

Un schéma d'intégration temporelle pour la réponse transitoire de systèmes mécaniques avec butées de contact

K. L. Nguyen^a, Q. T. Tran^a, L. Manin^a, S. Baguet^a, M.-A. Andrianoely^a,
L. Piau^b, R. Dufour^a

a. Université de Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France

b. DrillScan, Villeurbanne, F-69100, France

Résumé :

Des méthodes d'intégration temporelle comme les schémas de Runge-Kutta (RK) ou de Newmark (NM) sont utiles pour la simulation du comportement dynamique transitoire de train de tiges de forage confiné dans un puits. Cependant, leurs algorithmes à pas de temps constant sont coûteux en temps de calcul. Pour le schéma explicite d'ordre 4 qui est le plus répandu dans les méthodes RK, le pas de temps doit être suffisamment petit pour satisfaire la condition de stabilité et la taille du système d'équations est doublée. Un inconvénient de la méthode NM implémentée aux problèmes non-linéaires est l'introduction de la boucle de Newton-Raphson (NR) à chaque pas de temps, qui impose le calcul délicat des matrices jacobiniennes. Plusieurs techniques sont présentées pour améliorer l'efficacité des schémas d'intégration. Une méthode proposée ici, basée sur la méthode NM, combine une technique pour éviter la boucle de NR avec des algorithmes à pas adaptatif. Son efficacité est étudiée en comparaison à d'autres schémas existants. Deux cas sont considérés : un oscillateur à double butées, une poutre en flexion avec butées latérales.

Abstract :

The time-integration methods such as the Runge-Kutta (RK) or Newmark (NM) schemes are useful for the simulation of the transient dynamic behavior of a drill string confined in a well. However, their constant time-step algorithms are very time-consuming. For the fourth-order explicit scheme which is the most widely used of RK methods, the time step must be small enough to satisfy the stability criteria and the equation number of the system is doubled. A drawback of the NM method in non-linear problems is the introduction of the Newton-Raphson loop (NR) for each time step, which requires the complicated computation of the Jacobian matrices. Many techniques are presented to improve the efficiency of integration schemes. A method proposed in this work, based on the NM method, combines a technique to avoid NR with adaptive time step algorithms. Its computing performance is analyzed by comparing with other existing methods in the case of a single oscillator with double elastic end stops and of the beam deflection with the lateral stops.

Mots clefs : Schéma d'intégration temporelle, dynamique transitoire, butées de contact, Runge-Kutta, Newmark, algorithme à pas adaptatif

1 Introduction

Dans le but de modéliser le comportement dynamique en régime transitoire de train tiges de forage confinées dans un puits, différentes méthodes d'intégration temporelle pas à pas [1] sont développées telles que celles de Runge-Kutta (RK) [2, 3, 4] ou de Newmark (NM) [5]. Ces deux méthodes sont souvent implémentées pour calculer la réponse transitoire non-linéaire dans les systèmes mécaniques. Cependant elles sont coûteuses en temps de calcul à cause des inconvénients propres de chaque méthodes.

Parmi la famille des méthodes de RK, le schéma explicite d'ordre 4 (RK4) est le plus largement répandu, initialement utilisé pour résoudre des systèmes différentiels ordinaires d'ordre un. Comme celui-ci exprime l'état actuel du système en fonction de son état précédent, il est donc simple à implémenter. Néanmoins, le pas de temps doit être suffisamment petit pour satisfaire la condition de stabilité. De plus, la taille du système d'équations du problème dynamique est doublée car le système est décomposé en deux systèmes d'équations différentielles du premier ordre.

Parmi les schémas NM, celui à accélération constante est intéressant car il est inconditionnellement stable pour des problèmes linéaires [6]. Ses résultats peuvent être suffisamment précis même avec un pas de temps plus grand que celui des schémas explicites. Cependant la nécessité d'inverser les matrices à chaque pas de temps pénalise les temps de calcul. Les non-linéarités sont souvent présentes dans la dynamique des systèmes mécaniques et la stabilité des schémas NM change. À cause des non-linéarités, il est usuel d'introduire à chaque pas de temps l'algorithme itératif de Newton-Raphson (NR) [7] qui impose le traitement délicat des matrices jacobiniennes. Afin d'éviter l'appel à NR, une technique approximative est d'affecter au temps $i + 1$ la valeur de la force non linéaire connue au temps i [8, 9].

D'une façon générale, adapter le pas de temps améliore grandement l'efficacité des schémas numériques. Les algorithmes à pas adaptatif consistent à définir un indicateur [4, 10, 11] à chaque itération pour contrôler le pas de temps. Le modèle proposé ici, repose sur le schéma de NM à accélération constante qui allie l'algorithme à pas adaptatif et la technique pour s'affranchir de NR. Son efficacité est étudiée au regard du temps de calcul et de la précision en le comparant à d'autres schémas existants dans les cas d'un oscillateur avec double butées et de la déflexion d'une poutre avec butées latérales.

2 Oscillateur à double butées

Ce cas test, pris dans la thèse de Célio Duran [8, 9], représente un schéma simple d'un système de rotor à une dimension. Le système contient un corps rigide de masse $M = 100$ kg se déplaçant sur un plan horizontal (voir Figure 1). Il est relié au bâti par un système ressort-amortisseur de raideur $K = 10^9$ N/m et d'amortissement $C = 50$ N/m/s. Deux butées élastiques disposées de manière symétrique simulent un éventuel contact élastique entre la masse mobile et le bâti. Une force d'excitation $F_h(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est ajoutée à la masse avec $F_0 = 201240$ N et $\omega = 1256.6$ rad/s, représentative d'un balourd. Le déplacement et la vitesse initiale de la masse sont égaux à zéros.

La force de contact est définie par

$$F_c(\delta) = -\text{sign}(\delta)K_c(\delta)(|\delta| - j_0) \quad (1)$$

où $j_0 = 4 \times 10^{-4}$ m est le jeu initial représentant la distance entre la masse et le bâti et δ désigne le déplacement de la masse. Afin d'éviter des problèmes numériques, la raideur de contact K_c est régularisée par la loi arctan avec le paramètre λ : $K_c(\delta) = \frac{k_c}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(|\delta| - j_0)) + 1 \right]$ où $\lambda = 7 \times 10^7$

m^{-1} et $k_c = 10^{10}$ N/m.

En présence de la force de contact, le système est non linéaire et l'équation de la dynamique s'écrit :

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = F_h(t) + F_c(\delta) \quad (2)$$

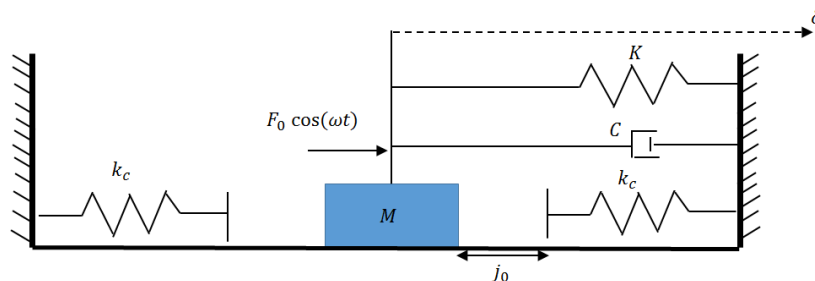


FIGURE 1 – Schéma de l'oscillateur avec double butées élastiques.

L'objectif de cette section est de comparer la performance de calcul de différentes méthodes d'intégration temporelle. Dans un premier temps, les schémas RK4 et NM à pas constant (RK4-1, NM1) sont brièvement rappelés. Une version modifiée de la méthode NM (NMM1) [8, 9] est aussi présentée. Ensuite, la combinaison de ces méthodes et des algorithmes à pas adaptatif est introduite et comparée avec des méthodes à pas constant.

2.1 Méthodes à pas constant

La méthode de Runge-Kutta est une méthode itérative qui calcule l'approximation de la solution du problème différentiel d'ordre un : $\dot{x} = f(t, x(t))$ et $x(t) = x_0$. Le schéma RK4 (**RK4-1**) consiste à estimer la solution à l'instant actuel en fonction de l'état précédent et de quatre pentes intermédiaires entre ces deux instants. Son algorithme est présenté dans [2, 3, 4]. Cette méthode est appliquée au problème (2) en posant $x = [\delta \ \dot{\delta}]^T$, ce qui fait doubler la taille du système.

La méthode de Newmark (**NM1**) approxime l'intégration temporelle comme

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{n+1} &= \dot{\delta}_n + (1 - \gamma)dt\ddot{\delta}_n + \gamma dt\ddot{\delta}_{n+1} \\ \delta_{n+1} &= \delta_n + dt\dot{\delta}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) dt^2\ddot{\delta}_n + \beta dt^2\ddot{\delta}_{n+1} \end{aligned} \quad (3)$$

Dans ce travail, le schéma à accélération constante ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$) est utilisé. En présence des contacts masse-butée, le problème (2) est non-linéaire et l'algorithme de Newmark doit introduire la boucle de Newton-Raphson pour estimer δ à chaque instant t_{n+1} . Le critère d'arrêt de la boucle est défini par trois paramètres i_{\max} représentant le nombre d'itérations maximal de NR, ε_r et ε_δ représentant les valeurs maximales du résidu et de l'incrément à chaque itération de NR. Cet algorithme est présenté en détail dans [12]. La boucle de NR nécessite les calculs de $\partial\delta/\partial\delta$ et $\partial G/\partial\dot{\delta}$ où $G = C\dot{\delta} + K\delta - F_{\text{ext}}(t) - F_c(\delta)$. Dans un problème plus général où δ est un vecteur, ces deux termes sont des matrices jacobiennes dont les calculs sont délicats.

Une version modifiée de la méthode de Newmark (**NMM1**) [8, 9] consiste à approximer la force de

contact à l'instant t_{n+1} via la raideur de contact à l'instant t_n comme suit :

$$F_{c,n+1} = -K_c(\delta_n)\delta_{n+1} + K_c(\delta_n)j_0\text{sign}(\delta_n) \quad (4)$$

Cette technique s'affranchit donc la non-linéarité du problème et évite la boucle de NR qui nécessite le calcul des matrices jacobiennes. Aussi, cela suppose que $K_c(\delta)$ soit régulière, d'où l'utilisation d'une loi arctan régularisée. Le système (2) à l'instant t_{n+1} est approximé par une équation linéaire :

$$M\ddot{\delta}_{n+1} + C\dot{\delta}_{n+1} + \tilde{K}_n\delta_{n+1} = \tilde{F}_{n+1} \quad (5)$$

où $\tilde{K}_n = K + K_c(\delta_n)$ et $\tilde{F}_{n+1} = F_{\text{ext},n+1} + K_c(\delta_n)j_0\text{sign}(\delta_n)$. Ensuite, la méthode de Newmark pour des systèmes linéaires [12] peut être utilisée :

1. À $t = 0$, il n'y a pas de contact $F_c = 0$ alors $\ddot{\delta}_0 = M^{-1} (F_0 - C\dot{\delta}_0 - K\delta_0)$. L'état du problème à l'instant t_n est supposé connu : $\delta_n, \dot{\delta}_n, \ddot{\delta}_n$
2. Prédiction

$$\delta_{n+1} = \delta_n + dt\dot{\delta}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) dt^2\ddot{\delta}_n, \quad \dot{\delta}_{n+1} = \dot{\delta}_n + (1 - \gamma)dt\ddot{\delta}_n \quad (6)$$

3. Correction

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{n+1} &= \left(M + \gamma dt C + \beta dt^2 \tilde{K}_n\right)^{-1} \left(\tilde{F}_{n+1} - C\dot{\delta}_{n+1} - \tilde{K}_n\delta_{n+1}\right) \\ \delta_{n+1} &= \delta_{n+1} + \beta dt^2 \ddot{\delta}_{n+1} \\ \dot{\delta}_{n+1} &= \dot{\delta}_{n+1} + \gamma dt \ddot{\delta}_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 Méthodes à pas adaptatif

2.2.1 Méthodes RK4 à pas adaptatif

Soit $\delta_{n+1}^{(1)}$ et $\delta_{n+1}^{(2)}$ deux solutions numériques de RK4 correspondant à un pas dt et deux pas $dt/2$, la relation entre la solution exacte et ces deux solutions numériques est donnée par

$$\delta(t_{n+1}) = \delta_{n+1}^{(1)} + c dt^5 + \mathcal{O}(dt^6), \quad \delta(t_{n+1}) = \delta_{n+1}^{(2)} + 2c \left(\frac{dt}{2}\right)^5 + \mathcal{O}(dt^6) \quad (8)$$

où c est un coefficient du développement de Taylor. Par conséquent,

$$\left| \delta_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}^{(2)} \right| = c dt^5 \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \iff c = \frac{\left| \delta_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}^{(2)} \right|}{(1 - 2^{-4}) dt^5} \quad (9)$$

Remplaçant c dans la deuxième approximation de $\delta(t_{n+1})$, on obtient

$$\delta(t_{n+1}) = \delta_{n+1}^{(2)} + \frac{\left| \delta_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}^{(2)} \right|}{15} + \mathcal{O}(dt^6) \quad (10)$$

$\left| \delta_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}^{(2)} \right| / 15$ peut être considéré comme un estimateur de l'erreur de troncature pour adapter le pas de temps à chaque itération [4]. Dans le cas où δ est un vecteur, on choisit la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$

au lieu de la valeur absolue ($\|\delta\|_\infty = \max_i(|\delta_i|)$). Deux algorithmes à pas adaptatif de RK4 (RK4-2, RK4-3) sont introduits, l'un contrôle le pas de temps par des facteurs constants, l'autre contrôle le pas de temps par des facteurs variables. Les quatre étapes suivantes sont à considérer :

1. Supposons qu'on a des données à l'instant t_n : $\delta_n, \dot{\delta}_n$
2. Calculer $\delta_{n+1}^{(1)}, \dot{\delta}_{n+1}^{(1)}$ par RK4 à pas dt et $\delta_{n+1}^{(2)}, \dot{\delta}_{n+1}^{(2)}$ par deux fois RK4 à pas $dt/2$
3. Calculer l'erreur de troncature : $er = \max \left(\left| \delta_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}^{(2)} \right|, \left| \dot{\delta}_{n+1}^{(1)} - \dot{\delta}_{n+1}^{(2)} \right| \right) / 15$
4. **Méthode RK4-2** : Si $er \leq \varepsilon_0/100$ alors $dt_{\text{new}} = b \times dt_{\text{old}}$, $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(2)}$ et on passe à l'instant suivant. Si non
 - Si $\varepsilon_0/100 < er \leq \varepsilon_0$ alors $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(2)}$ et on passe à l'instant suivant
 - Si non, $dt_{\text{new}} = dt_{\text{old}}/a$, on revient à l'étape 2

Les paramètres $a > 1, b > 1$ et ε_0 sont choisis par l'utilisateur. ε_0 permet de contrôler l'erreur de troncature. Plus ε_0 est petit, plus le résultat numérique est précis et plus le temps de calcul est important.

Méthode RK4-3 : Si $er \leq \varepsilon_0$ alors $dt_{\text{new}} = s \times dt_{\text{old}}(\varepsilon_0/er)^{0.2}$, $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(2)}$ et on passe à l'instant suivant. Si non, $dt_{\text{new}} = s \times dt_{\text{old}}(\varepsilon_0/er)^{0.25}$, on revient à l'étape 2.

Les paramètres s, ε_0 sont choisis par l'utilisateur.

2.2.2 Méthodes NM à pas adaptatif

Le pas de temps est contrôlé par un estimateur de l'erreur locale entre deux pas de temps consécutifs. L'estimateur présenté dans [10, 11] est utilisé dans ce travail. Cet estimateur a été introduit initialement pour traiter des problèmes linéaires [10] puis pour des problèmes non-linéaires [11].

La **méthode NM2** combine la méthode NM avec l'algorithme à pas adaptatif basé sur cet estimateur comme :

1. État initial, prédiction, boucle de NR. Ces trois premières étapes sont présentées dans [12].
2. Calcul de l'erreur locale relative : $\eta = \left| \beta - \frac{1}{6} \right| dt^2 \frac{|\ddot{\delta}_{n+1} - \ddot{\delta}_n|}{|\delta_{n+1} - \delta_n|}$. Dans le problème général où δ est un vecteur, la norme 2 est utilisée pour calculer η au lieu de la valeur absolue [10, 11]

$$\left(\|\delta\|_2 = \sqrt{\sum_i \delta_i^2} \right).$$
3. Si $\nu_1 \eta_e \leq \eta \leq \nu_2 \eta_e$, on ne change pas dt et passe à l'instant suivant.
Si non alors $dt_{\text{new}} = dt_{\text{old}} \sqrt{\eta_e/\eta}$ puis
 - Si $\nu_1 \eta_e > \eta$, on passe à l'instant suivant avec dt_{new}
 - Si non, on revient à l'étape 2 avec dt_{new} η_e permet de contrôler l'erreur locale de chaque itération. Plus η_e est petit, plus le résultat numérique est précis et plus le temps de calcul est important [10].

La combinaison de la méthode NMM1 avec l'algorithme à pas adaptatif est considérée comme la **méthode NMM2** :

1. État initial, prédiction, correction. Ces trois premières étapes sont présentés en Sec. 2.1.
2. Calcul de l'erreur locale relative comme l'étape 2 de NM2
3. Adaptation du pas de temps comme l'étape 3 de NM2

2.3 Résultats

Les paramètres de chaque méthode sont choisis après une étude des différentes valeurs des paramètres :

- RK4-2 :

$$dt = 10^{-5} \text{ s} : \varepsilon_0 = 10^{-5}, a = 1.1, b = 1.01$$

$$dt = 10^{-6} \text{ s} : \varepsilon_0 = 10^{-5}, a = 1.12, b = 1.01$$

- RK4-3 :

$$dt = 10^{-5} \text{ s} : \varepsilon_0 = 10^{-4}, s = 0.5$$

$$dt = 10^{-6} \text{ s} : \varepsilon_0 = 5 \times 10^{-5}, s = 0.5$$

- NM1 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-9}, i_{\max} = 10$

- NM2 :

$$dt = 10^{-5} \text{ s} : \varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-9}, i_{\max} = 10, \eta_e = 10^{-4}, \nu_1 = 0.5, \nu_2 = 4$$

$$dt = 10^{-6} \text{ s} : \varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-9}, i_{\max} = 10, \eta_e = 5 \times 10^{-5}, \nu_1 = 0.5, \nu_2 = 4$$

- NMM2 : $\eta_e = 5 \times 10^{-5}, \nu_1 = 0.5, \nu_2 = 4$

dt (s)	RK4-1 (s)	RK4-2 (s)	RK4-3 (s)	NM1 (s)	NM2 (s)	NMM1 (s)	NMM2 (s)
10^{-5}	8.99	15.24	5.87	8.9	12	8	22
10^{-6}	1251	15.55	5.8	1400	23	1146	19

TABLE 1 – Temps de calcul (s) des méthodes pour le calcul de la dynamique de l'oscillateur avec double butées. Dans le cas où le pas de temps est adaptatif, dt représente le pas de temps initial.

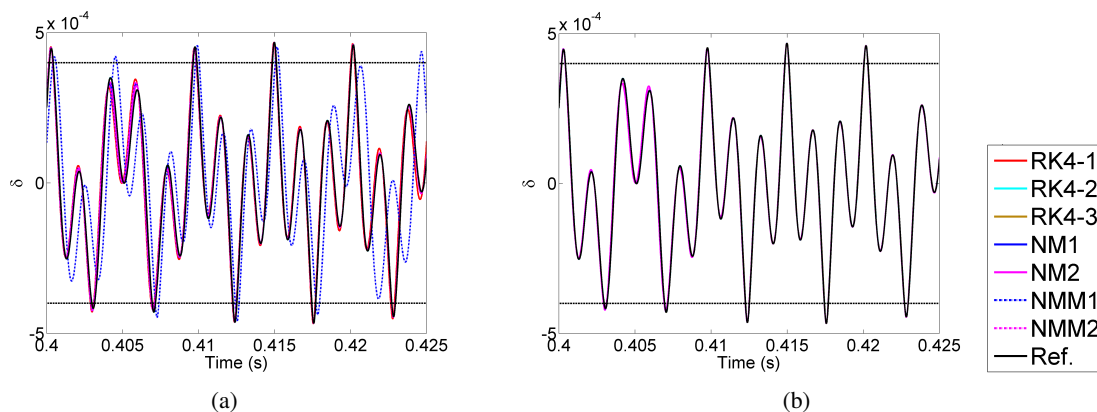


FIGURE 2 – Déplacement (m) de l'oscillateur avec double butées calculé par des méthodes à pas constant et à pas adaptatif pour (a) $dt = 10^{-5}$ s, (b) $dt = 10^{-6}$ s. Courbes noires : résultats de référence, lignes horizontales noires : jeu = 4×10^{-4} m.

Le Tableau 1 montre le temps de calcul de chaque méthode pour des pas de temps $dt = 10^{-5}$ s et 10^{-6} s. La Figure 2 représente le déplacement de l'oscillateur au cours du temps. Les courbes noires, obtenues par la méthode RK4-1 pour un pas de temps très petit $dt = 10^{-8}$ s, sont considérées comme des résultats de référence.

L'efficacité des méthodes à pas constant est maintenant étudiée. Pour $dt = 10^{-5}$ s, la méthode RK4-1 donne des résultats moins bons que ceux de NM1 et la méthode NMM1 donne des mauvais résultats. Leurs résultats convergent vers des résultats de référence pour $dt = 10^{-6}$ s. La méthode NMM1 améliore un peu le temps de calcul par rapport aux deux autres méthodes mais son temps de calcul reste encore important. Cette étude montre que la méthode NMM1 ne donne que des bons résultats pour un pas de temps suffisamment petit.

La méthode RK4-3 est la plus efficace car elle donne des résultats précis avec le temps de calcul le plus court. Pour $dt = 10^{-5}$ s, à l'exception de RK4-3, les méthodes à pas adaptatif nécessitent plus de temps de calcul que les méthodes à pas constant. Cependant, elles donnent des résultats plus précis d'après la Figure 2a. Pour $dt = 10^{-6}$ s, des méthodes à pas adaptatif réduisent largement le temps de calcul par rapport à des méthodes à pas constant. La méthode NMM2 donne un calcul un peu plus rapide que NM2 mais plus long que des méthodes RK4-2 et RK4-3.

Dans la suite, l'efficacité des méthodes est étudiée dans le cas d'une poutre en flexion qui est plus proche de la configuration du train de tiges de forage.

3 Poutre en flexion

Ce cas test considère une poutre creuse de longueur $L = 35$ m avec des conditions aux limites de type "appui-appui" aux deux extrémités (Figure 3). Son module de Young E est 2.03×10^{11} Pa, sa masse volumique est 7900 kg/m³. Les rayons extérieur et intérieur de la poutre sont 0.06 m et 0.04 m. Cette poutre a été considérée dans [13]. Pour ce cas test, la poutre est verticale et donc, la force de gravité est négligée au regard de la flexion de la poutre. Elle est soumise seulement à une force harmonique $F_0 \cos(\omega t)$ exercée au milieu de la poutre.

Le maillage contient 34 éléments de poutre de Bernoulli et 35 nœuds équidistants. Des butées sont ajoutées à chaque nœud avec un jeu $j_0 = 0.01$ m et la raideur de contact de chaque butée est régularisée par une loi arctan de mêmes paramètres que ceux considérés en Sec. 2. Ce système est considéré comme un modèle simplifié du système tiges-puits de forage. La poutre modélise des tiges et l'ensemble des butées représente des contacts éventuels entre la tige et un puits de rayon 0.07 m.

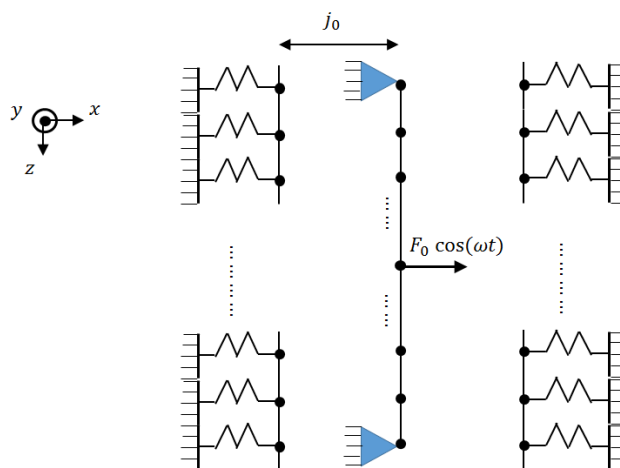


FIGURE 3 – Poutre en flexion soumise à une force harmonique avec butées.

L'équation dynamique discrétisée s'écrit comme $\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}_h(t)$ où $\boldsymbol{\delta} = [u_1, \theta_{y1}, u_2, \theta_{y2}, \dots, u_{35}, \theta_{y35}]^T$. u_i désigne le déplacement du nœud i selon la direction x et θ_{yi} est la rotation autour de l'axe y . \mathbf{M} et \mathbf{K} sont des matrices de masse et de raideur de la poutre. $\mathbf{C} = c_m\mathbf{M} + c_k\mathbf{K}$ représente l'amortissement de Rayleigh où $c_m = 0.03$ s⁻¹ et $c_k = 0$ s [13]. $\mathbf{F}_h(t)$ désigne la force harmonique appliquée au nœud central de la poutre.

On compare les résultats obtenus par des méthodes à pas constant et à pas adaptatif. La méthode NMM1 n'est pas considérée ici. Le résultat de référence est obtenu par RK4-1 pour un pas de temps très petit

$dt = 10^{-8}$ s. Le temps final de la simulation est 1 s. Le pas de temps initial des méthodes à pas adaptatif et le pas de temps des méthodes à pas constant sont 10^{-5} s.

3.1 Forces d'excitation à basses fréquences

On considère une force harmonique avec une amplitude de 300 N et une fréquence 2π rad/s. Cette force modélise un balourd de 7.6 kg.m. Deux raideurs de butée sont étudiées : $k_c = 10^6$ N/m et $k_c = 10^7$ N/m.

3.1.1 Butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m)

RK4-1 (s)	RK4-2 (s)	RK4-3 (s)	NM1 (s)	NM2 (s)	NMM2 (s)
1009.51	1.19	2.12	1036.11	0.61	0.42

TABLE 2 – Temps de calcul des méthodes pour le calcul dynamique d'une poutre en flexion soumise à une force harmonique à basse fréquence avec butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m). Dans le cas où le pas de temps est adaptatif, dt représente le pas de temps initial.

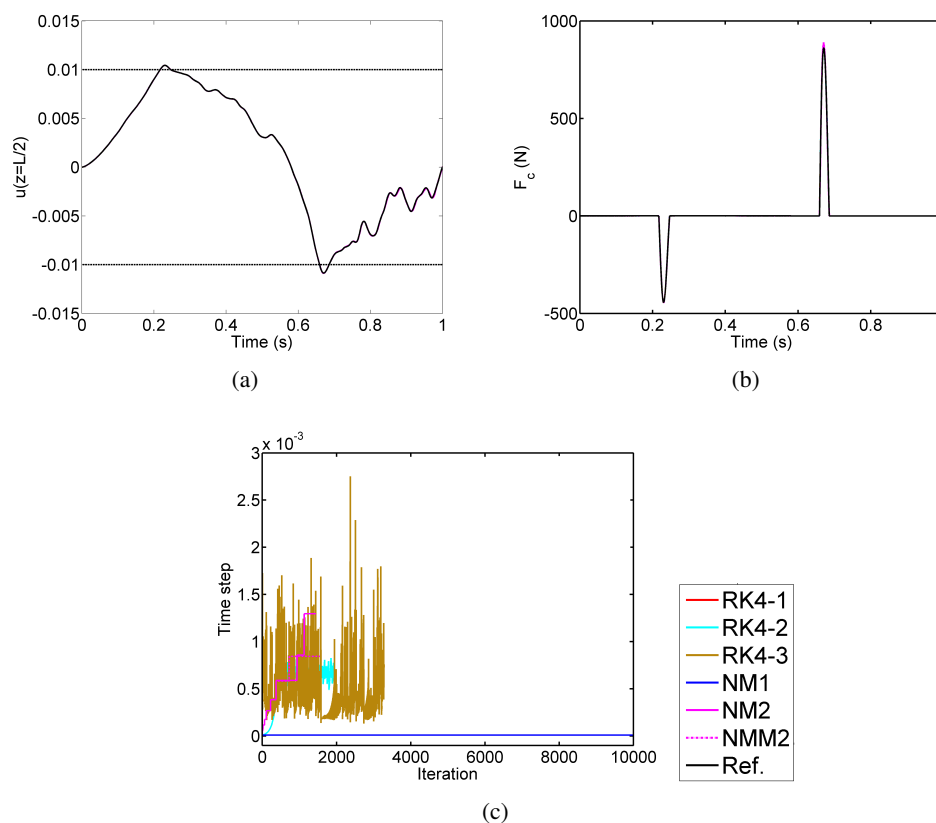


FIGURE 4 – (a) Déflexion (m), (b) force de contact au milieu de la poutre soumise à une force harmonique à basse fréquence avec butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m), (c) pas de temps (s) à chaque itération. Courbes noires : résultats de référence, lignes horizontales noires : jeu = 0.01 m.

Les butées de raideur $k_c = 10^6$ N/m sont considérées. Les paramètres de chaque méthode sont choisis après une étude des différentes valeurs des paramètres :

- RK4-2 : $\varepsilon_0 = 10^{-1}$, $a = 1.1$, $b = 1.01$

- RK4-3 : $\varepsilon_0 = 10^{-1}$, $s = 0.9$
- NM1 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$
- NM2 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$, $\eta_e = 10^{-2}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$
- NMM2 : $\eta_e = 10^{-2}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$

Le Tableau 2 récapitule les temps de calcul de chaque méthode. La Figure 4 représente la déflexion et la force de contact au milieu de la poutre ainsi que le nombre d'itérations utilisé par chaque méthode. Toutes les méthodes donnent des bons résultats. Les méthodes à pas adaptatif nécessitent moins d'itérations et donc réduisent largement le temps de calcul par rapport à des méthodes à pas constant. Les méthodes NM à pas adaptatif utilisent moins d'itérations que les méthodes RK4 à pas adaptatif et donnent un temps de calcul deux fois plus petits. Parmi ces méthodes, NMM2 montre une meilleure performance de calcul que les autres méthodes à pas adaptatif car elle utilise le moins d'itérations en donnant des résultats précis.

3.1.2 Butées 2 ($k_c = 10^7$ N/m)

RK4-1 (s)	RK4-2 (s)	RK4-3 (s)	NM1 (s)	NM2 (s)	NMM2 (s)
1036.57	1.31	1.67	1035.44	6.84	5.63

TABLE 3 – Temps de calcul des méthodes pour le calcul dynamique d'une poutre en flexion soumise à une force harmonique à basse fréquence avec butées 2 ($k_c = 10^7$ N/m). Dans le cas où le pas de temps est adaptatif, dt représente le pas de temps initial.

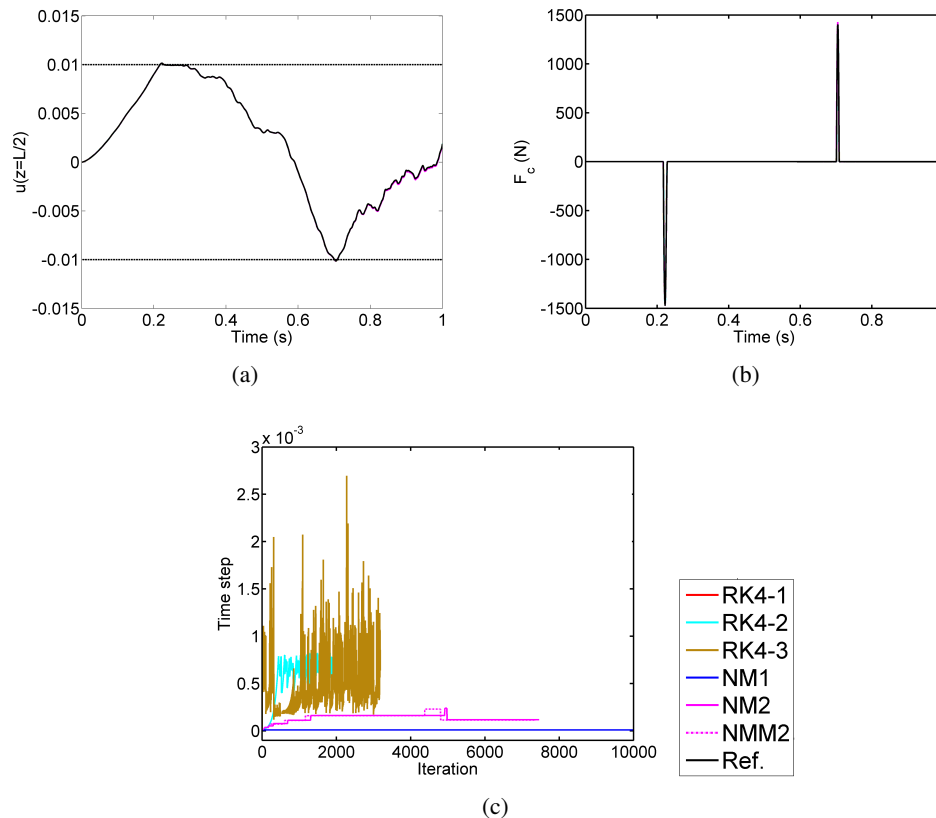


FIGURE 5 – (a) Déflexion, (b) force de contact au milieu de la poutre soumise à une force harmonique à basse fréquence avec butées 2 ($k_c = 10^7$ N/m), (c) pas de temps (s) à chaque itération. Courbes noires : résultats de référence, lignes horizontales noires : jeu = 0.01 m.

Les butées avec une raideur de contact plus grande ($k_c = 10^7$ N/m) sont considérées. Les paramètres de chaque méthode sont les mêmes que ceux considérés dans le cas précédent.

Le Tableau 3 récapitule les temps de calcul de chaque méthode. La Figure 5 représente la déflexion et la force de contact au milieu de la poutre et le nombre d'itérations utilisées par chaque méthode. En raison des raideurs de contacts plus raides, la forme de la déflexion du milieu de la poutre devient plus complexe que celle dans le cas des butées souples. Toutes les méthodes donnent des bons résultats. Les méthodes à pas adaptatif donnent des temps de calcul largement réduits par rapport à des méthodes à pas constant. Contrairement au cas des butées souples, les méthodes NM à pas adaptatif sont moins efficaces que les méthodes RK4 à pas adaptatif car elles nécessitent plus d'itérations et donc donnent des temps de calcul 7 fois plus grands que ceux des méthodes RK4-2 et RK4-3.

Pour une force d'excitation à basse fréquence, on trouve que les méthodes NM à pas adaptatif sont plus efficaces que des méthodes RK4 à pas adaptatif dans les problèmes de contact souple (ou problèmes linéaires). Comme la dynamique du train de tige de forage peut être considérée comme lente avec une vitesse de rotation d'ordre 100 tour/min (10 rad/s), la méthode NMM2 pourrait être intéressante à condition que le puits modélisé par des butées soit souple.

3.2 Forces d'excitation à moyennes fréquences

On considère une force harmonique avec une amplitude 30000 N et une fréquence de 20π rad/s. Cette force modélise le même balourd avec une vitesse de rotation dix fois plus rapide que celle en Sec. 3.1.

3.2.1 Butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m)

Les paramètres de chaque méthode sont choisis après une étude des différentes valeurs des paramètres :

- RK4-2 : $\varepsilon_0 = 10^{-2}$, $a = 1.1$, $b = 2$
- RK4-3 : $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, $s = 0.9$
- NM1 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$
- NM2 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$, $\eta_e = 10^{-3}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$
- NMM2 : $\eta_e = 10^{-3}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$

Le Tableau 4 récapitule les temps de calcul de chaque méthode. La Figure 6 représente la déflexion, la force de contact au milieu de la poutre et le nombre d'itérations utilisées par chaque méthode. Toutes les méthodes donnent des bons résultats. Les méthodes à pas adaptatif donnent des temps de calcul largement réduits par rapport à des méthodes à pas constant. Contrairement au cas de la force d'excitation à basse fréquence présentée en Sec. 3.1.1, les méthodes NM à pas adaptatif deviennent moins efficaces que des méthodes RK4 à pas adaptatif car elles utilisent plus d'itération que des méthodes RK4 à pas adaptatif et donc un temps de calcul 10 fois plus grands. Cette remarque montre que les méthodes RK4 à pas adaptatif donnent une meilleure performance de calcul pour une force d'excitation à fréquence plus élevée.

RK4-1 (s)	RK4-2 (s)	RK4-3 (s)	NM1 (s)	NM2 (s)	NMM2 (s)
1063.46	1.17	1.35	1031.88	12.04	10.31

TABLE 4 – Temps de calcul des méthodes pour le calcul dynamique d'une poutre en flexion soumise à une force harmonique à moyenne fréquence avec butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m). Dans le cas où le pas de temps est adaptatif, dt représente le pas de temps initial.

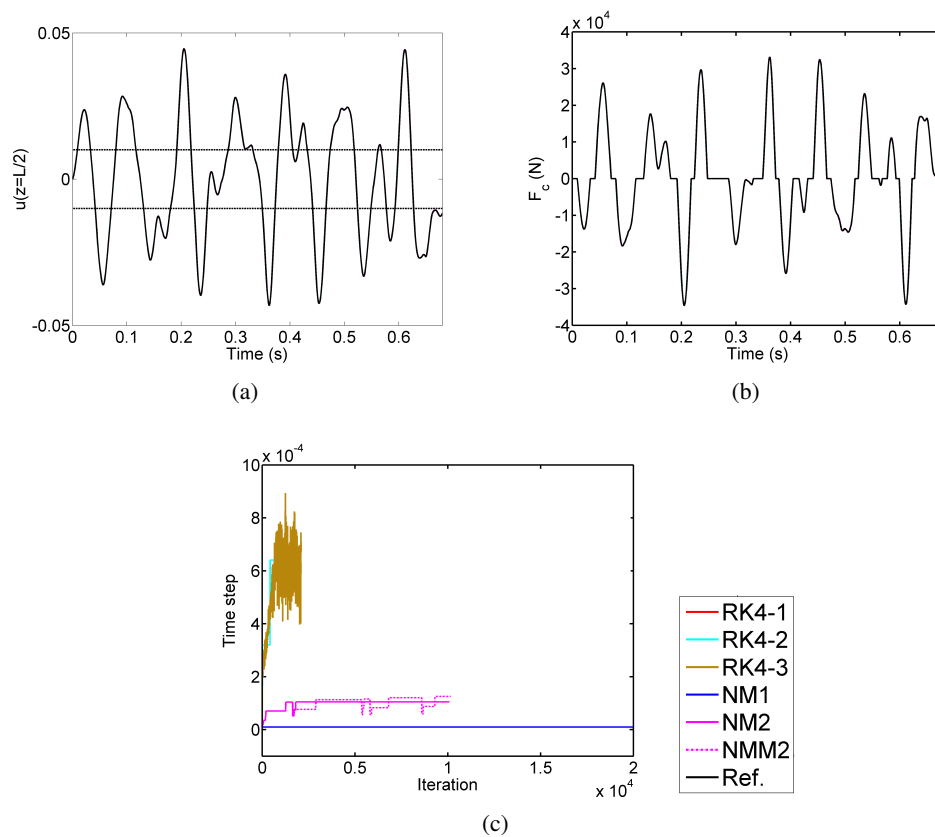


FIGURE 6 – (a) Déflexion, (b) force de contact au milieu de la poutre soumise à une force harmonique à moyenne fréquence avec butées 1 ($k_c = 10^6$ N/m), (c) pas de temps (s) à chaque itération. Courbes noires : résultats de référence, lignes horizontales noires : jeu = 0.01 m.

3.2.2 Butées 2 ($k_c = 10^7$ N/m)

Les paramètres de chaque méthode sont choisis après une étude des différentes valeurs des paramètres :

- RK4-2 : $\varepsilon_0 = 10^{-7}$, $a = 1.1$, $b = 2$
- RK4-3 : $\varepsilon_0 = 10^{-7}$, $s = 0.55$
- NM1 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$
- NM2 : $\varepsilon_r = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$, $i_{\max} = 10$, $\eta_e = 4 \times 10^{-5}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$
- NMM2 : $\eta_e = 4 \times 10^{-5}$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 4$

Le Tableau 5 récapitule les temps de calcul de chaque méthode. La Figure 7 représente la déflexion, la force de contact au milieu de la poutre et le nombre d'itérations utilisées par chaque méthode. À cause des contacts avec des butées plus raides, la forme de la déflexion au milieu de la poutre devient plus complexe que dans le cas précédent. Les méthodes à pas adaptatif donnent des calculs 2 ou 4 fois plus rapides que des méthodes à pas constant. La comparaison des Tableaux 5 et 3 montre que des méthodes à pas adaptatif nécessitent beaucoup plus de temps de calcul dans les problèmes dynamiques de moyennes fréquences que dans les problèmes dynamiques de basses fréquences. De plus, les méthodes NM à pas adaptatif sont moins efficaces que des méthodes RK4-2 et RK4-3 car elles donnent des mauvais résultats avec des temps de calcul plus grands.

RK4-1 (s)	RK4-2 (s)	RK4-3 (s)	NM1 (s)	NM2 (s)	NMM2 (s)
1055.51	230.53	276.73	1059.63	496.18	523.98

TABLE 5 – Temps de calcul des méthodes pour le calcul dynamique d'une poutre en flexion soumise à une force harmonique à moyenne fréquence avec butées 2 ($k_c = 10^7$ N/m). Dans le cas où le pas de temps est adaptatif, dt représente le pas de temps initial.

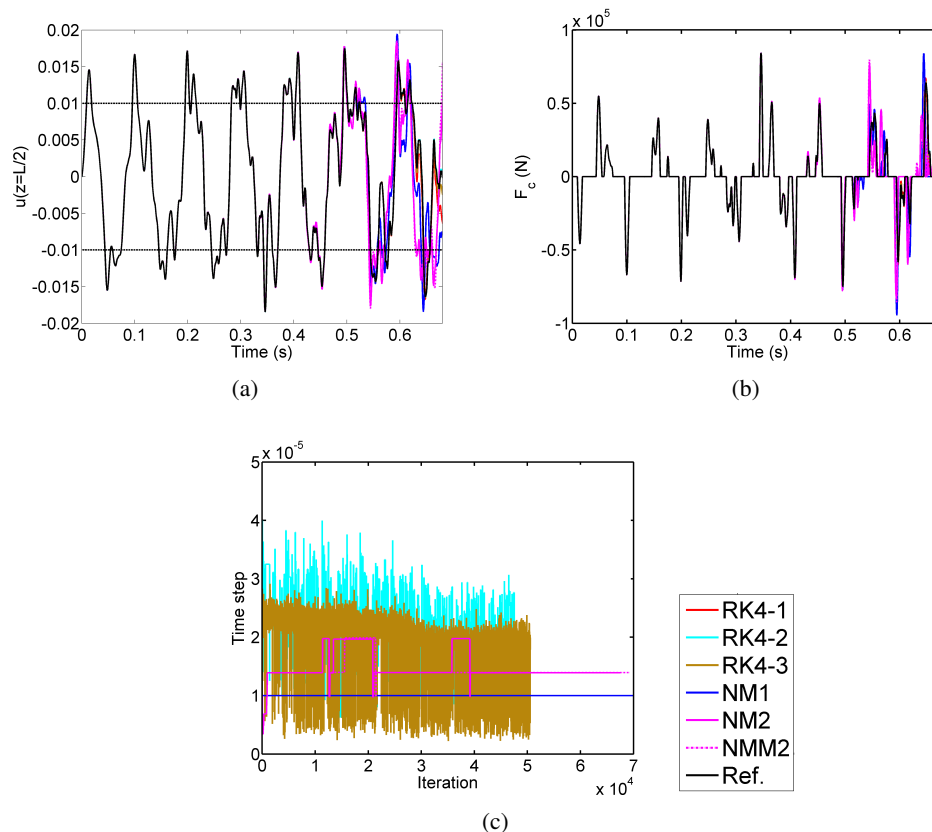


FIGURE 7 – (a) Déflexion, (b) force de contact au milieu de la poutre soumise à une force harmonique à moyenne fréquence avec butées 2, (d) pas de temps (s) à chaque itération. Courbes noires : résultats de référence, lignes horizontales noires : jeu = 0.01 m.

4 Conclusion

La version modifiée de la méthode NM (NMM1), qui permet d'éviter la boucle de Newton-Raphson, donne des résultats précis à condition que le pas de temps soit suffisamment petit. Cette méthode réduit le temps de calcul seulement un peu par rapport à des méthodes à pas constant classiques (RK4-1, NM1).

Des algorithmes à pas adaptatif améliorent largement le temps de calcul des méthodes d'intégration temporelle. La précision des résultats obtenus par des méthodes à pas adaptatif peut être améliorée en diminuant la valeur de ε_0 qui contrôle l'erreur de troncature pour RK4 et η_e pour l'erreur locale pour NM.

Pour les problèmes de contact raide avec des forces d'excitation à moyennes fréquences, les méthodes RK4 à pas adaptatif montrent une meilleure performance que des méthodes NM à pas adaptatif. La méthode NMM2 est la plus efficace pour des problèmes linéaires ou de contact souple avec des forces d'excitation à basses fréquences. Elle pourrait être donc utile pour la simulation de la dynamique du train

de tiges du forage qui présente souvent une vitesse de rotation faible d'ordre 100 tour/min à condition que le contact tige-puits soit souple.

Remerciements

Ces travaux sont menés dans le cadre du laboratoire commun Drillab soutenu avec la convention de soutien ANR (ANR 15-LCV4-0010-01). Les auteurs remercient l'Agence Nationale de la Recherche.

Références

- [1] Y. M. Xie, Assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations, *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) (1996) 321–331.
- [2] C. Runge, Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 46 (1895) 167–178.
- [3] W. Kutta, Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46 (1901) 435–453.
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Cambridge University Press, United States of America, 1992.
- [5] N. M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 85 (1959) 67–94.
- [6] M. Geradin, D. J. Rixen, *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*, Cambridge University Press, John Wiley & Son Ltd, 2015.
- [7] A. Ben-Israel, A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations, *Journal Of Mathematical Analysis and Applications*, 15 (1966) 243–252.
- [8] C. Duran, L. Manin, M-A. Andrianoely, C. Bordegaray, R. Dufour, An analysis of rotor-stator interaction, *IMEchE – VIRM10*, London, September 11-13, 2012.
- [9] C. Duran, *Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitouches rotor/stator*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2014.
- [10] O. C. Zienkiewicz, Y. M. Xie, A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis, *Earthquake engineering and structural dynamics*, 20 (1991) 871–887.
- [11] D. Kuhl, E. Ramm, Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 178 (1999) 343–366.
- [12] S. Krenk, *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures*, Cambridge University Press, 2009.
- [13] A. Cunha Jr, C. Soize, R. Sampaio, Exploring the nonlinear dynamics of horizontal drillstrings subjected to friction and shocks effects, *XXI Congress on Numerical Methods and thier Applications, Mecom - ENIEF 2014*, Sep 2014, Bariloche, Patagonia, Argentina, 2014, pp. 1–11.