérieures et inférieures (avec H la hauteur du domaine, g l'accélération de la gravité et $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}$ la fréquence de la flottabilité carrée), ω^* est la vorticité, p^* la pression totale et $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/u_0$ est la vitesse sans dimension. Les nombres Reynolds, Richardson et Schmidt sont respectivement :

$$Re = \frac{\ell_0 \cdot u_0}{\nu}, \quad Ri = \frac{\theta_0 \cdot g \cdot \ell_0}{u_0^2}, \quad Sc = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (5)$$

où ℓ_0 est la longueur intégrale et u_0 est la *r.m.s.* du champ de vitesse turbulente initiale.

Equation du transfert des énergies

L' énergie cinétique et potentielle sont définies respectivement par :

$$E_k = \frac{\rho_0}{2} \cdot V \cdot (\langle \mathbf{u}^2 \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle^2), \quad (6)$$

$$E_p = g \int_V \rho \cdot z \, dV. \quad (7)$$

On peut obtenir les équations du transfert des énergies en utilisant l'approche de [10], elles s'écrivent dans le cas d'un domaine isolé :

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = -\Phi_z - \epsilon_k, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \Phi_z + \Phi_i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_b}{\partial t} = \epsilon_p, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial t} = \Phi_z + \Phi_i - \epsilon_p. \quad (11)$$

L'énergie potentielle au "repos" et l'énergie potentielles "disponibles" sont définis respectivement par :

$$E_b = g \int_V \rho_s \cdot z \, dV, \quad (12)$$

$$E_a = g \int_V (\rho - \rho_s) \cdot z \, dV = (E_p - E_b), \quad (13)$$

Où ρ_s est le champ de densité trié verticalement 3D, le déplacement verticale trié étant noté z_s . Cet état trié correspond à l'énergie potentielle minimale du système, noté E_b . De plus, E_a donne une mesure de la quantité d'énergie potentielle disponible pour être transformée en mélange irréversible. Le taux de dissipation visqueux, le flux de flottabilité verticale réversible et le taux de conversion de l'énergie interne en l'énergie potentielle sont respectivement :

$$\epsilon_k = \int_V \mu \left[2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] dV, \quad (14)$$

$$\epsilon_p = \kappa g \int_V \nabla z_s \cdot \nabla \rho \quad (15)$$

$$\Phi_z = g \int_V \rho \cdot w \, dV, \quad (16)$$

$$\Phi_i = -\kappa \cdot g \cdot A \cdot (\rho_{top} - \rho_{bot}), \quad (17)$$

où w est la composante verticale de la vitesse et ρ_{top} (resp. ρ_{bot}) est la moyenne de ρ sur la surface horizontale A en haut (resp. en bas) du domaine. L'équation (10) quantifie le mixage irréversible. car elle permet de distinguer l'augmentation de l'énergie potentielle produite par les ondes et les retournement (Φ_z), de l'augmentation produite par le mélange irréversible (ϵ_p).

Mélange en turbulence stratifiée

Le mélange produit par un flux turbulent sur un fluide stratifié stable est habituellement quantifié par le coefficient de mélange $\Gamma = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_k}$ ou l'efficacité de mélange $\eta = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_k}$, qui sont des quantités spatiales instantanées :

$$\Gamma = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_k}, \quad \text{and} \quad \eta = \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_k}. \quad (18)$$

S'il est logique de comparer les valeurs instantanées de ϵ_p et ϵ_k en turbulence stationnaire, ce n'est plus le cas dans le contexte de la turbulence en déclin. Nous définissons alors le coefficient de mélange cumulatif et l'efficacité de mélange cumulatif :

$$\Gamma_C = \frac{\int_0^t \epsilon_p \cdot dt}{\int_0^t \epsilon_k \cdot dt}, \quad \eta_C = \frac{\int_0^t \epsilon_p \cdot dt}{\int_0^t \epsilon_p \cdot dt + \int_0^t \epsilon_k \cdot dt} \quad (19)$$

Méthode numérique

L'ensemble de simulations numériques directes 3D (DNS) est effectué en résolvant l'équation de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Une méthode pseudo-spectrale classique de Fourier est utilisée avec 1024^3 points de grille. Néanmoins, nous avons borné verticalement le domaine afin d'obtenir une évolution du gradient moyen de densité. Nous avons utilisé une méthode de pénalisation, en introduisant une région pénalisée de type couche poreuse afin de prendre en compte les conditions de non-flux en bas et en haut de la boîte (voir [3]) ainsi que des conditions de non glissement. Par contre le plan horizontal reste périodique. Les équations ainsi reformulées deviennent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \omega^* \times \mathbf{u}^* = \nabla p^* - \theta^* \cdot Ri \cdot \mathbf{z}^* \cdot (1 - H) + \frac{1}{Re} \cdot \nabla^2 - \frac{1}{\eta_p} \cdot H \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_s) \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = [(1 - H) \cdot \mathbf{u}^* \cdot \theta^* + \mathbf{u}_s \cdot H \cdot \theta^*] + \nabla \cdot \left\{ \left[\frac{1}{Re \cdot Sc} (1 - H) + \lambda \cdot H \right] \cdot \nabla \theta^* \right\} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (22)$$

avec $H(x)$ une fonction "escalier" disparaissant dans le domaine fluide, $\eta_p = 10^{-3}$ est la perméabilité de la zone pénalisée, $\lambda = 10^{-8} \cdot \eta_p$ est le terme de diffusion dans la zone pénalisée, et \mathbf{u}_s est la vitesse dans la zone pénalisée (dans ce travail $\mathbf{u}_s = 0$). Pour produire un mélange, un champ de vitesse turbulent est introduit à $t = 0$ qui perturbe le profil de flottabilité initialement stable : l'écoulement évolue sur une quarantaine de temps de retournement initial ℓ_0/u_0 .

Les paramètres utilisés dans nos DNS sont donnés dans le tableau 1. Le nombre de Schmidt est pris constant pour toutes les simulations, $Sc = 5$. Nous avons basé nos paramètres sur des expériences physiques typiques d'une turbulence de grille effectuée au LMFA, où $u_0 = 0.1$ m/s, $\ell_0 = 0.01$ m, $H = 20 \cdot \ell_0$. Par ailleurs, nous imposons différentes valeurs de N .

Run	A_0	A_1	A_2	A'_2	A''_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Re	1000	1000	1000	1600	2500	1000	1000	1000	1000
Ri	0.05	0.2	0.8	0.8	0.8	3.2	12.8	51.2	204.8

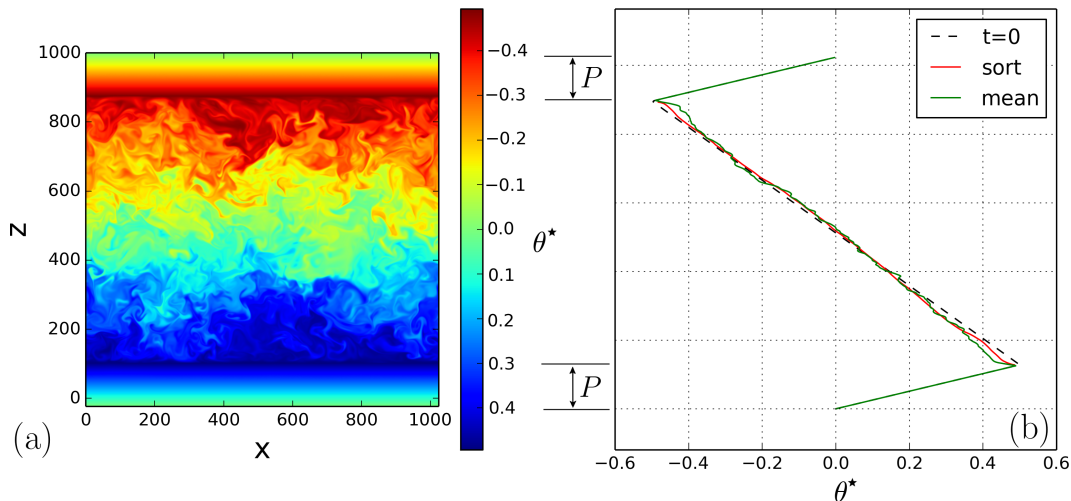
TABLE 1 – Paramètres principaux des DNS : Re le numéro de Reynolds et Ri le nombre Richardson.

FIGURE 1 – (A) Instantané d'une coupe verticale du champ de densité réduite θ^* à $t \cdot N / (2\pi) = 0,7$ pour le cas A_2 . (B) Profil vertical du champ de densité réduite moyenne horizontale (ligne rouge) et de la moyenne horizontale du champ de densité réduite triée (ligne verte). Le profil de densité réduite initiale est également indiqué (ligne pointillée). La zone de pénalisation est indiquée par deux flèches et la lettre P entre les deux chiffres.

Résultats

Bilan énergétique

Une coupe verticale instantanée du champ de densité réduite θ^* est donné sur la figure 1 (a). Sur la figure 1 (b), on a reporté le profil vertical de densité réduite trié et non trié, en moyennant les valeur horizontalement pour chaque altitude z . Le champ non trié de densité réduite instantanée est utilisé pour calculer E_p , tandis que le champ trié de densité réduite instantanée est utilisé pour calculer E_b . E_p contiendra l'augmentation d'énergie produite par le mélange irréversible en plus des fluctuations d'énergie associées à la flottabilité verticale réversible des ondes et des renversements. En revanche, la variation de E_b est associée uniquement au mélange irréversible produit dans l'écoulement.

L'évolution de E_p , E_b , E_a et E_k sont indiqués dans la figure 2 calculée à partir de de la simulation du cas A_2 . La réponse du champ de flottabilité au champ de vitesse initialement imposé produit un maximum de E_a à $t \approx \frac{\pi}{N}$, et cette quantité oscille encore à la fréquence proche de N même si elle décroît lentement, comme cela est prédit par [7]. En revanche, l'énergie potentielle "au repos" E_b augmente monotonement, atteignant une valeur finale qui représente la quantité de mélange irréversible qui s'est produite pendant la simulation. Ce dernier terme et E_p convergeront vers E_b lorsque l'énergie cinétique du système tend vers zéro. En conséquence, à la fin de la simulation, aucune énergie disponible (E_a) n'est disponible pour produire un mélange irréversible.

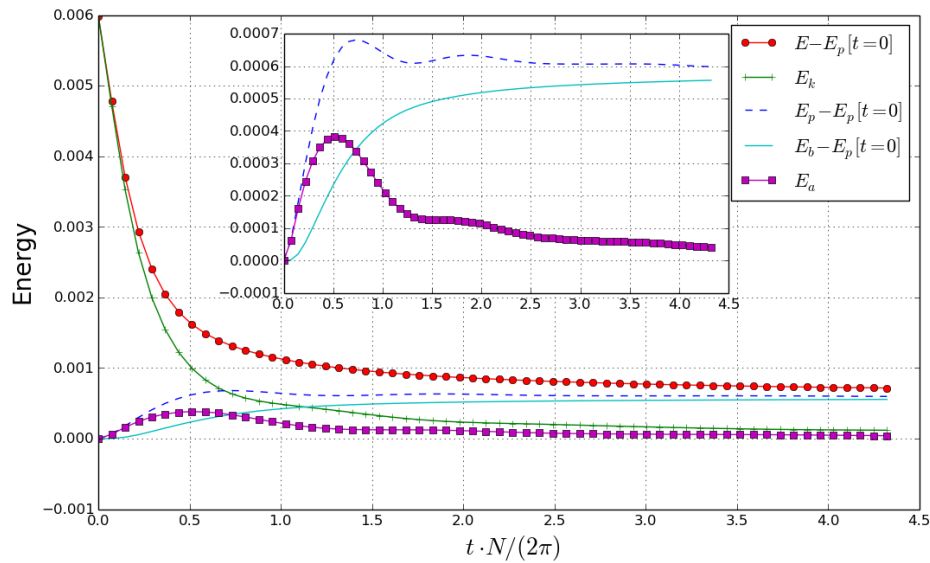


FIGURE 2 – Évolution des énergies pour le cas A_2 en fonction de $t \cdot N / (2 \pi)$. $E = E_p + E_k$ est l'énergie totale. L'encart montre un zoom sur les valeurs d'énergie les plus faibles pour mettre en évidence l'évolution des énergies potentielles.

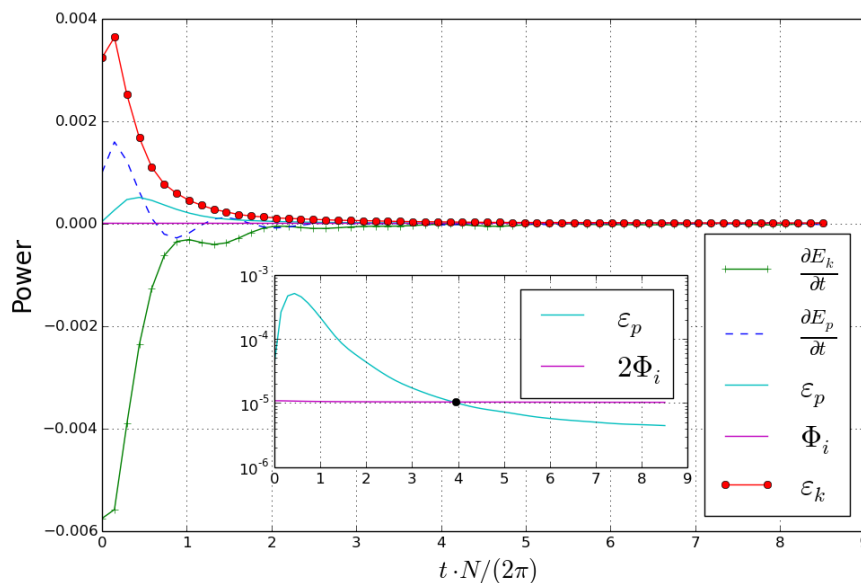


FIGURE 3 – Évolution des termes de transfert d'énergie temporelle pour le cas A_3 en fonction de $t \cdot N / (2 \pi)$. L'encart compare ϵ_p et Φ_i afin de calculer le temps T_d où $\epsilon_p < 2\Phi_i$. Power indique la puissance des termes $\frac{\partial E_k}{\partial t}$, $\frac{\partial E_p}{\partial t}$, ϵ_p , ϵ_k et Φ_i inclus dans les équations du transfert d'énergie (8-11)

Transfert d'énergie

Sur la figure 3, on montre les termes de transfert d'énergie exprimés dans les équations (8-11) pour le cas A_3 . Initialement, le transfert d'énergie cinétique est dominant et est compensé par le terme de dissipation visqueuse ϵ_k . L'énergie qui est transférée vers un mélange irréversible ϵ_p présente un maximum à des

temps courts avant de se détériorer et d'atteindre la valeur ultime ϕ_i . Le temps T_d est obtenu lorsque ϵ_p devient inférieur à $2\Phi_i$. Avant ce temps, le mélange irréversible est dominé par la conversion de l'énergie turbulente en l'énergie potentielle. Après ce temps, le mélange irréversible est dominé par la conversion de l'énergie interne en l'énergie potentielle.

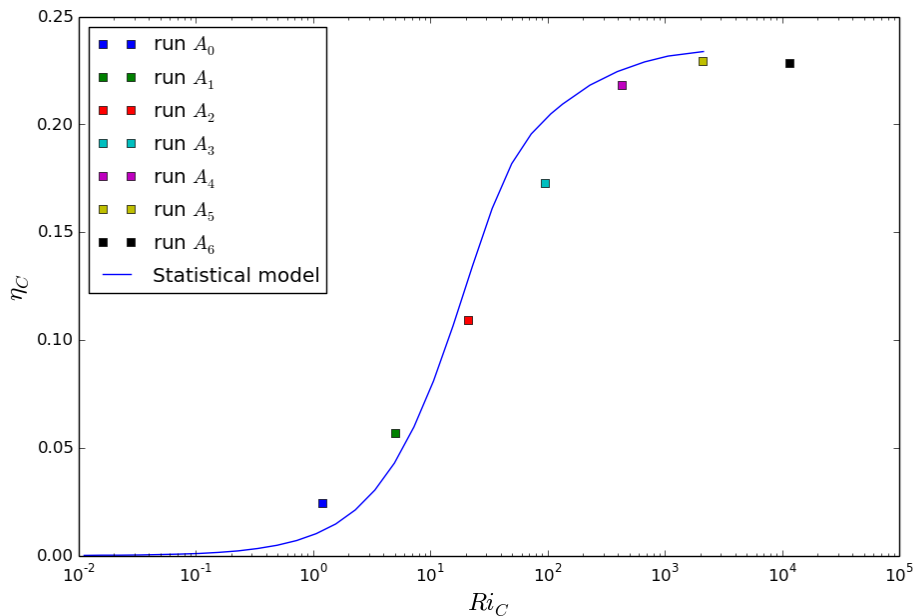


FIGURE 4 – η_C en fonction de Ri_C pour les différentes simulations. Chaque symbole indique la valeur de l'efficacité de mélange intégrée dans un intervalle de temps $[0, T_d]$. Dans la ligne solide bleue, on montre la prédiction de l'efficacité de mélange prévue par la théorie statistique de [9].

Efficacité de mélange

L'efficacité cumulative de mélange η_C est estimée jusqu'à l'instant T_d . Le nombre de Richardson cumulé jusqu'à ce temps T_d est donné par :

$$Ri_C = Ri \cdot \frac{E_k(t=0)}{\int_0^{T_d} \epsilon_k \cdot dt}. \quad (23)$$

Sur la figure 4, η_C est tracé en fonction de Ri_C et comparé à la prédiction de la théorie statistique proposée par [9]. L'accord est remarquablement bon.

Conclusion

Nous avons calculé l'efficacité du mélange à partir de DNS haute résolution de la turbulence stratifiée et sur une large gamme de nombres Richardson. Cela nous a permis d'observer l'augmentation de η avec Ri , ce qui est en très bon accord avec la théorie statistique de la turbulence stratifiée proposée par [9]. Cette étude sera étendue au cas d'une stratification à deux couches.

- [1] M. Barry, G. Ivey, K. Winters, and J. Imberger. Measurements of diapycnal diffusivities in stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 442 :267–291, 2001.
- [2] G. Ivey, K. Winters, and J. Koseff. Density stratification, turbulence, but how much mixing ? *A. R. Fluid Mech.*, 40 :169–184, 2008.
- [3] B. Kadoch, D. Kolomenskiy, P. Angot, and K. Schneider. A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles. *J. Comp. Phy.*, 231 :4365–4383, 2012.
- [4] A. Maffioli, G. Brethouwer, and E. Lindborg. Mixing efficiency in stratified turbulence. *J. Fluid Mech. Rapids*, 794 :R31–11, 2016.
- [5] T. Osborn. Estimates of the Local Rate of Vertical Diffusion from Dissipation Measurements. *J. Phy. Ocean*, 10 :83–89, 1980.
- [6] C. Rehmann and J. Koseff. Mean potential energy change in stratified grid turbulence. *Dyn. Atm. Ocean*, 37 :271–294, 2004.
- [7] A. Salhi and C. Cambon. Anisotropic phase-mixing in homogeneous turbulence in a rapidly rotating or in a strongly stratified fluid : An analytical study. *Physics of Fluids*, 19 :055102, 2007.
- [8] Q. Schiermeier. Oceanography : Churn, churn, churn. *Nature*, 447(7144) :522–524, 2007.
- [9] A. Venaille, L. Gostiaux, and J. Sommeria. A statistical theory of mixing in stratified fluids. *Proceedings of the VIIIth International Symposium on Stratified Flows*, 2016.
- [10] K. Winters, P. Loambard, J. Riley, and E. D’Asaro. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 289 :115–128, 1995.