

# Transfert de chaleur induit par les tourbillons générés par une irrégularité géométrique de paroi

D. MUTSCHLER, B. DI PIERRO, P. VALIORGUE, H. BEN HADID

Université Lyon 1, Université de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, 36 avenue Guy de Collongue - 69134 Écully, dimitri.mutschler@univ-lyon1.fr

## Résumé :

*Nous proposons dans ce travail une étude numérique d'un écoulement de canal chauffé différentiellement et avec déformation de l'une de ses parois. Nous montrons que la longueur de la zone de recirculation créée en aval de la déformation évolue comme  $\approx Re^{0.45}$  et que cette zone produit deux points d'inflexion dans l'écoulement. Nous montrons également que pour les plus grands nombres de Reynolds ( $Re > 250$ ), cette bulle génère un lâcher tourbillonnaire à une fréquence caractéristique et crée de la vorticité en proche paroi. Cette dernière a pour conséquence de favoriser le transfert de chaleur au sein de l'écoulement et augmenter le nombre de Nusselt à la paroi d'un facteur 1.5.*

## Abstract :

*In this work a numerical study is proposed for a channel flow with Gaussian bump on one of its walls and heated differentially. It is shown that the length of the recirculation zone created downstream of the bump deformation evolves as  $\approx Re^{0.45}$  and that this zone produces two points of inflection in the flow. It is also shown that for Reynolds numbers over 250, this recirculation zone also generates a vortex release at a characteristic frequency which creates near-wall vorticity. The latter has the effect of promoting heat transfer within the flow and increasing the number of Nusselt to the wall by a factor of 1.5.*

## Mots clefs : Mots clefs

## 1 Introduction

Les micro-canaux sont particulièrement adaptés aux problèmes de refroidissement des puces électroniques [1, 2]. Ils se distinguent par des écoulements à bas nombres de Rayleigh ce qui, en termes de transferts thermiques, les placent dans les régimes de convection forcée [3, 4]. En vue d'optimiser les transferts de chaleur dans ces régimes, on rencontre généralement deux méthodes : la génération du mélange ou l'augmentation de la surface de contact entre la paroi chaude et le fluide. Notre étude se situe dans le cadre de la première méthode consistant à homogénéiser la température du fluide par mélange. Les différentes techniques développées pour satisfaire ce besoin d'homog n sation peuvent être catégorisées en deux types [5, 6] : le mélange passif pour lequel la pompe est la seule source d'énergie et le mélange actif pour lequel des dispositifs d'injection d'énergie externes à l'écoulement stimulent le brassage. Dans la catégorie des dispositifs actifs, certaines techniques proposent de contrôler les transferts

de chaleur comme les jets synthétiques. Ces jets sont générés au moyen de micro-actionneurs fluidiques perturbant l'écoulement principal par la génération d'écoulements secondaires [7, 8]. D'autres études proposent de contrôler le mélange en rendant mobile une des parois du canal. Pour ce faire, une paroi déformable en PDMS est couplée à un actionneur faisant vibrer la membrane qui peut être soit un piézoélectrique soit un régulateur de pression [9, 10, 11].

Afin de trouver des stratégies de mélange actives, une première étude de mélange passif est effectuée. Dans la majorité des cas le mélange passif est induit grâce à une géométrie particulière dans le micro-canal. L'une de ces géométries est celle des micro-échangeurs à recombinaison de flux ("Split and Re-combine"), dont le principe est donné en détail dans [13]. Cette méthode a été étendue au cas de faibles nombres de Reynolds par [14, 15]. On sait que la modification de la forme du micro-canal permet d'augmenter efficacement le mélange et donc le transfert de chaleur dans le régime de convection forcée [16, 17, 18].

Un autre exemple de géométrie de mélange passif est celle de Chai et al. [19] qui met en jeu des parois horizontales "crantées". Pour ces auteurs, il s'agit d'étudier numériquement et en 3 dimensions l'influence de ces parois particulières sur le transfert de chaleur dans le cas d'un écoulement laminaire. En effet, ces micro-cavités donnent lieu à des recirculations ou écoulements secondaires qui génèrent une vitesse verticale particulièrement intéressante pour le mélange [20]. En comparant au cas d'un canal plan, Chai et al. [19] ont pu même montrer que ces irrégularités pouvaient dans certains cas doubler le nombre de Nusselt. D'un point de vue purement hydrodynamique, Passaggia [21] a étudié le comportement d'une couche limite laminaire le long d'une paroi plane présentant une déformation. Il a observé que la cellule de recirculation se formant en aval de la déformation peut générer localement un point d'inflexion dans l'écoulement et être à l'origine d'un lâcher tourbillonnaire.

Au carrefour de ces deux dernières études, nous proposons ici de déformer l'une des parois d'un canal plan pour forcer une dynamique tourbillonnaire avec la perspective d'intensifier les transferts de chaleur dans les micro-canaux.

## 2 Formulation mathématique

Le système considéré est un canal plan bidimensionnel de hauteur  $2H$  et longueur  $L$  dont la paroi supérieure présente une déformation capable d'évoluer dans le temps. Cette paroi est décrite par la fonction  $y_{top}^d(x^d, t^d)$  mimant la déformation comme une perturbation Gaussienne telle que schématisée sur la figure 1 :

$$y_{top}^d(x^d, t^d) = H + \tilde{\varepsilon}(t^d) \exp \left[ -\frac{(x - \tilde{x}_p)^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right] \quad (1)$$

où  $\tilde{x}_p$  et  $\tilde{\sigma}$  représentent respectivement la position de la déformation et sa largeur à mi-hauteur ; l'indice  $d$  représente les variables dimensionnées. On se limitera ici au cas où la déformation est stationnaire  $\tilde{\varepsilon}(t^d) = \tilde{\varepsilon}$  afin de caractériser la phénoménologie thermo-hydrodynamique ; l'étude instationnaire sera proposée dans une étude ultérieure.

L'écoulement dans le canal est décrit par les équations de Navier-Stokes sous la contrainte d'incompressibilité :

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} + \frac{Ra}{Re^2 Pr} T \mathbf{y} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

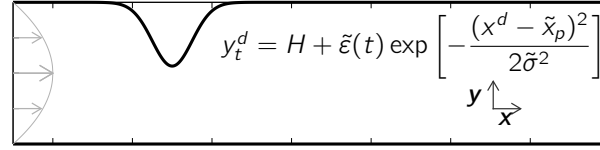


FIGURE 1 – Système étudié : canal présentant une déformation gaussienne sur la paroi supérieure.

complétées par une équation de convection-diffusion pour le champ thermique

$$\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \frac{1}{RePr} \Delta T \quad (4)$$

avec  $\mathbf{V} = (U, V)^T$ ,  $T$  et  $P$  le vecteur vitesse, la température et la pression adimensionnés. Les nombres de Reynolds  $Re$ , de Rayleigh  $Ra$  et de Prandtl  $Pr$  sont construits à partir de la vitesse débitante en entrée de canal  $U_0$ , la demi-hauteur du canal  $H$ , le coefficient d'expansion thermique  $\beta$ , la viscosité cinématique du fluide  $\nu$  et la diffusivité thermique  $a$  :  $Re = U_0 H / \nu$ ,  $Ra = g\beta\Delta T(H)^3 / (a\nu)$  et  $Pr = \nu / a$ . Ces grandeurs sont utilisées dans le reste de l'étude pour adimensionner le problème.

Ce système d'équations est complété par les conditions aux limites suivantes :

- La condition d'adhérence  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  sur les parois  $y = y_{top}$  et  $y = -1$  (celles-ci sont supposées imperméables)
- Un profil laminaire établi (écoulement de Poiseuille) en entrée de canal  $x = 0$  :

$$U = 1.5(1 - y^2) \quad (5)$$

$$V = 0 \quad (6)$$

- En  $x = L/H$ , la condition de sortie utilisée est celle proposée par Bade et Haldenwang [22] pour ses propriétés de stabilité numérique :

$$\partial_x V = 0, \quad \partial_x U = -\partial_y V. \quad (7)$$

### 3 Méthode numérique

La discrétisation spatiale utilisée est de précision spectrale par décomposition des champs dans la base des polynômes de Tchebychev utilisant les points de Gauss-Lobatto  $(\chi, \xi) = [-1; 1] \times [-1; 1]$  comme points de collocation dans les directions horizontales et verticales respectivement. On note les solutions discrétisées  $U_{Nx, Ny}$ ,  $V_{Nx, Ny}$ ,  $T_{Nx, Ny}$  et  $P_{Nx, Ny}$ , avec  $N_x$  et  $N_y$  le nombre de points de collocation. Les opérateurs de dérivation sont alors approchés par des matrices  $\mathbf{D}_x$  et  $\mathbf{D}_y$  carrées de taille  $N_x \times N_x$  dont l'expression analytique est donnée dans [23, 24]. Pour décrire la configuration présentée sur la figure 1, deux changements de variable ont été réalisés. Le premier permet de répartir les points  $(\chi, \xi)$  sur une grille équirépartie  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = [-L/2H, L/2H] \times [-1, 1]$  :

$$\tilde{x} = \frac{L}{2H} \frac{\arcsin(a\chi)}{\arcsin(a)}, \quad \tilde{y} = \frac{\arcsin(a\xi)}{\arcsin(a)} \quad (8)$$

et le second permet de prendre en compte la déformation géométrique sur la paroi supérieure :

$$x = \tilde{x} \quad (9)$$

$$y = \tilde{y} + \varepsilon(t) \exp \left[ \frac{(x - x_p)^2}{2\sigma^2} \right] \frac{1 + \tilde{y}}{2} \quad (10)$$

Le schéma d'intégration utilisé pour la résolution temporelle des équations (2)-(4) est similaire à celui proposé par [25] et [26]. Il consiste en une résolution implicite des termes linéaires et une extrapolation d'Adams-Bashforth pour les termes non-linéaires. La contrainte d'incompressibilité (3) est satisfaite par l'introduction d'une équation de Poisson pour la pression. Pour chaque pas de temps  $dt$ , l'algorithme de résolution est le suivant :

- Étape de prédiction : détermination de la vitesse non-solénoïdale  $\mathbf{V}_{Nx,Ny}^*$

$$\frac{3\mathbf{V}_{Nx,Ny}^* - 4\mathbf{U}_{Nx,Ny}^n + \mathbf{U}_{Nx,Ny}^{n-1}}{2dt} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}_{Nx,Ny}^* - 2\mathbf{NL}_v^n + \mathbf{NL}_v^{n-1} + 2dt \frac{Ra}{Re^2 Pr} T_{Nx,Ny}^{n+1} \mathbf{y} \quad (11)$$

où l'indice  $n$  représente la composante temporelle discrétisée :  $t^n = ndt$ ,  $\mathbf{NL}_v^n = [(\mathbf{V}_{Nx,Ny} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{Nx,Ny}]^n$  et  $\Delta = \mathbf{Dx}^2 + \mathbf{Dy}^2$ . La vitesse  $\mathbf{V}_{Nx,Ny}^*$  satisfait les conditions aux limites décrites précédemment.

- Étape de projection : détermination de la vitesse  $\mathbf{V}_{Nx,Ny}^{n+1}$  et de la pression  $P_{Nx,Ny}^{n+1}$ .

$$\mathbf{V}_{Nx,Ny}^{n+1} = \mathbf{V}_{Nx,Ny}^* - \nabla \phi \quad P_{Nx,Ny}^{n+1} = \phi \quad (12)$$

$$\Delta_{Nx,Ny} \phi = \nabla \cdot \mathbf{V}_{Nx,Ny}^* \quad (13)$$

Les conditions aux limites pour  $\phi$  sont des conditions de Neumann homogènes.

- Résolution de la température  $T_{Nx,Ny}^{n+1}$  :

$$\frac{3T_{Nx,Ny}^{n+1} - 4T_{Nx,Ny}^n + T_{Nx,Ny}^{n-1}}{2dt} = \frac{1}{Pr Re} \Delta T_{Nx,Ny}^{n+1} - 2NL_T^n + NL_T^{n-1} \quad (14)$$

avec  $NL_T^n = \mathbf{V}_{Nx,Ny} \cdot \nabla T_{Nx,Ny}^n$

## 4 Résultats

Comme l'a observé Passaggia [21] dans le cas d'une couche limite au passage d'une bosse, cette configuration particulière de canal présente une zone de recirculation en aval de la déformation.

La figure 2 montre pour différents nombres de Reynolds des sections verticales de la vitesse horizontale (Fig. 2.a) ainsi que sa dérivée seconde dans la direction verticale (Fig.2.b) dans la zone de recirculation ( $x = -3$ ). Cette dernière montre que la déformation de l'écoulement induite par la bosse génère deux points d'inflexion. D'après [21], ceux-ci sont susceptibles de générer un mécanisme de lâcher tourbillonnaire, particulièrement intéressant pour améliorer le transfert de chaleur car il génère une forte vorticité dans une région proche de la paroi.

Le premier point d'inflexion, situé dans la bulle de recirculation, se décale vers le centre du canal lorsque le nombre de Reynolds augmente alors que le second, localisé dans la partie inférieure du canal ( $y < 0$ ),

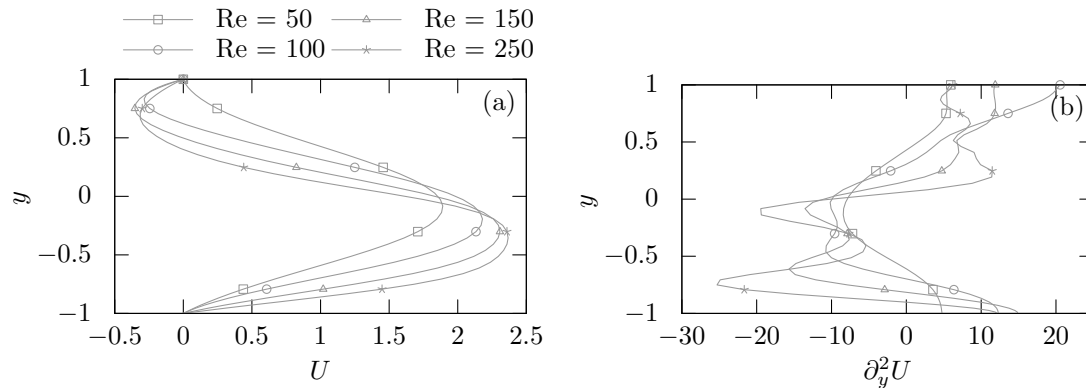


FIGURE 2 – (a) Profil vertical de la vitesse horizontale et (b) Dérivée seconde selon la direction  $y$  de la vitesse horizontale  $\partial_y^2 U$  ( $Ra = 0$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ ).

se rapproche de la paroi du bas ( $y = -1$ ). À ce stade, il s'agit de déterminer la longueur de cette bulle de recirculation à l'aide de la méthode proposée par Gallaire et al. [27] dans le cas d'une couche limite qui se décolle au contact d'une bosse puis se recolle à la paroi en aval de l'écoulement. Cette longueur est calculée à partir des couples  $(x_d, y_d)$  et  $(x_r, y_r)$  qui sont les coordonnées du point de détachement  $D$  et de rattachement  $R$  de l'écoulement à la paroi. Un exemple pour  $Re = 100$  est donné sur la figure 3.

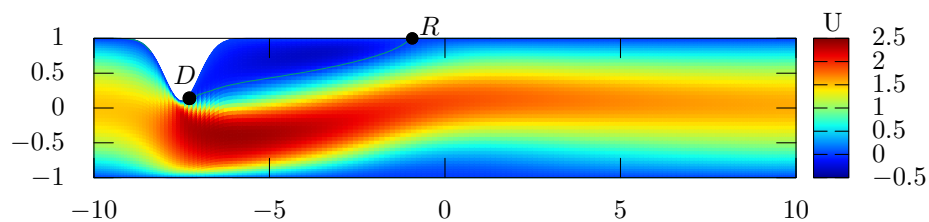


FIGURE 3 – Intensité de la vitesse horizontale  $U$  dans la cavité à l'état stationnaire pour  $Re = 100$ ,  $Ra = 0$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ . Les points  $D$  et  $R$  permettent de délimiter la zone de recirculation.

Le point de détachement  $D$  est déterminé pour le couple de coordonnées  $(x_d, y_d)$  pour lequel l'iso-ligne  $U = 0$  se décolle de la paroi et le couple  $(x_r, y_r)$  est caractérisé par le rattachement de cette iso-ligne sur la paroi. Les valeurs des coordonnées de  $D$  et  $R$  sont présentées dans le tableau 1

TABLE 1 – Coordonnées de  $D$  et  $R$  pour plusieurs nombres de Reynolds ( $Ra = 0$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ ).

$Re$	Détachement		Rattachement	
	$x_d$	$y_d$	$x_r$	$y_r$
10	-7.03	0.34	-5.82	1.00
25	-7.12	0.22	-4.72	1.00
50	-7.26	0.18	-2.92	1.00
75	-7.28	0.16	-1.70	1.00
100	-7.28	0.14	-0.95	1.00
125	-7.32	0.12	-0.29	1.00
150	-7.33	0.13	0.89	1.00
175	-7.34	0.11	1.45	1.00
200	-7.34	0.12	1.85	1.00

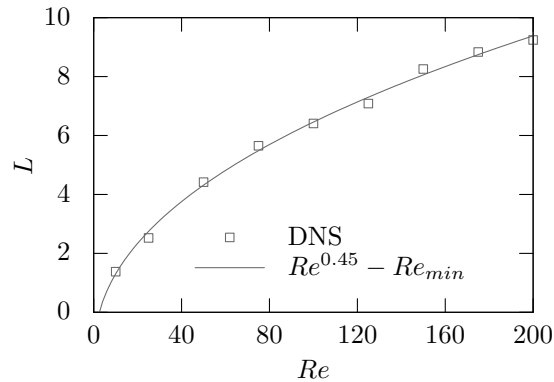


FIGURE 4 – Longueur de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ .

La figure 4 montre l'évolution de la longueur de la zone de recirculation en fonction du nombre de Reynolds, ainsi qu'un ajustement en puissance :  $L = -Re_{min} + Re^{0.45}$ , avec  $Re_{min} = 1.52$ . Dans le cas bien connu d'une géométrie comprenant une marche (Armaly et al. [28]), la longueur de la zone de recirculation augmente linéairement en fonction du nombre de Reynolds et Passaggia [21] ont constaté ce même phénomène dans le cas d'un écoulement de couche limite qui rencontre une bosse. Contrairement à ces études, notre configuration présente une plus courte longueur de recirculation. Ce phénomène peut s'expliquer par la présence d'une vitesse verticale imposée par le confinement dû aux parois du canal (Fig. 5).

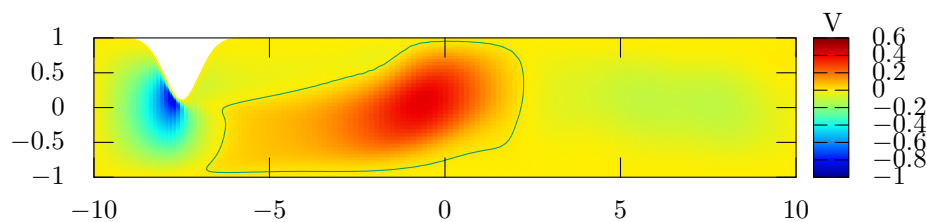


FIGURE 5 – Intensité de la vitesse verticale  $V$  dans la cavité à l'état stationnaire pour  $Re = 200$ ,  $Ra = 0$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ .

Tel qu'observé par Passaggia [21], lorsque le nombre de Reynolds devient suffisamment grand, des tourbillons se détachent de la zone de recirculation créant ainsi du mélange dans l'écoulement. Cette transition apparaît pour  $Re \approx 250$  dans notre configuration. Ce lâcher tourbillonnaire est observable sur la figure 6.

La figure 7.a montre l'évolution de la vitesse verticale au point  $(-7,0)$  et la figure 7.b correspond au spectre temporel. Ce dernier permet de mettre en évidence la présence de plusieurs basses fréquences avec une prédominance du pic à  $\nu = 0.15$ . Cette fréquence coïncide avec la fréquence des variations de plus forte amplitude de la vitesse verticale sur la figure 7.a et du passage des plus gros tourbillons. La figure 8 représente les fluctuations de vorticité  $W' = W - \bar{W}$ ;  $\bar{W}$  représentant la moyenne temporelle de la vorticité totale  $W$ . On observe des zones à forte vorticité proches de la paroi (figure 8.b) ce qui rend le transfert de chaleur plus efficace puisque ces zones favorisent le mélange des régions chaudes et froides de l'écoulement.

Afin de quantifier le transfert de chaleur généré par notre régime d'écoulement, nous calculons le nombre

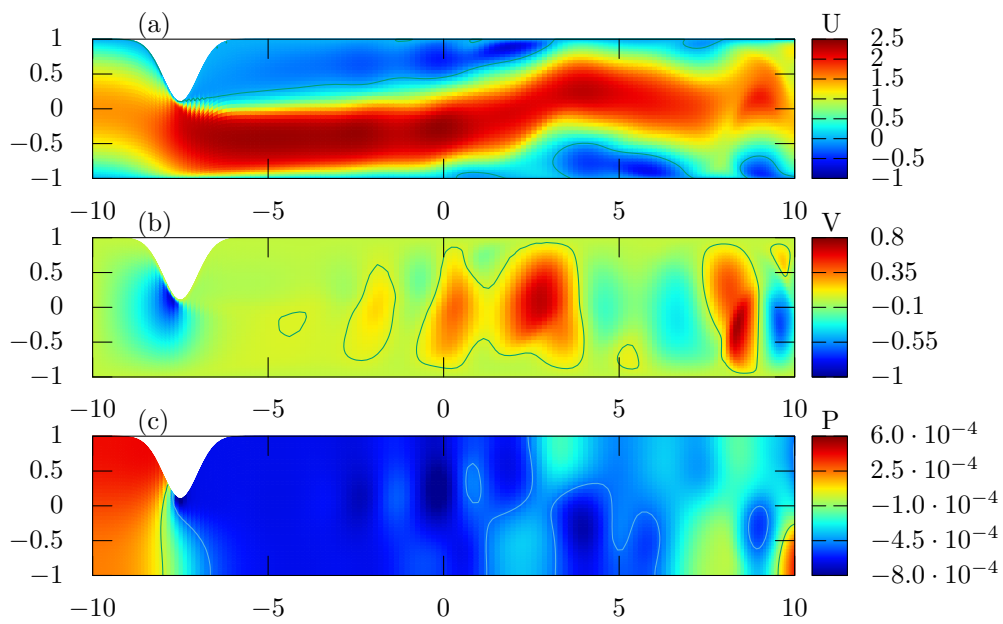


FIGURE 6 – (a) Intensité de la vitesse horizontale  $U$ , (b) Intensité de la vitesse verticale  $V$  et (c) pression dans la cavité  $Re = 350$ ,  $Ra = 300$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ .

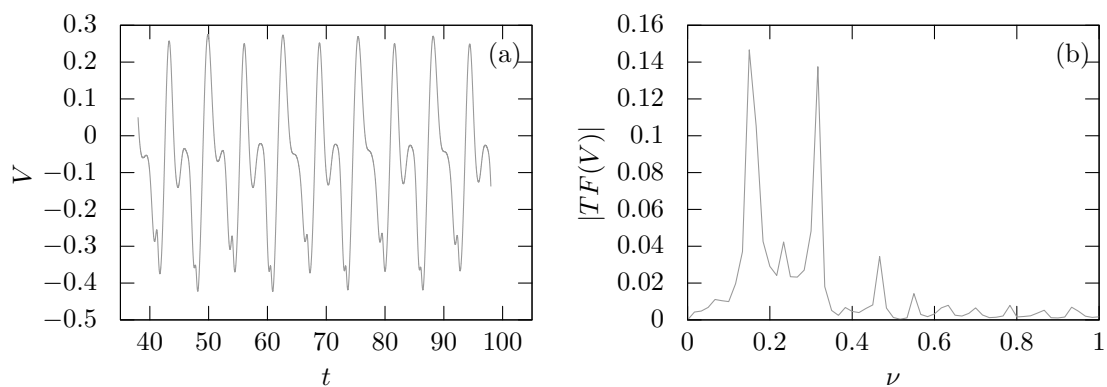


FIGURE 7 – (a) Intensité de la vitesse verticale au point (7,0), (b) valeur absolue de la transformée de Fourier du signal (a) ( $Re = 350$ ,  $Ra = 300$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ ).

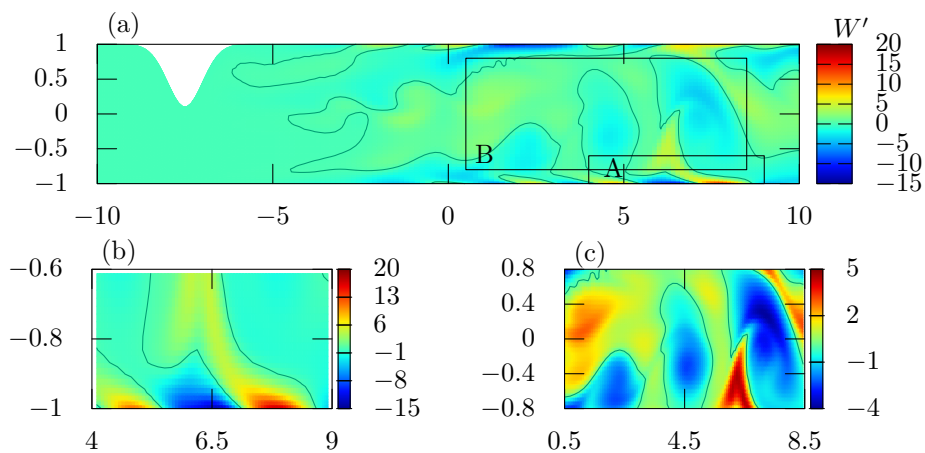


FIGURE 8 – (a) Fluctuations de vorticité dans toute la cavité pour  $Re = 350$ ,  $Ra = 0$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$ . (b) et (c) sont respectivement des zooms sur les régions A et B du graphique (a).

de Nusselt moyen sur la paroi chauffée.

$$Nu(t) = \int_{-10}^{10} \partial_y T(x, y = -1, t) dx \quad (15)$$

Dans le cas d'un canal sans déformation, le nombre de Nusselt (constant) vaut  $Nu_0 = 4.3$ . En présence de la déformation de paroi, le nombre de Nusselt moyenné sur une période de l'écoulement atteint la valeur de 6.63 ce qui représente un gain d'environ 50 %. L'évolution temporelle du nombre de Nusselt

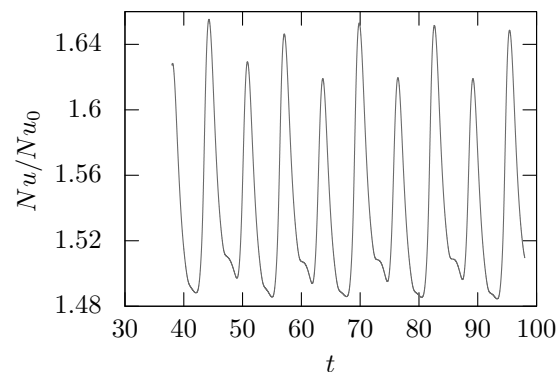


FIGURE 9 – Évolution temporelle du nombre de Nusselt pour  $Re = 350$ ,  $Ra = 300$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\varepsilon = 0.9$

de la figure 9 permet d'identifier deux contributions améliorant le transfert de chaleur. La première est celle de la vitesse verticale de l'état statistiquement stationnaire (fig. 5) qui induit une augmentation de la valeur moyenne du nombre de Nusselt. Cette vitesse transporte alors les plus hautes températures vers la paroi froide. La seconde contribution est apportée par le lâcher tourbillonnaire, d'après la concordance de la fréquence d'oscillations du nombre de Nusselt et celle de la figure 7.

## 5 Perspectives

Nous avons pu constater qu'une déformation de paroi en configuration de micro-canal plan chauffé différenciellement améliore le transfert de chaleur. Ceci résulte à la fois de la modification de l'écoulement moyen en aval de la déformation et de la dynamique instationnaire du lâcher tourbillonnaire. Les prochains efforts porteront sur la caractérisation du transfert de chaleur quand la déformation évolue au cours du temps.

## Références

- [1] D. B. Tuckerman, R. F. W. Pease, High-performance heat sinking for VLSI, IEEE Electron device letters, 2(5) (1981) 126-129.
- [2] Rahman, Muhammad Mustafizur, Measurements of heat transfer in microchannel heat sinks, International Communications in Heat and Mass Transfer, 27(4) (2000) 495-506.
- [3] M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi, Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes. International journal of heat and mass transfer, 32(2) (1989) 261-269.
- [4] M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes—II. International journal of heat and mass transfer, 33(7) (1990) 1417-1427.



- [5] N. T. Nguyen, Z. Wu, Micromixers a review. *Journal of micromechanics and microengineering*, 15(2) (2004) R1.
- [6] V. Hessel, L. Holger, S. Friedhelm, Micromixers a review on passive and active mixing principles, *Chemical Engineering Science* 60(8) (2005) 2479-2501.
- [7] S. Barton, A. Glezer, The formation and evolution of synthetic jets, *Physics of fluids* 10(9) (1998) 2281-2297.
- [8] A. Glezer, M. Amitay, Synthetic jets, *Annual review of fluid mechanics* 34(1) (2002) 503-529.
- [9] P. Woias, H. Karin, Y.-G. Erwin, An active silicon micromixer for microTAS applications, *Micro Total Analysis Systems*, Springer Netherlands, (2000) 277-282.
- [10] S. K. Hsiung, C. H. Lee, J. L. Lin, G. B. Lee, Active micro-mixers utilizing moving wall structures activated pneumatically by buried side chambers, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 17(1), (2006) 129.
- [11] D. Chakraborty, J. R. Prakash, J. Friend, L. Yeo, Fluid-structure interaction in deformable micro-channels, *Physics of Fluids*, 24(10) (2012) 102002.
- [12] H. T. G. Van Lintel, F. C. M. Van de Pol, S. Bouwstra, A piezoelectric micropump based on micromachining of silicon, *Sensors and actuators* 15(2) (1988) 153-167.
- [13] F. Schönfeld, V. Hessel, C. Hofmann, An optimised split and recombine micromixer with uniform chaotic mixing, *Lab on a Chip*, 4(1) (2004) 65-69.
- [14] S. Hardt, H. Pennemann, F. Schönfeld, Theoretical and experimental characterization of a low-Reynolds number split-and-recombine mixer, *Microfluidics and Nanofluidics*, 2(3) (2006) 237-248.
- [15] M. A. Ansari, K. Y. Kim, K. Anwar, S. M. Kim, A novel passive micromixer based on unbalanced splits and collisions of fluid streams, *Journal of micromechanics and microengineering* 20(5) (2010) 055007.
- [16] C. E. Kalb, J. D. Seader, Heat and mass transfer phenomena for viscous flow in curved circular tubes, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15(4) (1972) 801-817.
- [17] S. V. Patankar, V. S. Prapat, D. B. Spalding, Prediction of laminar flow and heat transfer in helically coiled pipes, *Journal of Fluid Mechanics*, 62(3) (1974) 539-551.
- [18] Abul-Hamayel, A. Mohammad, Heat-transfer in helically coiled tubes with laminar flow, (1979).
- [19] L. Chai, X. Guo Dong, W. Hua Sheng, Numerical study of laminar flow and heat transfer in microchannel heat sink with offset ribs on sidewalls, *Applied Thermal Engineering*, 92 (2016) 32-41.
- [20] V. Mengeaud, J. Josserand, H. Girault, Mixing processes in a zigzag microchannel : finite element simulations and optical study, *Analytical chemistry*, 74(16) (2002), 4279-4286.
- [21] P. Y. Passaggia *Instabilités d'écoulements décollés et leur contrôle*, thèse de doctorat. Université d'Aix Marseille France.
- [22] F. Bade, P. Haldenwang, High order scheme for thermally driven flows in an open channel, *Computers & fluids* 27(2) (1998) 273-290.
- [23] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods* Courier Corporation (2001).
- [24] R. Peyret, *Spectral methods for incompressible viscous flow*, Springer Science & Business Media 148 (2013).

- [25] J. M. Vanel, R. Peyret, P. Bontoux, A pseudo-spectral solution of vorticity-stream function equations using the influence matrix technique, (1986) 463-475.
- [26] I. Raspo, S. Hugues, E. Serre, A. Randriamampianina, P. Bontoux, A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows, *Computers & fluids*, 31(4) (2002) 745-767.
- [27] F. Gallaire, M. Marquillie, U. Ehrenstein, Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary layers, *Journal of Fluid Mechanics* 571 (2007) 221-233.
- [28] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, B. Schönung, Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 127 (1983) 473-496.