

# Contrôle optimal des écoulements par des modèles d'ordre réduit basés sur la POD et la PGD

Mourad OULGHELOU<sup>a</sup>, Cyrille ALLERY<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LaSIE UMR - 7356 CNRS - Université de La Rochelle  
Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cédex 1, France  
mourad.oulghelou@univ-lr.fr, cyrille.allery@univ-lr.fr

## Résumé :

*Afin de diminuer drastiquement les temps de calcul et la taille des données stockées, inhérents à la résolution des problèmes de contrôle optimal des écoulements, il est possible d'utiliser des méthodes de réductions de modèle comme par exemple la POD (Proper Orthogonal Decomposition). L'inconvénient majeur de l'approche POD réside dans le fait que la base construite n'est valable que pour la gamme de paramètres pour laquelle elle a été construite. Cet aspect est handicapant notamment à l'intérieur d'une boucle de contrôle où les paramètres varient. Pour s'affranchir de ce problème deux approches seront considérées dans cette communication. La première méthode considérée est la PGD (Proper Generalized Decomposition) qui est une technique itérative d'enrichissement de bases. Ainsi à chaque itération de l'algorithme de contrôle la base est mise à jour par quelques itérations PGD. La seconde approche est une technique d'interpolation de bases, robuste, basée sur le calcul des géodésiques dans la variété de Grassmann. Elle permet d'obtenir rapidement par interpolation une nouvelle base à chaque itération de l'algorithme de contrôle. Ces différentes approches sont appliquées pour contrôler l'écoulement à l'intérieur d'une cavité dans lequel des sources coexistent.*

## Abstract :

*In order to reduce drastically the CPU time and storage memory required in optimal control of flow problems, it is possible to use model reduction methods such as POD (Proper Orthogonal Decomposition). The major disadvantage of the POD approach is that the basis is only valid for the neighborhood of the parameter for which it was built. The interest in this communication is turned to the adaptation of these bases respectively to control parameter variations. Two adaptation approaches are considered. The first one uses an interpolation method based on calculus of geodesic paths on the Grassmann manifold. The second approach uses the Proper Generalized Decomposition (PGD) considered here as a correction method. This method consists in enriching a basis by reducing the error of the approximated solution. These different approaches are applied to control the lid-driven cavity flow in which sources coexist.*

**Mots clés : Modèle d'ordre réduit, POD, PGD, Contrôle optimal, Interpolation de bases, Grassmann**

# 1 Introduction

Le contrôle optimal des écoulements nécessite de résoudre les équations de Navier-Stokes et leurs équations adjointes de nombreuses fois, ce qui entraîne des temps de calcul très longs et des capacités de stockage importantes. Il n'est donc pas possible d'envisager de faire du contrôle en temps réel ou quasi-réel avec les techniques de résolution classiques (DNS, LES, ...). Afin de diminuer drastiquement les temps de calcul et la taille des données stockées, il est possible d'utiliser des méthodes de réductions de modèle. Ces approches consistent à écrire la solution du problème dans une base de taille réduite, puis à projeter les équations de Navier-Stokes sur cette base afin d'obtenir un système d'équations différentielles de petite taille dont la résolution, très rapide, permet d'accéder à la dynamique temporelle de l'écoulement. La POD (Proper Orthogonal Decomposition), caractérisée par son optimalité à pouvoir reproduire le phénomène physique en très peu de modes, est la méthode de réduction de modèle la plus utilisée en mécanique des fluides. L'inconvénient majeur de l'approche POD réside dans le fait que la base construite n'est valable que pour la gamme de paramètres pour laquelle elle a été construite. Cet aspect est handicapant notamment à l'intérieur d'une boucle de contrôle où les paramètres varient. Dans le contexte du contrôle optimal, l'approche POD a entre autres été utilisée par Bergmann et al. [1] pour minimiser la traînée d'un écoulement autour d'un cylindre tournant et par Ravindran [2] pour contrôler la zone de recirculation qui apparaît dans l'écoulement dans une marche descendante. Basée sur la méthode des régions de confiance, l'approche proposée nécessite de construire une nouvelle base POD à chaque itération de l'algorithme de contrôle pour lequel la base n'est plus valable, et donc par suite à faire des simulations classiques des équations de Navier-Stokes, ce qui est coûteux. Tallet et al. [3] ont quant à eux utilisé l'approche POD pour contrôler l'écoulement anisotherme dans une cavité. Pour cela ils ont considéré une base POD globale construite à l'aide de clichés issus de simulations balayant une large plage de paramètres de contrôle. Cette base POD est générée une fois pour toute et est supposée valable à chaque itération de l'algorithme de contrôle. Les simulations se font en temps quasi-réel avec une bonne précision. Dans ce qui suit, cette approche sera appelée Global Method Basis (GBM).

Dans cette communication, afin de s'affranchir des difficultés liées à la validité des bases POD lorsque les paramètres varient, deux techniques de mise à jour de bases réduites sont proposées. La première approche considérée est la PGD (Proper Generalized Decomposition)[4, 5, 6] qui sera utilisée ici comme une technique itérative d'enrichissement de bases. Ainsi à chaque itération de l'algorithme de contrôle la base est mise à jour par quelques itérations PGD. La seconde approche est quant à elle une technique d'interpolation de bases, basée sur le calcul des géodésiques dans la variété de Grassmann. Cette approche, introduite par Amsallem et Farhat [7] dans le contexte de l'aéro-élasticité, permet d'obtenir rapidement par interpolation une nouvelle base à chaque itération de l'algorithme de contrôle. Ces différentes approches sont appliquées pour contrôler l'écoulement à l'intérieur d'une cavité dans lequel des sources existent. L'objectif est de retrouver l'intensité des sources, qui sont les paramètres de contrôle, correspondant à une valeur cible de l'écoulement. La robustesse et le potentiel de ces approches en termes de précision et de temps de calcul sont présentés.

Cette communication est organisée comme suit. Le paragraphe 2 est consacré à la description du problème de contrôle associé au modèle complet. Les sections 3, 4 et 5 présentent respectivement le problème de contrôle optimal réduit, la méthode d'interpolation de bases sur la variété de Grassmann et la méthode PGD. Enfin le paragraphe 6 est dédié à la présentation des résultats numériques.

## 2 Formulation du problème de contrôle optimal

On considère un écoulement incompressible dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma \subset \mathcal{C}^2$  soumis à  $n_s$  sources externes  $\{\mathbf{f}_{\gamma_i}\}_{i=1, \dots, n_s} \in [L^2(\mathcal{I}, L^2(\Omega))]^{n_s}$  sur un intervalle de temps  $\mathcal{I} = [0, T]$ . Ainsi le problème à résoudre s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times \mathcal{I} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{f}_{\gamma_i} & \text{in } \Omega \times \mathcal{I} \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma \times \mathcal{I} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$  est la condition initiale. Dans le cadre du contrôle optimal on souhaite retrouver les paramètres de contrôle  $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_s}\}^T$  liés aux termes sources  $\mathbf{f}_{\gamma_i}$  correspondant à un champ de vitesse cible  $\hat{\mathbf{u}}$ . Ainsi on doit résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^d} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \gamma) \quad \text{sous la contrainte du problème (1)} \quad (2)$$

où  $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \gamma)$  est la fonctionnelle coût définie par

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_T - \hat{\mathbf{u}}_T|^2 dx + \frac{\kappa}{2} |\gamma|^2 \quad (3)$$

$\mathbf{u}_T$  est la vitesse à l'instant  $T$ . Ce problème de minimisation sous contrainte est converti en un problème de minimisation sans contrainte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (ou variables adjointes). Après calcul le problème adjoint associé s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathcal{I} \\ \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{\xi} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \nabla \pi = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega \times \mathcal{I} \\ \boldsymbol{\xi} = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathcal{I} \\ \boldsymbol{\xi}(T) = \hat{\mathbf{u}}(T) - \mathbf{u}(T) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

où  $\boldsymbol{\xi}$  (resp.  $\pi$ ) correspond à la variable adjointe de la vitesse  $\mathbf{u}$  (resp. la pression  $p$ ). La recherche d'un minimum pour le problème de minimisation est effectué par une méthode de descente de type gradient. Ainsi la direction de descente s'exprime en fonction du gradient de la fonctionnelle telle que

$$d_k = -\nabla \mathcal{J}(\gamma) = \sum_{i=1}^{n_s} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{f}_{\gamma_i} \boldsymbol{\xi} dxdt + \kappa \gamma \quad (5)$$

L'algorithme de contrôle est alors le suivant :

- Résolution du problème d'état (1) puis du problème adjoint (4) ;
- Détermination de la direction de descente (5) ;
- Recherche du pas de l'algorithme de manière linéaire (avec l'algorithme d'Armijo, par exemple) ;
- Détermination des nouveaux paramètres de contrôle ;

- e) Si le critère de convergence ( $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \gamma) < \eta$  avec  $\eta$  fixé par l'utilisateur) n'est pas satisfait, retour à la première étape.

### 3 Formulation du problème de contrôle optimal réduit

#### 3.1 Modèles d'ordre réduit obtenus par POD

Le champ de vitesse est tout d'abord décomposé en un champ moyen et un champ fluctuant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$$

Ainsi le champ  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  vérifie les conditions aux limites du problème (1) et le champ fluctuant  $\mathbf{u}'$  est nul sur le bord. Les méthodes de réduction de modèle consistent à approximer le champ de vitesse sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_u} \alpha_{u_j}(t) \Phi_{u_j}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

où  $m_u$  est très petit. Ici la base spatiale est obtenue par la méthode POD/Snapshots [8]. La POD consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux (vecteurs propres) représentatifs des réalisations les plus probables. Ces modes propres sont obtenus en résolvant une équation de Fredholm construite à partir de snapshots issus de simulations numériques.

Le système d'équations différentielles de taille réduite qui forme le modèle réduit est obtenu par projection de Galerkin des équations de quantités de mouvement sur la base POD formé des vecteurs  $\Phi_{u_j}$ . Ainsi le modèle réduit s'écrit

$$\sum_{j=1}^{m_u} M_{ij} \frac{d}{dt} \alpha_{u_j} + \sum_{j,k=1}^{m_u} N_{ijk} \alpha_{u_k} \alpha_{u_j} + \sum_{j=1}^{m_u} B_{ij} \alpha_{u_j} + F_i = 0 \quad \forall i \in 1, \dots, m_u \quad (7)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ij} = \langle \Phi_{u_j}, \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} \\ N_{ijk} = \langle \Phi_{u_j} \cdot \nabla \Phi_{u_k}, \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{ij} = \frac{1}{Re} \langle \nabla \Phi_{u_j}, \nabla \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} + \langle \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi_{u_k} + \Phi_{u_j} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} \\ F_i = - \sum_{l=1}^{n_s} \langle \mathbf{f}_l, \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} + \langle \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} + \frac{1}{Re} \langle \nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \Phi_{u_i} \rangle_{\Omega} \end{array} \right.$$

où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ . Il est à noter que lors de la projection, le terme lié au gradient de pression disparaît du fait que par construction les modes POD  $\Phi_{u_i}$  sont à divergence nulle et nuls sur le bord.

#### 3.2 Problème de contrôle optimal réduit

En supposant que la cible de vitesse  $\hat{\mathbf{u}}$  s'écrit après application de la POD

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_{\hat{u}}} \alpha_{\hat{u}_j}(t) \Phi_{\hat{u}_j}(\mathbf{x})$$

et tenant de l'équation (Equ. 6) la fonctionnelle (Equ. 3) s'écrit sous forme réduite

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{red}(\alpha_u, \gamma) = & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \sum_{k=1}^{m_u} \alpha_{u_k}^2 + \sum_{l=1}^{m_{\hat{u}}} \alpha_{\hat{u}_l}^2 - \sum_{k=1}^{m_u} \sum_{l=1}^{m_{\hat{u}}} C_{kl} \alpha_{u_k} \alpha_{\hat{u}_l} \right) dt \\ & + \alpha_{u_k}^2(T) + \alpha_{\hat{u}_l}^2(T) + \sum_{k=1}^{m_u} \sum_{l=1}^{m_{\hat{u}}} C_{kl} \alpha_{u_k}(T) \alpha_{\hat{u}_l}(T) + \frac{\kappa}{2} |\gamma|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\alpha_u$  est maintenant la variable d'état et  $C_{kl} = \langle \Phi_{u_k}, \Phi_{\hat{u}_l} \rangle_{\Omega}$ . Les equations adjointes réduites associées sont

$$\sum_{i=1}^{m_u} M_{ij} \frac{d}{dt} \xi_{u_i} - \sum_{i=1}^{m_u} B_{ij} \xi_{u_i} - \sum_{i,k=1}^{m_u} (N_{ijk} + N_{ikj}) \alpha_{u_k} \xi_{u_i} = \alpha_{u_j} - \sum_{s=1}^{m_{\hat{u}}} C_{js} \alpha_{\hat{u}_s} \quad \forall j \in 1, \dots, m_u \quad (9)$$

Dans ce cas le gradient de la fonctionnelle réduite s'écrit :

$$\nabla \mathcal{J}_{red}(\gamma) = - \sum_{j=1}^{m_u} \int_0^T \xi_{u_j} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n_s} \nabla_{\gamma} \mathbf{f}_{\gamma_k} \Phi_{u_j} dx dt \quad (10)$$

Les différentes étapes de l'algorithme de contrôle réduit sont les suivantes :

- 1)  $\Phi_u = \Phi_u(\gamma^0)$  où  $\gamma^0$  est paramètre associée à la solution initiale
- 2) construire et résoudre les equations d'état réduites (Equ. 7)
- 3) construire et résoudre les equations adjointes réduites (Equ. 9)
- 4) calculer la direction de descente  $d_l = -\nabla \mathcal{J}_{red}(\gamma^l)$  (Equ. 10)
- 5) déterminer le nouveau paramètre  $\gamma_l = \gamma_{l-1} + \sigma_l d_l$  ( $\sigma_l > 0$  obtenu par une méthode d'Armijo)
- 6) Evaluation de la base  $\Phi_u(\gamma^l)$  associée au paramètre  $\gamma^l$  par une méthode d'interpolation : GIM, Lagrange ou RBF.
- 7) Si le critère de convergence  $\mathcal{J}_{red}(\alpha_u, \gamma^l) < \eta$  avec  $\eta$  fixé par l'utilisateur) n'est pas satisfait, retour à l'étape 2

## 4 Interpolation des bases réduites par la méthode GIM

Comme nous l'avons déjà mentionné l'inconvénient majeur de l'approche POD réside dans le fait que la base construite n'est valable que pour la gamme de paramètres pour laquelle elle a été construite. Cet aspect est handicapant notamment à l'intérieur d'une boucle de contrôle où les paramètres varient. Pour s'affranchir de ce problème il est possible de construire plusieurs bases POD correspondant à différents paramètres de contrôle puis d'interpoler ces bases pour obtenir une base correspondant aux paramètres imposés par l'algorithme de contrôle. Dans ce contexte les techniques classiques d'interpolation comme la méthode de Lagrange ou la méthode RBF (Radial Basis Function) s'avèrent peu efficaces. Pour cette raison, nous proposons ici d'utiliser une technique d'interpolation basée sur le calcul des géodésiques dans la variété de Grassmann qui par construction assure cette propriété. Dans la suite du paragraphe nous allons décrire rapidement cette approche qui a été introduite par Amsallem et Farhat [7] dans le contexte de l'aéro-élasticité. Dans cette communication cette méthode sera dénommée GIM (Grassmann Interpolation Method).

Soit  $\psi \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times m}$  une matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs d'une base POD de dimension  $m$ .  $N_{dof}$  désigne le nombre de points liés à la discrétisation spatiale du problème. Les colonnes de cette matrice définissent donc une base de dimension  $m$  pour le sous espace  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^{N_{dof}}$ . Ce sous espace appartient à la variété de Grassmann  $\mathcal{G}(m, N_{dof})$  qui est définie comme l'ensemble de tous les sous espaces de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^{N_{dof}}$ . Autrement dit, chaque sous espace  $\mathcal{S}$  de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^{N_{dof}}$  est considéré comme un point de  $\mathcal{G}(m, N_{dof})$ , représenté de manière non unique par la matrice  $\psi$  dont les colonnes engendrent le sous espace  $\mathcal{S}$ . En chaque point  $\mathcal{S}$  de la variété de Grassmann  $\mathcal{G}(m, N_{dof})$  il existe un espace tangent noté  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  qui a la même dimension quel que soit le point considéré. Chaque point de cet espace tangent peut être représenté par une matrice  $\Gamma \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times m}$ . De plus cet espace tangent est un espace vectoriel. Par conséquent,  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  est un espace plat dans lequel les interpolations usuelles peuvent être effectuées.

Soit  $\psi$  une matrice orthogonale dont les colonnes engendrent  $\mathcal{S} \in \mathcal{G}(m, N_{dof})$  et  $\chi$  un point de  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  représenté par  $\Gamma$ . L'application exponentielle  $\text{Exp}$  relie  $\chi$  à un sous-espace  $\mathcal{S}'$  de dimension  $m$  représenté par une matrice orthogonale  $\psi' \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times m}$  tel que :

$$\begin{cases} \Gamma = U \Sigma V^T \quad (\text{SVD}) \\ \psi' = \psi V \cos(\Sigma) + U \sin(\Sigma) \end{cases} \quad (11)$$

où  $U$ ,  $\Sigma$ , et  $V$  correspondent aux matrices issues de la SVD (Singular Value decomposition) de  $\Gamma$ . Le lien entre l'espace tangent  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  à un point  $\mathcal{S}$  de la variété de Grassmann et la variété elle-même est établi par l'application exponentielle, et explicitement exprimée par les équations (Equ. 11). L'inverse de cette application est définie entre un voisinage de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  par l'application logarithmique. Cette application est notée  $\log_{\mathcal{S}}$  et définie dans un voisinage de  $\mathcal{S} \in \mathcal{G}(m, N_{dof})$ . Ainsi l'image de  $\mathcal{S}'$  par l'application logarithmique  $\log_{\mathcal{S}}$ ,  $\chi = \log_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}') \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ , est représentée par la matrice  $\Gamma$  donnée par

$$\begin{cases} (I - \psi \psi^T) \psi' (\psi'^T \psi')^{-1} = U \Sigma V^T \\ \Gamma = U \tan^{-1}(\Sigma) V^T \end{cases} \quad (12)$$

Soient  $n_g \geq 2$  et  $\{\psi_i \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times m}\}_{i=0}^{n_g-1}$  les matrices (dont les colonnes correspondent aux vecteurs des  $n_g$  bases POD de dimension  $m$  considérées) représentatives de l'ensemble des sous espaces  $\{\mathcal{S}_i\}_{i=0}^{n_g-1}$  associés à un ensemble de paramètres de contrôles  $\{\gamma_i\}_{i=0}^{n_g-1}$ . Avec ces notations et en tenant compte des propriétés énoncées ci-dessus l'algorithme d'adaptation de bases proposés par Amsallem and Farhat [7] s'effectue en 4 étapes :

- a) Choisir un point de référence  $\mathcal{S}_{i_0}$  comme point d'origine de l'interpolation.
- b) Calculer pour chaque  $\mathcal{S}_i$  leur image par l'application logarithmique  $\log_{\mathcal{S}_{i_0}}(\mathcal{S}_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{i_0}}$  ce qui revient à calculer les matrices  $\Gamma_i$  telles que

$$(I - \psi_{i_0} \psi_{i_0}^T) \psi_i (\psi_{i_0}^T \psi_i)^{-1} = U_i \Sigma_i V_i^T \quad \text{et} \quad \Gamma_i = U_i \tan^{-1}(\Sigma_i) V_i^T \quad (13)$$

- c) Calculer  $\Gamma_{n_b}$  associé au paramètre de contrôle  $\gamma_{n_b}$  par interpolation classique des  $\Gamma_i$  calculé à l'étape précédente.
- d) Calculer la base  $\psi_{n_b}$  associée au paramètre de contrôle  $\gamma_{n_b}$  en utilisant l'application exponentielle

$\text{Exp}_{\mathcal{S}_{i_0}}$  telles que

$$\Gamma_{n_b} = U_{n_b} \Sigma_{n_b} V_{n_b}^T \quad \text{et} \quad \psi_{n_b} = \psi_{i_0} V_{n_b} \cos(\Sigma_{n_b}) + U_{n_b} \sin(\Sigma_{n_b}) \quad (14)$$

## 5 Enrichissement de bases par la méthode PGD

Dans cette communication la méthodologie de contrôle utilisée avec la méthode PGD est basée sur l'algorithme de contrôle décrit dans le paragraphe 2. Cette approche consiste à décomposer la vitesse (resp. la pression, la vitesse adjointe et la pression adjointe) sur une base réduite de vitesse (resp. de pression, de vitesse adjointe et de pression adjointe). Lorsque les paramètres de contrôle évoluent, chacune de ces bases sera enrichie à l'aide de la méthode PGD appliquée aux équations d'état (Equ. 1) et aux équations adjointes (Equ. 4). Il est à noter que cette approche ne nécessite initialement qu'une base POD (de vitesse, de pression et des variables adjointes) correspondant aux paramètres de contrôle initiaux. Alors qu'avec l'approche par interpolation de bases réduites, plusieurs bases POD de vitesse correspondant à différents paramètres de contrôle sont nécessaires. Dans ce qui suit seul l'algorithme d'enrichissement du problème d'état (Equ. 1) est présenté. La démarche est analogue pour le problème adjoint (Equ. 4).

Considérons maintenant une base POD de vitesse et une base POD de pression associées à un paramètre de contrôle  $\gamma \in \mathbb{R}^{n_s}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u} = \sum_{j=1}^{m_u} \alpha_{u_j} \Phi_{u_j} \quad \text{et} \quad p(x, t) \simeq p_{m_p} = \sum_{j=1}^{m_p} \alpha_{p_j} \Phi_{p_j}$$

Pour une autre valeur du paramètre ces approximations ne sont plus forcément valables nous proposons donc d'enrichir les bases précédentes par de nouveaux couples  $(\alpha_u, \Phi_u)$  et  $(\alpha_p, \Phi_p)$  telles que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u+1} = \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u} + \alpha_u \Phi_u \quad \text{et} \quad p(x, t) \simeq p_{m_p+1} = p_{m_p} + \alpha_p \Phi_p \quad (15)$$

Cette enrichissement sera réalisé à l'aide de la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) [4, 5, 6]. En introduisant les décompositions (Equ. 15) dans le problème initial (Equ. 1) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \Phi_u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \Phi_u \frac{d\alpha_u}{dt} + \alpha_u^2 \Phi_u \cdot \nabla \Phi_u + \alpha_u \left( \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u} \cdot \nabla \Phi_u + \Phi_u \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u} - \frac{\Delta \Phi_u}{Re} \right) + \alpha_p \nabla \Phi_p = G(\mathbf{u}_{\mathbf{m}_u}, p_{m_p}) \quad \text{dans } \Omega \times \mathcal{I} \\ \Phi_u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \mathcal{I} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{m}_u} + \alpha_u \Phi_u = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (16)$$

Où

$$G(\mathbf{u}_{\mathbf{m}_u}, p_{m_p}) = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{f}_{\gamma_i} + \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\mathbf{m}_u}, p_{m_p})$$

Pour trouver les différents couples à l'aide de la PGD il faut utiliser le double critère d'orthogonalité de Galerkin. Ainsi si  $(\alpha_u, \alpha_p)$  sont connues et fixes, on cherche

$$(\Phi_u, \Phi_p) = \mathcal{S}(\alpha_u, \alpha_p) \quad (17)$$

où  $\mathcal{S}$  correspond à la projection de Galerkin du problème (Equ. 16) sur les coefficients temporels de vitesse et de pression  $\alpha_u$  et  $\alpha_p$ . De même si le couple  $(\Phi_u, \Phi_p)$  est connu et fixé, on cherche

$$(\alpha_u, \alpha_p) = \mathcal{T}(\Phi_u, \Phi_p) \quad (18)$$

où  $\mathcal{T}$  correspond à la projection de Galerkin du problème (Equ. 16) sur les vecteurs  $\Phi_u$  et  $\nabla\Phi_p$ . Les couples  $(\alpha_u, \Phi_u)$  et  $(\alpha_p, \Phi_p)$  seront optimaux s'ils vérifient simultanément les équations (Equ. 17) et (Equ. 18). Habituellement ces nouveaux couples  $(\alpha_u, \Phi_u)$  et  $(\alpha_p, \Phi_p)$  sont obtenus par un algorithme du point fixe (voir [4] pour plus de détails).

## 6 Application au contrôle d'un écoulement dans une cavité

On s'intéresse à un écoulement incompressible dans une cavité bidimensionnelle carrée de côté  $a$  sur un intervalle de temps  $\mathcal{I} = [0, 1]$ . La paroi supérieure de la cavité est animée d'une vitesse  $U_0\mathbf{e}_1$  alors que la vitesse sur les autres parois est nulle. Le nombre de Reynolds  $Re = \frac{U_0 a}{\nu}$  (où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide) est fixé à 100. L'écoulement est également soumis à deux sources externes  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_1$  agissant sur deux sous domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  (voir figure (1a)) et définies par

$$\mathbf{f}_0 = \gamma^0 \exp(-t) \chi_{\Omega_0} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_1 = \gamma^1 \chi_{\Omega_1} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

où  $\chi_{\Omega_0}$  et  $\chi_{\Omega_1}$  sont deux fonctions masques qui valent 1 à l'intérieur de  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  respectivement, et s'annulent en dehors. Les paramètres  $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$  correspondent aux paramètres de contrôle de notre écoulement. Ainsi partant de l'écoulement associé à un couple de paramètre  $\gamma_{init} = (\gamma_{init}^0, \gamma_{init}^1)$ , l'objectif est de retrouver les paramètres  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}^0, \hat{\gamma}^1)$  associés à un écoulement cible  $\hat{\mathbf{u}}$ . Ici  $\gamma_{init} = (1, -1)$  et  $\hat{\gamma} = (0, 0)$ .

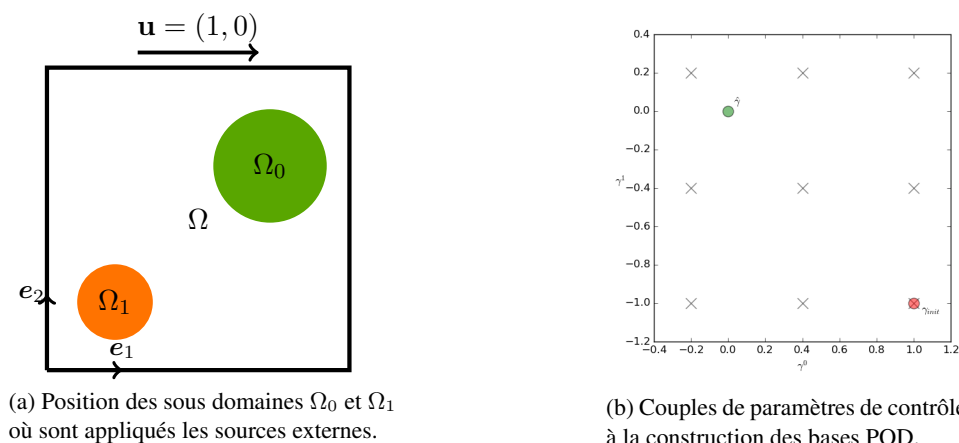


FIGURE 1 – Domaine  $\Omega$  occupé par le fluide et couples de paramètres de contrôle ayant servis à la construction des bases POD.

Ces couples de paramètres ainsi que les couples de paramètres ayant servis à la construction des bases POD nécessaires à la méthode GBM et aux méthodes d'interpolation GIM, Lagrange et RBF sont représentés sur la figure (1b). Il est rappelé que ces bases d'interpolation n'interviennent pas lorsque la méthode PGD est utilisée. Ces différentes bases ont été obtenues par POD en considérant pour chaque

1. Au temps initial, le fluide est supposé au repos c'est à dire  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$



couple de paramètres 400 snapshots régulièrement répartis sur l'intervalle temporel. Tous les snapshots associés à l'ensemble des paramètres de l'échantillonnage ont été considérés pour générer la base utilisée dans la méthode GBM. On rappelle que pour cette approche une seule base construite sur l'ensemble des paramètres est utilisée et que cette base est fixe lors de l'algorithme de contrôle. Par la suite chaque base POD est composée de 5 vecteurs (c'est à dire  $m_u = 5$ ).

La résolution des problèmes complets, nécessaire à la construction des bases réduites, a été faite en utilisant la méthode classique de projection de Chorin-Temam. Le pas de temps a été fixé à  $\delta t = 0,0025$ , et la discrétisation spatiale a été effectuée par la méthode des éléments finis (élément fini de Taylor Hood  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ) sur un maillage non uniforme composé de 4512 triangles. La solution cible  $\hat{u}$  et la solution initiale de l'algorithme de contrôle associées respectivement aux paramètres  $\hat{\gamma}$  et  $\gamma_{init}$  sont tracées pour deux instants  $t = T/2$  et  $t = T$  sur les figures 2a) et 2b). Ces figures montrent une dynamique différente entre l'état initial et l'état cible du contrôle.

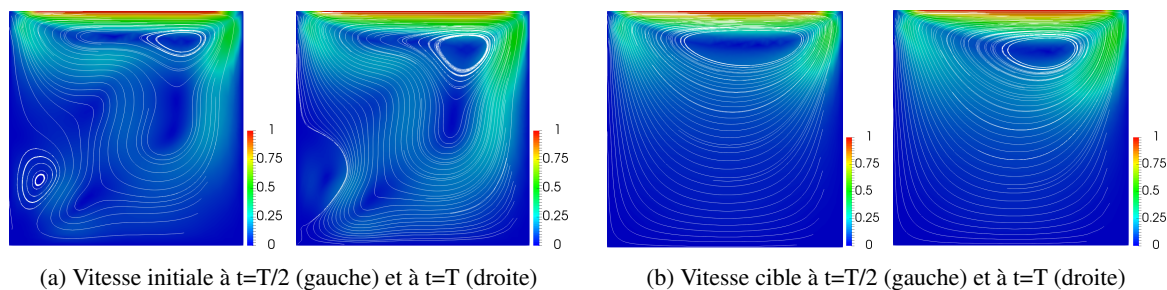
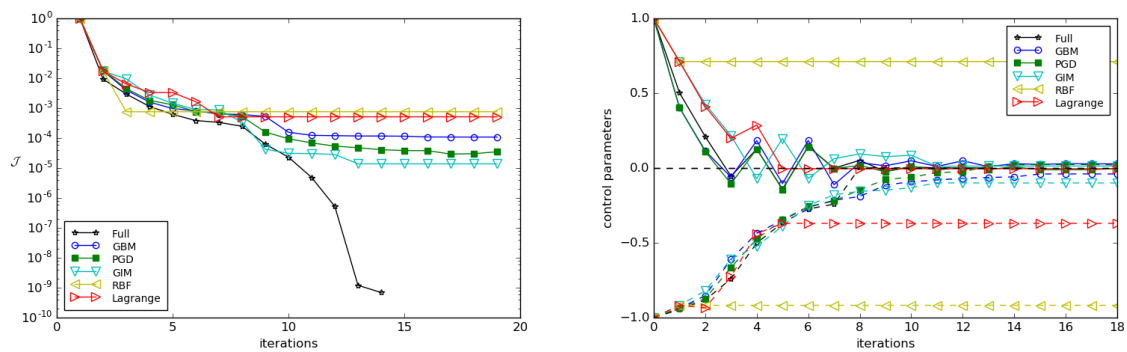


FIGURE 2 – Lignes de courant pour la vitesse initiale et la vitesse cible correspondant respectivement aux paramètres de contrôle  $\gamma_{init}$  et  $\hat{\gamma}$ .

L'évolution de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  et l'évolution des paramètres  $(\gamma^0, \gamma^1)$  en fonction des itérations de l'algorithme de contrôle, pour les différentes méthodes considérées, sont tracées sur les figures (3a) et (3b). On observe que pour chacune des méthodes la fonctionnelle  $J$  diminue rapidement puis stagne. Il est à noter que jusqu'à l'itération 10 le comportement de la fonctionnelle par PGD est le même que celui du modèle complet. On observe également que la minimisation de la fonctionnelle est plus efficace avec les méthodes PGD et GIM. En effet à convergence sa valeur est de l'ordre de  $10^{-5}$  pour ces deux approches ( $1.8 \times 10^{-5}$  pour GIM et  $4.77 \times 10^{-5}$  pour PGD) alors qu'elle est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour les autres méthodes ( $1.17 \times 10^{-4}$  pour GBM,  $5.13 \times 10^{-4}$  pour Lagrange et  $7.59 \times 10^{-4}$  pour RBF). Ces différences sont également visibles sur les valeurs des paramètres de contrôle obtenus (voir fig 3b). En effet on voit clairement que pour les méthodes Lagrange ou RBF les paramètres obtenus sont éloignés des paramètres cibles. Le tableau (1) répertorie le gain en temps de simulation par rapport au modèle complet, la valeur des paramètres  $(\gamma^0, \gamma^1)$ , la valeur de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  et le pourcentage d'erreur entre la vitesse obtenue et la vitesse cible à l'itération 13 de l'algorithme de contrôle. Le pourcentage d'erreur est donné par l'expression

$$\varepsilon = \int_0^T \hat{\varepsilon} dt \quad \text{où} \quad \hat{\varepsilon} = 100 \times \frac{\|\hat{u} - u\|_{L^2(\Omega)}}{\|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)}}$$



(a) Evolution de la fonctionnelle en fonction des itérations de l'algorithme de contrôle

(b) Evolution des paramètres de contrôle ( $\gamma^0, \gamma^1$ ) en fonction des itérations de l'algorithme de contrôle

FIGURE 3 – Evolution de la fonctionnelle et des paramètres de contrôle au cours des itérations de l'algorithme de contrôle.

Méthode	$\mathcal{T}_{online}^{full} / \mathcal{T}_{online}^{methode}$	$\mathcal{T}_{total}^{full} / \mathcal{T}_{total}^{methode}$	$(\gamma^0, \gamma^1)$	valeur de $\mathcal{J}$	% erreur
full	—	1	(0.0002, 0.0006)	$1.20 \times 10^{-9}$	0.01%
GBM	4843.97	20.26	(0.0486, -0.0690)	$1.17 \times 10^{-4}$	4.20%
PGD	—	56.47	(0.0055, -0.0249)	$4.77 \times 10^{-5}$	2.91%
GIM	1673.06	20.10	(0.0127, -0.0998)	$1.38 \times 10^{-5}$	2.49%
RBF	221.17	18.63	(0.7115, -0.9176)	$7.59 \times 10^{-4}$	8.57%
Lagrange	249.99	18.81	(-0.0047, -0.3698)	$5.13 \times 10^{-4}$	9.31%

TABLE 1 – Gains en temps de calcul CPU par rapport au modèle complet, valeurs des paramètres ( $\gamma^0, \gamma^1$ ), valeurs de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  et pourcentage d'erreur entre la vitesse obtenue et la vitesse cible à l'iteration 13 de l'algorithme de contrôle.

On constate que les méthodes PGD et GIM ont des précisions de l'ordre de 2 à 3%, contre 4% pour la méthode GBM et 8 à 9% pour les méthodes Lagrange et RBF. Ces résultats sont confirmés par la figure (4) où sont tracées les erreurs entre la solution cible et la solution obtenue à l'issue de l'algorithme de contrôle au temps  $T$ . Pour comparer le temps de simulation associé à chacune des méthodes nous avons considéré le temps offline  $T_{offline}$  qui correspond au temps de construction des bases de l'échantillonnage et le temps online  $T_{online}$  qui correspond à la simulation de l'algorithme de contrôle. On note  $T_{total}$  la somme du temps offline et du temps online. En temps online on constate que les méthodes GBM et GIM permettent de diviser le temps de calcul respectivement par 4843 et 1673. Cette différence s'explique par le fait que la méthode GIM contrairement à la méthode GBM nécessite de reconstruire à chaque itération de l'algorithme de contrôle les modèles réduits. Les méthodes Lagrange et RBF sont également efficaces avec une division du temps de calcul d'environ 240. Cette différence de gain entre ces deux méthodes et la méthode GIM s'explique par le fait que ces approches nécessitent plus d'itérations dans la recherche du pas par Armijo. La méthode PGD est quant à elle moins rapide et divise le temps de simulation par 56. Cependant il est à noter que contrairement aux autres méthodes cette approche ne nécessite pas d'échantillonnage. Ainsi si on tient compte du temps de simulation offline c'est cette approche qui est la plus rapide. Cette approche peut donc s'avérer très intéressante lorsque la création d'un échantillonnage de bases est très coûteux à réaliser, notamment dans le cas où le paramètre de contrôle  $\gamma \in \mathbb{R}^q$  où  $q > 3$ .

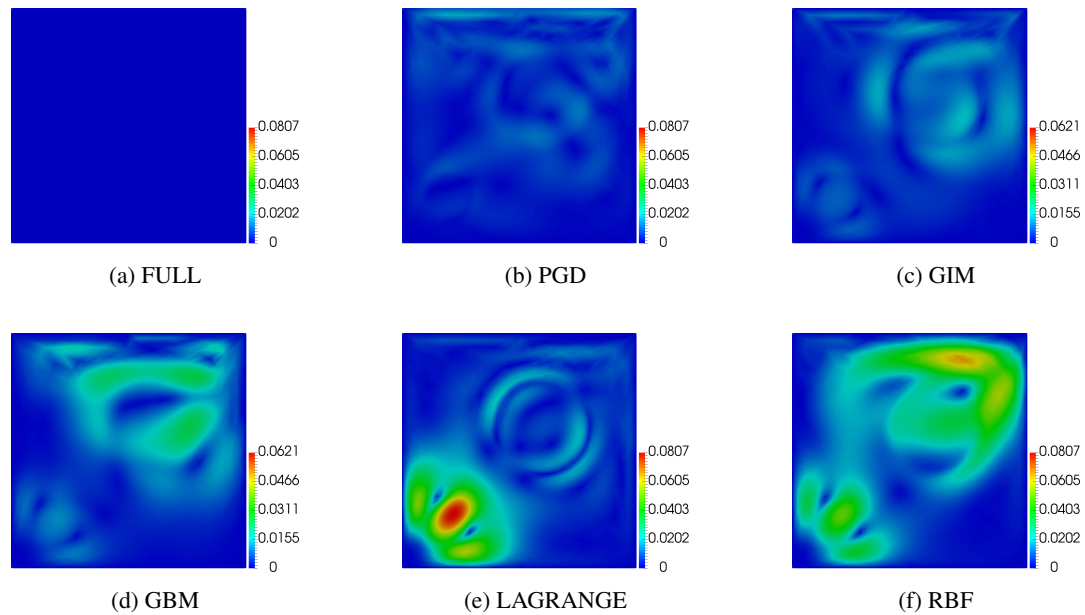


FIGURE 4 – Erreurs entre la solution cible et la solution obtenue à l’itération 13 de l’algorithme de contrôle au temps  $T$ .

## 7 Conclusion

L’objectif de cette communication était d’évaluer le potentiel des méthodes d’adaptation de bases GIM et PGD pour le contrôle d’écoulement. Les résultats numériques ont montré un gain important en temps de calcul avec une très bonne précision. Ainsi la méthode GIM (resp. PGD) permet de diviser le temps de calcul online par rapport au modèle complet de 1673 fois (resp. 56 fois) avec une précision de l’ordre de 2 à 3%. Même si le gain en temps de calcul online de la méthode PGD est plus petit, cette méthode s’avère intéressante et compétitive. En effet, contrairement aux autres méthodes d’adaptation de bases (GIM, GBM, RBF et Lagrange) qui nécessitent un échantillonnage soigneusement construit, la méthode PGD ne dépend que de la base initiale à partir de laquelle démarre l’algorithme de contrôle. Par conséquent la PGD peut s’avérer plus efficace lorsque la création d’un échantillonnage de bases est très coûteux à réaliser, notamment dans le cas où le paramètre de contrôle  $\gamma \in \mathbb{R}^q$  où  $q > 3$ .

## Références

- [1] M. Bergmann, L. Cordier, and J.-P. Brancher, “Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model,” *AIP Physics of Fluids*, vol. 17(9), 2005.
- [2] S. S. Ravindran, “A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 34(5), pp. 425–448, 2000.
- [3] A. Tallet, C. Allery, and C. Leblond, “Optimal flow control using a pod-based reduced-order model,” *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, vol. 70, no. 1, pp. 1–24, 2016.
- [4] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings, “A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids,” *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 139, no. 3, pp. 153 – 176, 2006.

- 
- [5] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar, “Proper generalized decomposition (pgd) for the resolution of navier–stokes equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 1387 – 1407, 2011.
- [6] P. Ladeveze, *Nonlinear computational structural mechanics : New approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer (New York), 1999.
- [7] D. Amsallem and C. Farhat, “An interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity,” *AIAA Journal*, vol. 46(7), pp. 1803–1813, 2008.
- [8] L. Sirovich, “Turbulence and the dynamics of coherent structures,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 45, pp. 561–571, 1987.