

# Approche micromécanique pour une maçonnerie microfissurée en fluage

A. REKIK<sup>a</sup>

a. Univ. Orléans, INSA-CVL, PRISME, EA4229, 45072 Orléans, France  
amna.univ-orleans.fr

## Résumé :

*Dans ce papier on développe un modèle d'homogénéisation numérique pour la prédiction des propriétés effectives d'une maçonnerie viscoélastique microfissurée. Ce modèle repose sur deux étapes. La première consiste à déterminer la fonction de fluage à court et long termes. Cette étape repose sur le couplage entre la théorie de rupture fragile de Griffith et le schéma d'homogénéisation dilué (approche en contrainte). Elle permet d'avoir une expression analytique approchée de la fonction de fluage et d'éviter ainsi le recours à une inversion numérique de la transformée de Laplace-Carson. La deuxième étape estime, par la méthode des éléments finis, les propriétés globales orthotropes de la maçonnerie moyennant la technique d'homogénéisation périodique. Cette étape repose sur le calcul des tenseurs de concentration de contrainte dans chacune des phases (brique et mortier). Ce papier propose un modèle alternatif à une homogénéisation incrémentale de la maçonnerie qui est en général plus lourde à mettre en œuvre puisqu'elle dépend de paramètres supplémentaires tels que l'incrément de temps et les précontraintes dans les phases viscoélastiques. Dans cette étude, par souci de simplicité, seules des densités de fissures fonction du temps sont considérées à court et long termes.*

## Abstract :

*This paper provides finite element predictions for the effective properties of microcracked viscoelastic masonry. This model relies on two steps. The first one is based on the identification at the short and long terms of an approximate analytical creep function for the mortar. This step rests on the coupling between the Griffith's brittle fracture theory and stress-based dilute homogenization scheme. It allows to avoid recourse to 'heavy' numerical inversion of the Laplace-Carson transform. The second step provides orthotropic overall properties of masonry by means of finite elements method used to carry out periodic homogenization on masonry. This step relies on the calculation of the localization strain tensors in each phase (brick and mortar). This paper proposes an alternative model to an incremental homogenization of masonry which is heavier to carry out since it depends on additional parameters such as time increment and prestresses in viscoelastic phases. In this work, for the sake of simplicity and as a first approach, only time-dependent crack densities [27, 22] are considered at short and long-terms.*

**Mots clefs : Maçonnerie ; Fluage ; Microfissures ; Homogénéisation ; Éléments finis.**

# 1 Introduction

L'effondrement récent de célèbres monuments historiques (bâtiments maçonnés datant du moyen âge par exemple) a été principalement attribué au comportement de fluage de la maçonnerie [2, 21, 27]. Des observations expérimentales récentes ont montré que l'accumulation de dommages induits par le fluage sous charges constantes peut être l'origine de cet effondrement. Ainsi, afin d'augmenter la résistance et la durabilité des monuments historiques soumis à des chargements sévères, le développement de modèles théoriques et numériques permettant la prévision de l'évolution du fluage en fonction du dommage cumulé dans le temps est d'une importance cruciale.

Une étude expérimentale [8] a été menée afin d'étudier le fluage de la maçonnerie. Différents modèles rhéologiques sont considérés pour évaluer leurs capacités à prédire le fluage de la maçonnerie. Selon cette étude, le modèle de Maxwell modifié (MM) est le plus précis. D'autre part, ces matériaux sont généralement hétérogènes composés de briques et de joints de mortier. Par conséquent, l'évaluation de leurs réponses requière le recours à des approches d'homogénéisation. A cet égard, les approches héréditaires basées sur la convolution de Stieltjes dans le domaine temporel ont été utilisées par de nombreux chercheurs pour la modélisation de composites viscoélastiques linéaires non vieillissants. Trois étapes sont effectuées. Tout d'abord, grâce au principe de correspondance [18] via l'application de la transformée de Laplace-Carson, les relations constitutives des propriétés locales des phases fonctions du temps sont transformées en relations élastiques dans le domaine symbolique de Laplace-Carson. Ensuite, les modules élastiques macroscopiques symboliques du matériau élastique fictif sont obtenus en appliquant des schémas micromécaniques linéaires classiques tels que le schéma auto-cohérent [26], l'estimation de Mori-Tanaka [17] ou les bornes de Hashin-Shtrikman [9]. Enfin, les propriétés globales du composite viscoélastique sont déterminées dans le domaine physique par l'inversion de la transformée de Laplace-Carson. Comme mentionné dans le chapitre précédent, à part certains cas particuliers [26], l'inversion de la transformée de Laplace-Carson est généralement effectuée numériquement. En outre, il est intéressant de noter que la méthode d'analyse basée sur l'intégrale de Bromwich définie dans le plan complexe [1] conduit la plupart du temps à des équations intégrales sur l'ensemble du trajet de chargement. Ce dernier point rend difficile l'extension directe à des situations plus générales (chargement thermomécanique, viscoélasticité avec vieillissement). En plus, ces méthodes nécessitent de retenir l'histoire complète des contraintes et de déformations. Pour surmonter cette limitation, un certain nombre de théories visant à formuler des équations constitutives incrémentales pour le comportement viscoélastique linéaire ont été proposées. Parmi ces approches, les travaux [10, 5] ont proposé une formulation incrémentale et la résolution des équations constitutives par la méthode des éléments finis. Dans le cadre de la mécanique de rupture des matériaux viscoélastiques, Dubois et al. [11] et Nguyen et al. [19] ont adopté une formulation incrémentale afin d'évaluer le processus de croissance des fissures pour le bois et le béton, respectivement.

En ce qui concerne la prise en compte des effets combinés d'endommagement et de fluage pour la maçonnerie moyennant les techniques d'homogénéisation, peu de travaux ont été consacrés à ces aspects. On peut citer par exemple les travaux de Brooks [4] qui a obtenu les coefficients de fluage de la maçonnerie connaissant les propriétés mécaniques de ses constituants. Cecchi et Tralli [7] ont adopté une procédure d'homogénéisation asymptotique pour la dérivation du comportement en fluage d'une cellule périodique de maçonnerie saine avec des joints de dimensions finies. Pour une maçonnerie non fissurée, Cecchi et Taliervo [6] ont comparé les prédictions obtenues par un modèle analytique simplifié et un modèle plus précis basé sur la méthode des éléments finis, tous deux basées sur des procédures d'ho-

mogénéisation. Nguyen et al. [20] ont obtenu le comportement effectif de béton viscoélastique linéaire microfissuré obéissant au modèle de Burgers en effectuant une combinaison entre la théorie de Griffith [16] et l'homogénéisation basée sur la théorie d'Eshelby [3, 12]. Dans [19], comme le béton à l'état sain, le béton microfissuré est supposé obéir au modèle de Burgers. L'homogénéisation numérique par la méthode des éléments finis classiquement utilisée pour les maçonneries élastiques ou viscoélastiques saines (non fissurées) est étendue ici aux maçonneries viscoélastiques microfissurées.

## 2 Fonction de fluage effective du mortier microfissuré viscoélastique non-vieillissant (étape-1)

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER) occupant le domaine  $\Omega$  et constitué d'un matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant et d'un ensemble de fissures ayant chacune la forme d'un disque. Contrairement au modèle 3D avec des fissures ellipsoïdales considérées dans l'approche d'Eshelby, une fissure en forme de disque nous conduit à considérer un problème 2D pour lequel il est possible de définir un rapport de forme  $w$  [14]. Par la suite, on adopte un chargement en déformation homogène sur le bord  $\partial\Omega$  du (VER). Le déplacement appliqué sur  $\partial\Omega$  est ainsi donné par  $u(z, t) = \bar{\varepsilon}(t) \cdot z$  où  $\bar{\varepsilon}(t)$  désigne le tenseur des déformations macroscopiques. Ce dernier est donné par la formule suivante fonction des déformations microscopiques et du saut de déplacement :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega} \left( \int_{\Omega_s} \varepsilon d\Omega + \sum_i \int_{C_i} [u]_i \otimes^s n_i dS \right) \quad (1)$$

où  $\Omega_s$  est le domaine de la matrice sans fissures et  $a \otimes^s b = \frac{a \otimes^t b + b \otimes^t a}{2}$  pour 2 vecteurs quelconques  $a$  et  $b$ .  $C_i$  et  $n_i$  désignent respectivement les lèvres de la  $i^{\text{ème}}$  fissure et le vecteur normal à son plan. Pour une matrice à comportement élastique linéaire et des fissures libres de chargement, le tenseur de contrainte macroscopique du matériau microfissuré est donné par  $\Sigma = \langle \sigma \rangle_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_s} \sigma d\Omega = \tilde{C} : \bar{\varepsilon}$ .

### 2.1 Couplage entre l'homogénéisation et la théorie de rupture fragile

La transformée de Laplace-Carson appliquée à la déformation effective (1) permet d'écrire :

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{1}{\Omega} \left( \int_{\Omega_s} \varepsilon^* d\Omega + \sum_i \int_{C_i} [u]_i^* \otimes^s n_i dS \right) = C^{*-1} : \Sigma^* + \frac{1}{\Omega} \sum_i \int_{C_i} [u]_i^* \otimes^s n_i dS \quad (2)$$

Pour le schéma dilué [13], le saut de déplacement  $[u]_i$  est linéairement lié au champ de contrainte macroscopique  $\Sigma$ . En effet, le saut de déplacement normal des lèvres d'une fissure (en mode I) dans une matrice infinie soumise à une contrainte macroscopique isotrope à l'infini  $\Sigma^* = \Sigma^* i$  est donné par :

$$[u_n]^* = \frac{4(1 - \nu_s^*) \Sigma^*}{\pi \mu_s^*} \sqrt{l^2 - \rho^2}. \quad (3)$$

où  $\nu_s$  et  $\mu_s$  sont respectivement le coefficient de Poisson et module de cisaillement de la matrice,  $l$  est le rayon de la fissure,  $\rho$  désigne la position d'un point  $M$  appartenant au plan de la fissure et  $\nu_s^* = \frac{3k_s^* - 2\mu_s^*}{6k_s^* + 2\mu_s^*}$

est le coefficient de Poisson symbolique de la matrice saine. Les modules  $k_s^*$  et  $\mu_s^*$  sont donnés par

$$\frac{1}{k_s^*} = \frac{1}{\left(k_R + \frac{pk_M\eta_M^s/3}{k_M+p\eta_M^s/3}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_s^*} = \frac{1}{\left(\mu_R + \frac{p\mu_M\eta_M^d/2}{\mu_M+p\eta_M^d/2}\right)}. \quad (4)$$

Le saut de déplacement tangentiel (en mode  $II$ ) sous un chargement de cisaillement asymptotique  $\Sigma^* = \Sigma^* n \otimes^s t$  pour un vecteur  $t$  parallèle au plan de la fissure est donné par :

$$[u_t]^* = \frac{4(1-\nu_s^*)}{\pi(2-\nu_s^*)} \frac{\Sigma^*}{\mu_s^*} \sqrt{l^2 - \rho^2}. \quad (5)$$

**Module de compressibilité effectif symbolique** Sous un chargement isotrope ( $\Sigma^* = \Sigma^* i$ ,  $i$  est le tenseur identité d'ordre deux), la contribution d'une fissure est purement normale ( $[u]^* = [u_n]^* n$  où  $n$  est un vecteur normal au plan de la fissure). L'intégration de (3) sur  $C_i$  donne :

$$\int_{C_i} [u_n]_i^* \otimes^s n_i dS = \frac{8l^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*} n \otimes n \quad (6)$$

En supposant que toutes les fissures possèdent le même rayon  $l$ , l'intégration sur toutes les orientations sur la sphère unité donne la contribution totale de la fissure :

$$\frac{1}{\Omega} \sum_i \int_{C_i} [u_n]_i^* \otimes^s n dS = \frac{8l^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*} \int_{|n|=1} n \otimes n \frac{dS}{4\pi} = \frac{8Nl^3}{9} \frac{\Sigma^*(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*} i \quad (7)$$

où  $N$  désigne le nombre de fissures par unité de volume. La combinaison des relations (2) et (7) définit l'équation d'état effectif sous chargement isotrope :

$$\bar{\varepsilon}^* = C^{*-1} : (\Sigma^* i) + \frac{8d_c}{9} \frac{\Sigma^*(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*} i \quad (8)$$

pour la variable d'endommagement  $d_c = Nl^3$  [14]. Enfin, puisque  $\text{trace}(\bar{\varepsilon}^*) = \frac{\Sigma^*}{\bar{k}_{DL}^*} = \left(\frac{1}{k_s^*} + \frac{8d_c}{3} \frac{(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*}\right) \Sigma^*$  alors  $\frac{1}{\bar{k}_{DL}^*} = \frac{1}{k_s^*} + \frac{8d_c}{3} \frac{(1-\nu_s^*)}{\mu_s^*}$ , ou d'une manière équivalente

$$\frac{1}{\bar{k}_{DL}^*} = \frac{1 + d_c Q^*}{k_s^*} \quad \text{avec} \quad Q^* = \frac{16}{9} \frac{(1-\nu_s^{*2})}{(1-2\nu_s^*)} \quad (9)$$

**Module de cisaillement effectif symbolique** Sous l'action d'un chargement déviatorique pour lequel la contrainte macroscopique est  $\Sigma^* = \Sigma^*(e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3)$ , la contribution d'une fissure est obtenue à partir des équations (3) et (5) en fonction de son orientation. Dans le système de coordonnées sphérique  $(r, \theta, \Phi)$ , le saut de déplacement s'écrit

$$[u]^* = \frac{\Sigma^*(1-\nu_s^*)}{\pi\mu_s^*} \left( X_r e_r + \frac{2}{2-\nu_s^*} (X_\theta e_\theta + X_\Phi e_\Phi) \right) \sqrt{l^2 - \rho^2} \quad (10)$$

si le vecteur normal  $n$  coïncide avec le vecteur radial unitaire  $e_r$ . L'intégration sur toutes les orientations de fissures sur la sphère unité conduit à :  $\frac{1}{\Omega} \sum_i \int_{C_i} [u]_i^* \otimes^s n_i dS = \frac{d_c M^*}{2\mu_s^*} \Sigma^*$  où  $M^* = \frac{32}{45} \frac{(1-\nu_s^*)(5-\nu_s^*)}{2-\nu_s^*}$ .

Par conséquent et d'après (2), le module de cisaillement effectif s'écrit

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_{DL}^*} = \frac{1 + d_c M^*}{2\mu_s^*} \quad (11)$$

## 2.2 Approximation par le modèle rhéologique de Maxwell modifié

Étant donné que les expressions (9) et (11) ne peuvent pas être satisfaites de façon exacte, il a été proposé dans [36] d'identifier la meilleure approximation du comportement effectif selon le modèle de Burgers si le béton à l'état sain suit le même modèle. Par analogie, on propose dans cette étude d'approcher le comportement effectif du mortier microfissuré par le modèle (MM) si la matrice à l'état sain suit le modèle (MM). L'idée consiste à développer en série les estimations diluées des modules de compressibilité (9) et de cisaillement (11) au premier ordre aux voisinage de 0 ( $p \rightarrow 0$ ) et à l'infini ( $p \rightarrow \infty$ ) et de se servir des approximations  $\frac{1}{k_{DL}^*} \approx \frac{1}{k_{MM}^*}$  et  $\frac{1}{\tilde{\mu}_{DL}^*} \approx \frac{1}{\tilde{\mu}_{MM}^*}$  qui permettent l'identification des six paramètres suivants du modèle de (MM)

$$\begin{aligned} k_R(d_c) &= \frac{k_R}{1+d_c Q_0^0}, & \mu_R(d_c) &= \frac{\mu_R}{1+d_c M_0^0} \\ k_M(d_c) &= \frac{k_M+k_R}{1+d_c Q_0^0} - \frac{k_R}{1+d_c Q_0^0}, & \eta_M^s(d_c) &= \frac{(\eta_M^s+d_c(\eta_M^s Q_0^0-3k_R^e Q_0^1))}{(1+d_c Q_0^0)^2} \\ \mu_M(d_c) &= \frac{\mu_M+\mu_R}{1+d_c M_0^0} - \frac{\mu_R}{1+d_c M_0^0}, & \eta_M^d(d_c) &= \frac{\eta_M^d+d_c(\eta_M^d M_0^0-2\mu_R M_0^1)}{(1+d_c M_0^0)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

où les coefficients  $Q_0^0$ ,  $Q_0^1$ ,  $M_0^0$ ,  $M_0^1$ ,  $Q_\infty^0$  et  $M_\infty^0$  sont donnés dans [25]. Les temps caractéristiques des parties sphérique et déviatorique du modèle de Maxwell modifié pour le mortier viscoélastique fissuré sont  $\tau_{MM}^s(d_c) = \frac{\eta_M^s(d_c)(k_R(d_c)+k_M(d_c))}{3k_R(d_c)k_M(d_c)}$  et  $\tau_{MM}^d = \frac{\eta_M^d(d_c)(\mu_R(d_c)+\mu_M(d_c))}{2\mu_R(d_c)\mu_M(d_c)}$ . La fonction de fluage approchée du mortier fissuré est :

$$J_{MM}^{app}(t, d_c) = \frac{1}{9k_R(d_c)} \left( 1 - \frac{k_M(d_c)}{(k_R(d_c) + k_M(d_c))} e^{-\frac{t}{\tau_{MM}^s(d_c)}} \right) + \frac{1}{3\mu_R(d_c)} \left( 1 - \frac{\mu_M(d_c)}{(\mu_R(d_c) + \mu_M(d_c))} e^{-\frac{t}{\tau_{MM}^d(d_c)}} \right) \quad (13)$$

## 3 Homogénéisation périodique de la maçonnerie viscoélastique micro-fissurée (étape-2)

Au lieu de différencier la loi constitutive du mortier comme cela peut être fait en appliquant une procédure d'homogénéisation incrémentale [20], il est plus facile et pratique de considérer la fonction de fluage du mortier approchée (13) à court et long termes. Celle-ci est fonction explicite des paramètres temps et de la densité de fissures. Par conséquent, il n'y a pas de pré-contrainte dans le mortier viscoélastique considéré. A chaque instant  $t$ , le comportement de la phase viscoélastique  $r$  peut être considéré comme étant "purement élastique" avec un coefficient de Poisson et un module d'Young ( $E^r(t, d_c) = 1/J^r(t, d_c)$  si le mortier est endommagé et  $E^r(t, d_c) = 1/J^r(t)$ , sinon) constants. De plus puisque la maçonnerie présente une microstructure régulière, il est possible de ne considérer qu'une cellule périodique comme indiqué à la Figure (1)-a. On peut ainsi appliquer la technique d'homogénéisation périodique pour reproduire le comportement local et global de la maçonnerie.

Pour évaluer les "constantes ingénieurs élastiques" effectives, cette cellule est soumise à trois types de charges : compression axiale selon la direction  $n$ , compression axiale parallèlement à  $t$  et charge de cisaillement. Le code de calcul EF Cast3M a été utilisé pour calculer les champs mécaniques locaux et

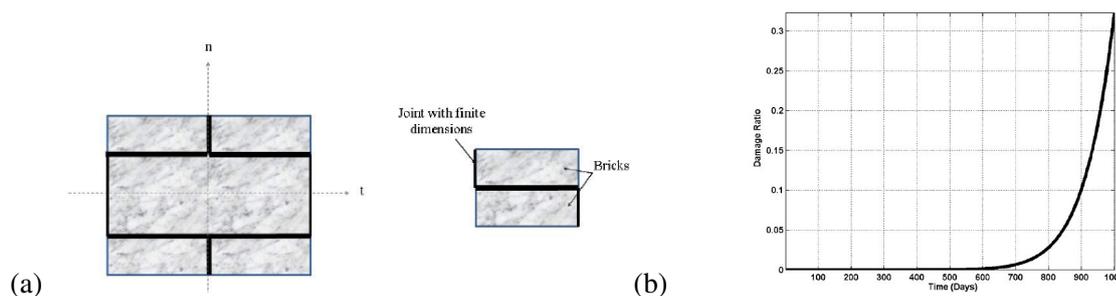


FIGURE 1 – Cellule de maçonnerie périodique avec des joints de dimensions finies constitués de mortier viscoélastique micro-fissuré et son quart (a) considéré pour la modélisation avec une évolution temporelle non linéaire de l’endommagement accumulé (14) [28] (b) dans les joints.

les champs mécaniques moyens par phase.

## 4 Application du modèle proposé

### 4.1 Densité de fissure

Différents modèles d’endommagement sont proposés dans la littérature. Par souci de simplicité et comme première approche, nous avons choisi pour la micro-fissure une loi d’évolution simple proposée par Shrive et al. [28] et Reda Taha et al. [22]. Selon ces travaux, le dommage accumulé est supposé suivre le critère de rupture de Weibull selon la formule

$$d_c(t) = \sum_{t_0}^t \frac{100\eta}{\tau_D} \left( \frac{t}{\tau_D} \right)^n \quad (14)$$

où  $\tau_D$  est un temps d’endommagement constant qui désigne l’instant à partir duquel la plupart des dommages se produiraient. Ces dommages non liés à des charges extérieures appliquées peuvent être induits par des effets externes ou internes tels que le gel-dégel, la réaction alcaline, ou l’attaque au sulfate, etc. Ce modèle indépendant de la charge est conforme aux résultats de Verstryngge et al. [30] et Garavaglia et al. [15] qui ont montré que le critère de rupture de Weibull (‘Weibull failure rate function’) pourrait être utilisé avec succès pour prédire la rupture de la maçonnerie. En première approche et selon un scénario de dommage considéré par Shrive et al. [28], les coefficients pris ici sont :  $\tau_D = 800$  (jours),  $\eta = 0,3$  (jours), et  $n = 10$ . La variable  $d_c(t)$  représente le niveau de dommage accumulé à partir de l’instant d’initiation des dommages  $t_0$  jusqu’au moment de l’évaluation.

### 4.2 Cas de cellule périodique avec propriétés de mortier identifiées à court et long termes

Cette partie a pour objectif d’étudier les évolutions par rapport au temps des prédictions globales issues du modèle numérique proposé pour une cellule périodique de maçonnerie et leur sensibilité aux épaisseurs du joint de mortier et dimensions de briques (hauteur et largeur). Le mortier microfissuré suit le modèle de MM. Dans cette étude, les briques sont supposées rigides ( $E_b = 1000E_m(t = 0)$ ) ou élastiques ( $E_b = 2,22E_m(t = 0)$ ) et non fissurées avec un coefficient de Poisson  $\nu_b = 0,15$ . Les briques ont une épaisseur de 250 mm. Leurs dimensions dans le plan (x, y) sont les suivantes : hauteur  $a = 55$  mm, largeur  $b = 120$  mm. L’épaisseur du joint de mortier est  $th = 10$  mm. Pour le modèle rhéologique vis-

	$E_0$ (MPa)	$\nu_m$	$e_i$	$\tau_M$ (jours)
Mortier	7700	0,2	0,7602	7,1

TABLE 1 – Modules élastique et visqueux de mortier identifiés à court terme par Brooks et al. [4, 6].

queux, le module d'Young instantané  $E_0$  pour le modèle de MM est donné par  $E^m(t=0) = E^R + E^M$  où  $E^M = e_i E_0$  ( $e_i$  est un scalaire sans dimension) est le module de relaxation et  $E^R = (1 - e_i)E_0$  est le module d'Young du ressort.

Dans la suite, tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel Cast3M sous l'hypothèse de contrainte plane avec des éléments de maillage quadratique de type 'QUA8' avec 8 nœuds et un maillage raffiné constitué de 10336 éléments. Ce maillage fin est choisi de sorte qu'il fournisse des résultats effectifs précis. Puisque nous étudions le phénomène de fluage de la maçonnerie, nous appliquons instantanément une force constante à des points sélectionnés aux bords de la cellule (comme la contrainte macroscopique est constante). Pour un joint de mortier épais  $th = 10$  mm avec des propriétés identifiées à court terme (tableau (1)) et long termes (tableau (2)), les évolutions temporelles des coefficients effectifs de fluage fournis par le modèle numérique proposé pour des maçonneries avec des briques rigides et un mortier fissuré avec une densité de fissures évoluant selon la loi (14) sont reportées sur la figure (2). La sensi-

$E_M$ (MPa)	$\tau_M$ (s)	$E_R$ (MPa)	$\tau_R$ (s)	$\nu_m$
4000	$2 \times 10^8$	2112	300000	0,29

TABLE 2 – Modules élastique et visqueux d'un mortier hybride identifiés à long terme [29].

bilité de ces modules aux différents paramètres géométriques : épaisseur de mortier ( $th \in \{4, 7, 10\}$  mm), hauteur ( $a \in \{40, 55, 70\}$  mm) et largeur de brique ( $b \in \{100, 120, 140\}$  mm) est représentée respectivement sur les Figures (6)-(8) [25]. Une étude similaire est réalisée pour la maçonnerie avec des briques élastiques et un mortier microfissuré (voir Annexes (B) et (C) dans [25]). Le Tableau (3) montre la diminution des modules d'Young du mortier avec le temps et la densité de fissures que ce soit pour des propriétés identifiées à court ou long termes.

$t$ (jours)	0	50	350	450	650	850	900	950
$d_c$	0	$3.4 \times 10^{-14}$	$9.6 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-4}$	0.0047	0.0687	0.1217	0.21
$E_j$ (court terme) (MPa)	7700	2148.2	1846.4	1846.1	1831.1	1783.9	1517.1	1345.1
$E_j$ (long terme) (MPa)	6112	6027.1	5574.5	5441.2	5158.94	4454.4	4074.44	3580.6

TABLE 3 – Module d'Young du mortier pour différentes densités de fissures évoluant selon la loi (14).

### 4.3 Résultats

Dans l'ensemble, nous constatons que les prédictions des modules effectifs de la maçonnerie issues du modèle proposé diminuent quand le temps croît. Ceci est dû à l'augmentation du niveau d'endommagement au cours du temps comme cela est illustré par la figure (1)-b. Pour la maçonnerie avec des propriétés de mortier identifiées à court terme et des briques élastiques (Figure (18)) [25] ou rigides (Figure (2)), les modules effectifs de la maçonnerie diminuent de manière significative au cours des cinquante premiers jours. Ceci est cohérent avec la diminution significative du module d'Young du mortier

comme cela est illustré dans le Tableau (3) (colonne "court terme"). Durant toute la période considérée ( $[0, 950]$  (jours)), après près de 100 jours, la diminution des modules effectifs est lente comme observé pour des maçonneries avec des propriétés de mortier identifiées à long terme. En outre, les maçonneries avec briques rigides ( $E_b = 1000E_m(t = 0)$ ) montrent une anisotropie prononcée contrairement à une maçonnerie avec des briques élastiques ( $E_b = 2,22E_m(t = 0)$ ) pour laquelle les modules effectifs  $\tilde{E}_{xx}$  et  $\tilde{E}_{yy}$  sont proches à long terme (voir Figure (18)-b dans [25]). Dans la suite, seule l'intervalle de temps

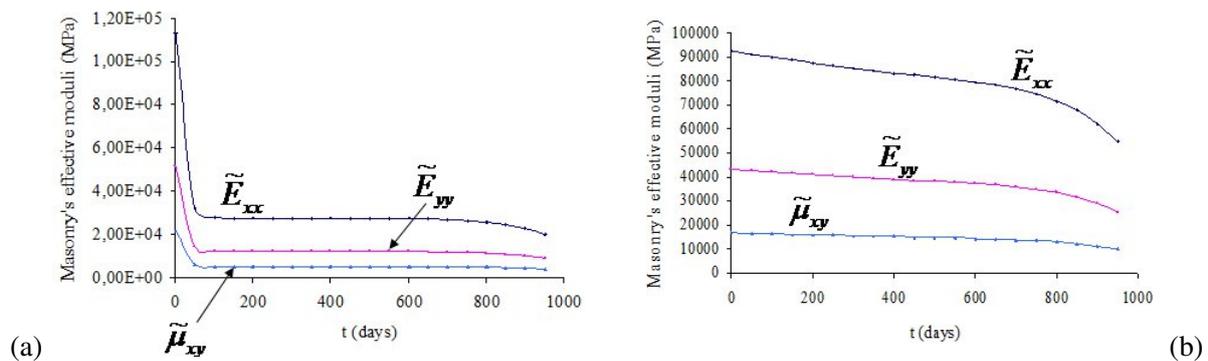


FIGURE 2 – Evolutions des modules effectifs prédits par le modèle EF pour une maçonnerie avec des briques rigides ( $E_b = 1000E_m(t = 0)$ ), épaisseur de joint  $th = 10$  mm et propriétés du mortier identifiées à court (a) et long (b) termes.

$[600, 950]$  (jours) est considéré puisque la densité de fissure est presque négligeable pour la période de temps  $[0, 600]$  (jours) (voir tableau (3)).

Le Tableau (3) résume les tendances d'évolution des modules effectifs de maçonnerie microfissurée en faisant varier l'un des paramètres suivants : épaisseur du mortier, hauteur ou largeur de brique. Ces résultats permettent de conclure que les prédictions effectives du modèle numérique proposé sont dans l'ensemble plus sensibles à la variation de la hauteur de brique et principalement à la diminution des épaisseurs de joints de mortier pour des briques élastiques ou rigides. En effet, la plus faible valeur de hauteur de brique conduit à la plus basse rigidité de maçonnerie. En outre, la plus faible épaisseur de mortier fournit la maçonnerie la plus rigide principalement pour le cas de briques rigides. Enfin, il n'y a pas grand profit d'augmenter la largeur  $b$  de briques puisque cela induit une légère augmentation des modules  $\tilde{E}_{yy}$  et  $\tilde{\mu}_{xy}$ .

Paramètre	Brique	$\tilde{E}_{xx}$	$\tilde{E}_{yy}$	$\tilde{\mu}_{xy}$
Épaisseur du joint	Rigide	↗ pour $th$ ↘	↗ pour $th$ ↘	↗ pour $th$ ↘
	Elastique	faible ↗ pour $th$ ↘	↗ pour $th$ ↘	↗ pour $th$ ↘
Hauteur de brique	Rigide	sans effet	↗ pour $a$ ↗	↗ pour $a$ ↗
	Elastique	↗ pour $a$ ↗	↗ pour $a$ ↗	faible ↗ pour $a$ ↗
Largeur de brique	Rigide	↗ pour $b$ ↗	sans effet	faible ↗ pour $b$ ↗
	Elastique	↗ pour $b$ ↗	~ sans effet	faible ↗ pour $b$ ↗

FIGURE 3 – Sensibilité aux différents paramètres (épaisseur de mortier  $th$ , dimensions de briques) des évolutions temporelles des modules effectifs de la maçonnerie prédites par le modèle EF. Cas d'une maçonnerie avec un mortier microfissuré ayant des propriétés visqueuses identifiées à long terme (table (2)).

## 5 Conclusion

Ce chapitre étend la technique d'homogénéisation périodique menée à l'aide de la méthode des éléments finis aux maçonneries viscoélastiques microfissurées. Ce modèle fournit des propriétés effectives orthotropes pour la maçonnerie à court et long termes. La précision de ce modèle est fonction des deux facteurs : (i) des erreurs numériques fonction du raffinement du maillage de la cellule périodique (étape-2) et (ii) le choix du schéma d'homogénéisation en champs moyens utilisé pour évaluer le comportement du mortier microfissuré. L'un des avantages de ce modèle est le non recours à l'inversion de la transformée de Laplace-Carson lors de l'évaluation du comportement en fluage du mortier (à court et long termes). Ce travail propose une alternative à une homogénéisation incrémentale qui nécessite la prise en compte de paramètres supplémentaires, tels que l'incrément de temps et les tenseurs de polarisation dans les phases viscoélastiques.

## Références

- [1] Beurthey, S., Zaoui, A., Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *European Journal of Mechanics A/Solids* 19, 1–16 (2000)
- [2] Binda, L., Gatti, G., Mangano, G., Poggi, C., Sacchi-Landriani, G., The collapse of civic tower of Pavia, *Masonry International*, 6(1), 11–20 (1992).
- [3] Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques, Hermès science (2001)
- [4] Brooks, J. J., Composite modeling of masonry deformation, *Materials & Structures*, 23, 241–251 (1990)
- [5] Chazal, C., Moutu Pitti, R., A new incremental formulation for linear viscoelastic analysis : creep differential approach, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 47, 2, 397–409 (2009)
- [6] Cecchi, A., Taliercio, A., A comparison between numerical and analytical homogenized models for visco-elastic brickwork, XXI Congresso AIMETA Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, (Torino, Italy), 1–10, (2013)
- [7] Cecchi, A., Tralli, A., A homogenized viscoelastic model for masonry structures, *International Journal of Solids and Structures* 49, 1485–1496 (2012)
- [8] Choi, K. K., Lissel, S. L., Taha, M. M. R., Rheological modelling of masonry creep, *Canadian Journal of Civil Engineering* 34, 1506–1517 (2007)
- [9] DeBotton, G., Tevet-Deree, L., The response of a fiber-reinforced composite with a viscoelastic matrix phase *J. Compos. Mater.*, 38, 1255–1277 (2004)
- [10] Dubois, F., Chazal, C., Petit, C., A finite element analysis of creep-crack growth in viscoelastic media, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2, 269–286 (1999)
- [11] Dubois, F., Chazal, C., Petit, C., Viscoelastic crack growth process in wood timbers : An approach by the finite element method for mode I fracture, *International Journal of Fracture*, 113, 367–388 (2002)
- [12] Deudé, V., Dormieux, L., Kondo, D., Pensée, V., Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésosfissuré, *Comptes Rendus Mécanique* 330 (8), 587–592 (2002)

- [13] Dormieux L., Kondo D., Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : the case of cracked media with unilateral effects. *Computational Materials Science* 46 (1), 173–179 (2009) black
- [14] Dormieux, L., Kondo, D., Ulm F.-J., *MicroporoMechanics*, John Wiley & Sons (2006) black
- [15] Garavaglia, E., Gianni, A., Molina, C., Reliability of porous materials : two stochastic approaches, *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, 16 (5), 419-426 (2004)
- [16] Huy Duong, B., *Mécanique de la rupture fragile*, Édition Masson (1978)
- [17] Li, J., Weng, G. J., Strain-rate sensitivity, relaxation behavior and complex moduli of a class of isotropic viscoplastic composites *J. Eng. Mater. Technol.*, 116, 495–504 (1994)
- [18] Mandel, J., *Cours de Mécanique des Milieux Continus* (Paris : Gauthiers-Villars) (1966)
- [19] Nguyen, S. T., Dormieux, L., Le Pape, Y., Sanahuja, J., A Burger Model for the Effective Behavior of a Microcracked Viscoelastic Solid, *International Journal of Damage Mechanics*, 20 (8), 1116–1129 (2011) black
- [20] Nguyen, S. T., Dormieux, L., Le Pape, Y., Sanahuja, J., Crack propagation in viscoelastic structures : Theoretical and numerical analyses, *Computational Materials Science*, 50(1), 83-91 (2010)
- [21] Papa, E., Taliercio, A., A visco-damage model for brittle materials under monotonic and sustained stresses, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29 (3), 287–310 (2005)
- [22] Reda Taha, M. M., Shrive N. G., A model of damage and creep interaction in a quasi-brittle composite material under axial loading, *Journal of Mechanics*, 22 (4), 339-347 (2006)
- [23] Rekik, A., Brenner, R., Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization. *Mechanics Research Communications*, 38, 305–308 (2011)
- [24] Rekik, A., Nguyen, T. T. N., Gasser, A., Multi-level modeling of microcracked viscoelastic masonry, *International Journal of Solids and Structures*, 81, 63–83 (2016)
- [25] Rekik, A., Gasser, A., 2016. Numerical approach for accurate estimation of effective creep coefficients of microcracked masonry, *International Journal of Solids and Structures*, 102–103, 297–320.
- [26] Rougier, Y., Stolz, C., Zaoui, A., Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals, *C. R. Acad. Sci.*, 318, 145–51 (1994) analysis. *Proc. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME 4th. Vol. 2.* 1075–1085 (1962)
- [27] Shrive, N. G., Sayed-Ahmed, E. Y., Tilleman D., Creep analysis of clay masonry assemblages, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 367–397 (1997)
- [28] Shrive, N.G., Reda Taha, M. M., Effects of creep on new masonry structures, Chapter 4, 83–108, *Book : Learning from Failure - Long-term Behaviour of Heavy Masonry Structures*, Editor : L. Binda, WIT Press (2008)
- [29] Verstrynge, E., Ignoul, S., Schueremans, L., Gemert, Van D., Modelling of damage accumulation in masonry subjected to a long-term compressive load, *Book : Structural analysis of historic construction*, Dina d’ayala & Enrico Fodde editors, CRC Press, 525–532 (2008) black
- [30] Verstrynge, E., Schueremans, L., Van Gemert, D., Wevers, M., Monitoring and predicting masonry’s creep failure with the acoustic emission technique, *NDT &E Int.* 42(6), 518-523 (2009)