

# Vers un couplage plus naturel des méthodes de Galerkin Discontinue avec ondes planes et Éléments Finis pour l'acoustique

M. GABORIT<sup>a,b,†</sup>, O. DAZEL<sup>a</sup>, G. GABARD<sup>c</sup>, P. GÖRANSSON<sup>b</sup>

a. LAUM UMR 6613, Université du Maine, Le Mans, France

b. MWL, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède

c. ISVR, University of Southampton, Southampton, Royaume Uni

† Adresse de contact : gaborit@kth.se

## Résumé :

*Ce travail présente une réécriture de la technique de couplage entre la méthode de Galerkin Discontinue avec ondes planes et la Méthode des Éléments Finis. La première version présentée en 2015 souffrait d'une perte d'un ordre de convergence par rapport aux Éléments Finis liée à la dérivation des fonctions de forme. Cette nouvelle proposition résout ce problème et apporte un couplage plus naturel entre les méthodes, basé sur le formalisme des vecteurs d'état. Elle simplifie également l'extension de l'approche à de nouvelles physiques. Les éléments théoriques relatifs à la technique de couplage sont proposés et deux exemples sont étudiés pour mettre en valeur les capacités de l'approche.*

## Abstract :

*This work presents a full rewrite of the coupling between the Discontinuous Galerkin Method with plane waves and the Finite Element Method. The first version was proposed in 2015 and its performance was, at that time, crippled by the loss of one order of convergence due to the derivation of the shape functions. This new strategy allows to overcome this drawback and gives a more natural, state-vector based coupling. Extending the method to new types of media is also easier under this new formulation. Theoretical description of the coupling procedure is given as well as two examples aiming at presenting the new approach's capacities.*

**Mots clefs : MEF, DGM, couplage, convergence, vecteur d'état**

## 1 Introduction

Le besoin pour des simulations rapides et précises ne cesse de croître dans l'industrie comme en recherche. Disposer de moyens de calcul efficaces et adaptés est de première importance mais représente un vrai défi compte tenu de la disparité des situations étudiées.

Au delà de la recherche d'une technique idéale se profilent des solutions intermédiaires ; s'il est si compliqué de tout modéliser par une même approche, pourquoi ne pas en assembler plusieurs ? Les dernières

années ont ainsi vu se développer une nouvelle classe d'outils reposant sur plusieurs méthodes combinées pour contrebalancer leurs défauts respectifs. Différents auteurs ont ainsi proposé, pour l'acoustique, le couplage de la MEF avec d'autres solutions comme la Virtual Theory of Complex Rays [3] ou la Wave Based Method [4].

Dans ce travail, un couplage entre Méthode des Éléments Finis (MEF) et Méthode de Galerkin Discontinue avec Ondes Planes (PWDGM) est proposé. Les premiers développements dans ce sens avaient été présentés au cours du Congrès Français de Mécanique 2015 [1] mais présentaient alors des problèmes de performance. En effet, le couplage s'accompagnait, dans la première version, de la perte d'un ordre de convergence due à la dérivation des fonctions de forme de la MEF. La technique, alors basée sur l'expression de toutes les contributions dans un formalisme propre à la PWDGM, a depuis été repensée. Désormais, les contributions dans le domaine MEF sont directement imposées sur les termes d'interface et dans le domaine PWDGM sur la composante réentrante du flux en fonction des éléments du vecteur d'inconnues. Ces deux points s'accordent avec l'esprit des deux techniques et permettent une prise en compte de l'interface plus naturelle. La version présentée ici est mise à l'épreuve sur un exemple académique ainsi que sur un système plus complexe.

Dans une première section, les équations à la base des deux méthodes seront brièvement rappelées en appuyant particulièrement la description des termes d'interface. Une seconde section abordera le couplage lui-même qui sera testé sur plusieurs cas d'application présentés en troisième partie.

## 2 Rappel sur les méthodes

Cette section a pour objectif de rappeler la forme des équations pour chacune des méthodes. Afin de conserver des notations simples, chaque méthode est présentée sur un domaine générique  $\Omega$  ayant pour frontière  $\partial\Omega$  comme indiqué en figure 1. La frontière est supposée suffisamment régulière et le problème bien posé. Seuls les déplacements harmoniques sont considérés ici, avec une convention temporelle positive  $e^{j\omega t}$ .

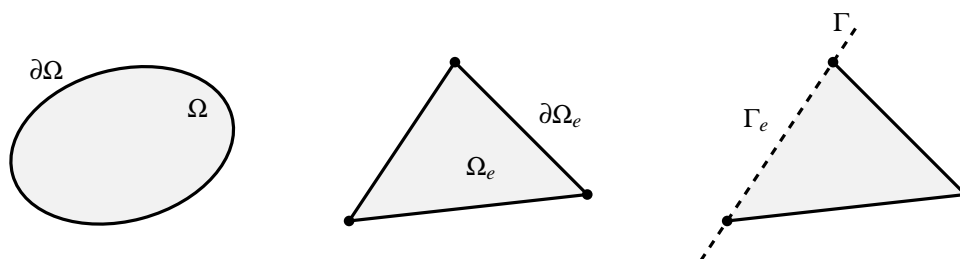


FIGURE 1 – Le domaine complet est nommé  $\Omega$  et sa frontière  $\partial\Omega$ . L'interface entre deux domaines modélisés différemment est noté  $\Gamma$ . Les indices  $e$  et  $e'$  symbolisent la restriction d'une quantité à un élément.

### 2.1 Méthode des Éléments Finis

La Méthode des Éléments Finis (MEF) repose sur la discrétisation d'une forme faible pouvant généralement se mettre sous la forme :

$$\int_{\Omega} a(\mathbf{f}, \delta\mathbf{f}) \, d\Omega + \int_{\Omega} L(\delta\mathbf{f}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} b(\mathcal{D}\mathbf{f}, \delta\mathbf{f}) \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta\mathbf{f} \quad (1)$$

où  $\mathbf{f}$  et  $\delta\mathbf{f}$  représentent les champs physiques et les champs tests associés. Les fonctions  $b$ ,  $a$  et  $L$  décrivent respectivement les conditions aux frontières, le comportement dans le volume du domaine et les forces volumiques s'appliquant éventuellement. Les deux derniers termes n'étant pas impactés par le couplage, ils seront omis dans la suite.

Le terme de surface fait intervenir les champs tests  $\delta\mathbf{f}$  et leurs dérivées spatiales  $\mathcal{D}\mathbf{f}$ . Pour un fluide, la fonction  $b$  s'écrit classiquement  $b(\mathcal{D}\mathbf{f}, \delta\mathbf{f}) = 1/\rho\omega^2 (\nabla p \cdot \mathbf{n}) \delta\mathbf{f}$ , avec  $\rho$  la masse volumique du medium et  $\partial/\partial n$  le gradient normal à l'interface considérée.

Une fois discrétisée, la forme faible s'écrit sous la forme d'une somme de composantes sur chacun des  $N$  éléments. Ainsi, le terme d'interface devient :

$$\sum_{e=1}^N \int_{\partial\Omega_e} b(\mathcal{D}\mathbf{f}_e, \delta\mathbf{f}_e) d\Gamma, \quad \forall \delta\mathbf{f} \quad (2)$$

avec  $\partial\Omega_e$  la partie de la frontière appartenant à l'élément  $e$ .

## 2.2 Méthode de Galerkin Discontinue avec Ondes Planes

La méthode de Galerkin Discontinue avec ondes planes (*Plane Waves-based Discontinuous Galerkin Method*, PWDGM) repose sur un système d'équations de conservation du premier ordre en temps et en espace [2] :

$$j\omega\mathbf{S} + [\mathbf{A}] \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x} + [\mathbf{B}] \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$\mathbf{S}$  est un vecteur d'état dont les composantes s'expriment comme une combinaison linéaire des champs physiques  $\mathbf{f}$  et de leur dérivés spatiales  $\mathcal{D}\mathbf{f}$ . A titre d'exemple, le vecteur d'état pour un fluide s'écrit  $\mathbf{S} = \{v_x, v_y, p^f\}^T$ .

Le domaine d'étude  $\Omega$  est ensuite divisé en  $N'$  éléments et sur chacun d'eux une forme variationnelle de (3) est écrite :

$$-\sum_{e'=1}^{N'} \int_{\Omega_{e'}} \mathbf{T}_{e'}^T \left( j\omega + [\mathbf{A}_{e'}] \frac{\partial}{\partial x} + [\mathbf{B}_{e'}] \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{S}_{e'} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{T}_{e'} \quad (4)$$

$e'$  indexant les éléments, avec  $\mathbf{S}_{e'}$  &  $\mathbf{T}_{e'}$  correspondant respectivement aux inconnues et fonctions tests associées à l'élément  $e'$ . L'application du théorème de Green-Riemann sur chaque intégrale élémentaire amène à :

$$\sum_{e'=1}^{N'} \int_{\Omega_{e'}} \left( j\omega\mathbf{T}_{e'} + [\mathbf{A}_{e'}]^T \frac{\partial\mathbf{T}_{e'}}{\partial x} + [\mathbf{B}_{e'}]^T \frac{\partial\mathbf{T}_{e'}}{\partial y} \right)^T \mathbf{S}_{e'} d\Omega + \sum_{e'=1}^{N'} \int_{\partial\Omega_{e'}} \mathbf{T}_{e'} [\mathbf{F}_{e'}] \mathbf{S}_{e'} d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{T}_{e'} \quad (5)$$

où  $[\mathbf{F}_{e'}] = [\mathbf{A}_{e'}]n_x + [\mathbf{B}_{e'}]n_y$  est la matrice de flux dans la direction  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ , normale à l'interface considérée, sortant de l'élément. Il convient alors d'opérer un choix judicieux pour la forme des champs tests  $\mathbf{T}_{e'}$  de sorte que la première intégrale de (5) s'annule [2] :

$$\mathbf{T}_{e'} = \sum_{n=1}^{N_w} b_{e'n} \mathbf{V}_{e'n} e^{-j\mathbf{k}_{e'n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}_{e'})} , \quad \left( j\omega + [\mathbf{A}_{e'}]^T \frac{\partial}{\partial x} + [\mathbf{B}_{e'}]^T \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{T}_{e'} = 0 , \quad \forall e'$$

avec  $\mathbf{c}_{e'}$  pointant le centre de l'élément considéré et  $\mathbf{k}_{e'n}$  étant le vecteur d'onde associé à la  $n$ -ième onde de la base. Le vecteur  $\mathbf{S}_{e'}$  est décomposé de manière similaire :

$$\mathbf{S}_{e'} = \sum_{n=1}^{N_w} a_n \mathbf{U}_{e'n} e^{-j\mathbf{k}_{e'n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}_{e'})} \quad (6)$$

Dans ce formalisme,  $\mathbf{U}_n$  spécifie comment la  $n$ -ième onde contribue aux champs physiques et  $a_n$  désigne l'amplitude de l'onde en question (inconnue dans le système linéaire final).

L'expression finale de la PWDGM se résume ainsi à :

$$\sum_{e'=1}^{N'} \int_{\partial\Omega_{e'}} \mathbf{T}_{e'}^T [\mathbf{F}_{e'}] \mathbf{S}_{e'} \, d\Gamma = 0 , \quad \forall \mathbf{T}_{e'} \quad (7)$$

Une explication plus détaillée est proposée dans [2].

### 3 Couplage

On considère désormais un système composé pour moitié d'un domaine MEF et pour l'autre d'un domaine PWDGM comme présenté sur la figure 2. Ces deux sous-domaines partagent une interface  $\Gamma$  que la procédure de couplage doit permettre de modéliser. Mathématiquement, la représentation du domaine complet se fait en additionnant les contributions des deux méthodes. Au niveau des interfaces, l'opérateur complet s'écrit alors :

$$I_C = \sum_{e'=1}^{N'} \int_{\partial\Omega_{e'}} \mathbf{T}_{e'}^T [\mathbf{F}_{e'}] \mathbf{S}_{e'} \, d\Gamma - \sum_{e=1}^N \int_{\partial\Omega_e} \mathcal{D}\mathbf{f}_e \delta\mathbf{f}_e \, d\Gamma \quad (8)$$

Il faut alors distinguer deux catégories de frontières, celles situées à la frontière de  $\Omega$  d'une part — traitées classiquement par l'une des méthodes, et celles le long de  $\Gamma$  d'autre part, qui doivent être réécrites.

Par le jeu des discrétisations, chacune des méthodes voit l'interface comme une somme de segments (un par élément jouxtant  $\Gamma$ ) définis par les deux maillages. Rien n'impose que les méthodes partagent la même discrétisation de  $\Gamma$  et, pour pouvoir écrire simplement les relations de continuité, une manière unifiée de parcourir l'interface est nécessaire. Les segments entre 2 nœuds consécutifs sur  $\Gamma$  sont dénombrés de 1 à  $N_k$  de sorte que l'ensemble des  $\Gamma_k$  forme une partition de  $\Gamma$  (voir figure 3) :  $\bigcup_{k=1}^{N_k} \Gamma_k = \Gamma$ . Une application  $\mathcal{M} : k \mapsto (e, e')$  permettant de retrouver pour chaque  $\Gamma_k$  les éléments  $e$  et  $e'$  adjacents est aussi considérée. Dans la suite, les indices  $e$  et  $e'$  utilisés dans des sommes sur les  $\Gamma_k$  sont supposés déduits *via*  $\mathcal{M}$ .

Il est alors possible de réécrire l'opérateur d'interface (8) comme une somme unique sur les  $\Gamma_k$  :

$$I_C = \sum_{k=1}^{N_k} \left( \int_{\Gamma_k} \mathbf{T}_{e'}^T [\mathbf{F}_{e'}] \mathbf{S}_{e'} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_k} \mathcal{D}\mathbf{f}_e \delta\mathbf{f}_e \, d\Gamma \right) \quad (9)$$

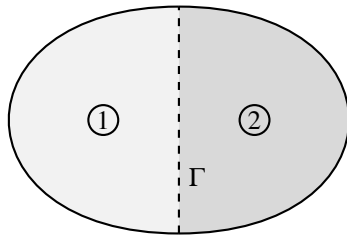


FIGURE 2 – Les domaines 1 et 2 sont modélisés avec différentes méthodes et couplés au niveau de l'interface  $\Gamma$ . Les media de part et d'autres peuvent être différents.

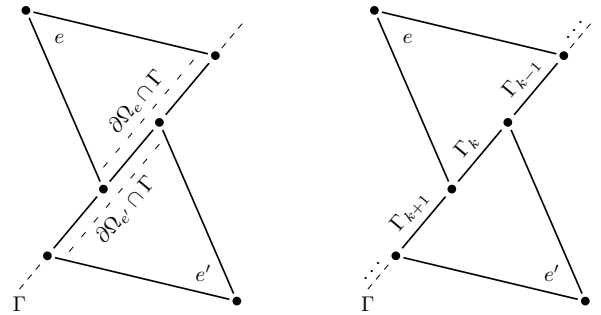


FIGURE 3 – Réindexation des différents segments composant l'interface. Les segments sont numérotés de 1 à  $N_k$ , notés  $\Gamma_k$  et vérifient :  $\bigcup_{k=1}^{N_k} \Gamma_k = \Gamma$ .

En chaque point de  $\Gamma$ , indépendamment des media de part et d'autre, les relations de continuité peuvent être écrites et mise sous la forme :

$$[\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathcal{D}\mathbf{f} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}']\mathbf{S} \quad (10)$$

La technique classiquement utilisée pour l'évaluation des termes de frontière en PWDGM [2] consiste à exprimer les phénomènes en termes de flux entrant et sortant de l'interface (voir figure 4). Mathématiquement cette séparation s'effectue en projetant  $\mathbf{S}$  sur les vecteurs propres de  $[\mathbf{F}]$  associés à des valeurs propres positives ou négatives. Dans ce but, il convient d'introduire  $[\mathbf{F}] = [\mathbf{P}][\mathbf{\Lambda}][\mathbf{Q}]$  avec  $[\mathbf{P}] = [\mathbf{Q}]^{-1}$  la matrice des vecteurs propres de  $[\mathbf{F}]$  et  $[\mathbf{\Lambda}]$  celle de ses valeurs propres. Les vecteurs propres sont alors séparés : dans  $[\mathbf{P}^{in}]$  ceux associés à une valeur propre positive et dans  $[\mathbf{P}^{out}]$  ceux dont la valeur propre est négative. Il vient alors :

$$\mathbf{S} = \left[ [\mathbf{P}^{in}] \mid [\mathbf{P}^{out}] \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{S}^{in} \\ \mathbf{S}^{out} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

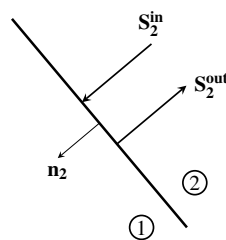


FIGURE 4 – Le flux traversant une interface peut se décomposer en une partie  $\mathbf{S}^{in}$  entrant dans l'interface et une autre,  $\mathbf{S}^{out}$  en sortant.

En remplaçant cette dernière expression dans (10) et en réarrangeant les termes, il vient :

$$\left[ [\mathbf{C}^{\mathcal{D}\mathbf{f}}] \mid -[\mathbf{C}^{out}] \right] \begin{Bmatrix} \mathcal{D}\mathbf{f} \\ \mathbf{S}^{out} \end{Bmatrix} = \left[ -[\mathbf{C}^{\mathbf{f}}] \mid [\mathbf{C}^{in}] \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{S}^{in} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

soit :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{D}\mathbf{f} \\ \mathbf{S}^{out} \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{S}^{in} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

La matrice  $[\mathbf{R}]$ , qui décrit les relations entre les termes des deux formulations à travers l'interface, est alors définie par :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{11}] & [\mathbf{R}_{12}] \\ [\mathbf{R}_{21}] & [\mathbf{R}_{22}] \end{bmatrix} = \left[ [\mathbf{C}^{Df}] \mid -[\mathbf{C}^{out}] \right]^{-1} \left[ -[\mathbf{C}^f] \mid [\mathbf{C}^{in}] \right] \quad (14)$$

L'utilisation de (13) permet de réexprimer entièrement l'opérateur de couplage (9) en fonction du vecteur d'inconnues.

$$\begin{aligned} I_C = \sum_{k=1}^{N_k} & \left( \int_{\Gamma_k} \delta \mathbf{f}_e [\mathbf{R}_{11}] \mathbf{f}_e \, d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \delta \mathbf{f}_e [\mathbf{R}_{12}] [\mathbf{Q}_{e'}^{in}] \mathbf{S}_{e'} \, d\Gamma \right. \\ & + \int_{\Gamma_k} \mathbf{T}_{e'}^T [\mathbf{F}_{e'}] [\mathbf{P}_{e'}^{out}] [\mathbf{R}_{21}] \mathbf{f}_e \, d\Gamma \\ & \left. + \int_{\Gamma_k} \mathbf{T}_{e'}^T [\mathbf{F}_{e'}] \left( \mathbf{P}_{e'}^{in} + \mathbf{P}_{e'}^{out} [\mathbf{R}_{22}] \right) [\mathbf{Q}_{e'}^{in}] \mathbf{S}_{e'} \, d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (15)$$

L'opérateur de couplage est ainsi entièrement réécrit en fonction des éléments du vecteur d'inconnues. Cette réécriture permet ainsi d'écrire le transfert des champs au travers de l'interface et présente l'avantage de ne pas utiliser la dérivation des fonction de forme de la MEF.

## 4 Exemples

Deux exemples sont présentés dans la suite. Le premier, académique, permet d'analyser les propriétés de convergence et de dispersion propres au couplage de manière quantitative. Plusieurs points sont ainsi étudiés pour mieux comprendre le comportement du couplage et ses limitations. Le second exemple est basé sur un domaine rassemblant des éléments géométriques complexes pouvant représenter un défi pour l'une ou l'autre des méthodes. La MEF permet en effet d'utiliser un maillage fin, épousant au mieux les éléments géométriques détaillés. Cette capacité d'adaptation a toutefois un prix et les performances de la MEF pour les grands domaines laissent parfois à désirer. La PWDGM est la plus efficace lorsque les éléments ne sont pas trop petits, de sorte que les frontières ne soient pas trop proches du centre (origine du champ pour la reconstruction). Les ondes ont ainsi assez d'espace se combiner avant le calcul des flux. Cette préférence pour des éléments de taille relativement importante permet d'envisager le maillage de grands domaines à moindre coût. La PWDGM peut néanmoins voir ses capacités diminuées lorsque la géométrie est trop détaillée. Dans le deuxième exemple, la MEF ainsi est utilisée pour modéliser un élément résonant à la géométrie complexe placé dans un domaine plus large lui modélisé majoritairement en PWDGM. Cet exemple vise à tester la fiabilité de la méthode hybride proposée et à attester qualitativement de son bon fonctionnement sur un problème réaliste.

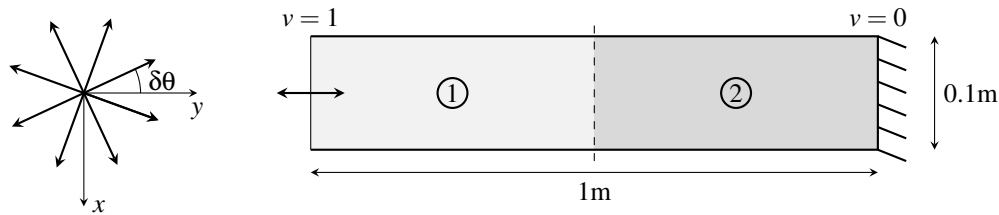


FIGURE 5 – Cavité acoustique de  $1 \times 0.1$  m excitée à gauche par une vitesse unitaire. La séparation indique la limite des domaines alloués à la MEF ou à la PWDGM. Au gauche, un exemple de directions pour une base d’ondes avec  $N_w = 8$ ,  $\delta\theta$  règle l’orientation de la première onde de la base par rapport à l’axe  $y$ .

## 4.1 Cavité acoustique — Tube de Kundt

Ce cas d’application s’appuie sur la simulation du champ de pression dans une cavité acoustique fermée, excitée par une vitesse normale unitaire à l’une des extrémités (voir figure 5). La cavité mesure  $0,1 \times 1$  m et est séparée en 2 zones de taille égale allouées à la MEF (maillage triangulaire et interpolation quadratique, TR6) et à la PWDGM (maillage rectangulaire, 4 mailles suivant  $y$ , 1 suivant  $x$ ). Les tests ont été effectués en intervertissant les méthodes sans que cela ne produise de changement significatif sur les résultats. Seuls les résultats utilisant la MEF pour le domaine 1 et la PWDGM pour le domaine 2 sont présentés (voir figure 5)

La solution analytique pour ce système est connue, ce qui permet une évaluation de l’erreur relative  $\epsilon$  commise par la méthode (au sens de la norme  $\mathcal{L}_2$ ) :

$$\epsilon = \left( \frac{\int_{\Omega} |p - p_{ref}|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} |p_{ref}|^2 d\Omega} \right)^{1/2} \quad (16)$$

Plusieurs tests sont menés sur ce modèle simple. Dans un premier temps, la discrétisation du domaine MEF est graduellement raffinée afin d’évaluer les propriétés de convergence de la méthode mixte. Ce test est ainsi mené pour différents nombres d’ondes dans la base & différents angles d’orientation  $\delta\theta$ . Les résultats sont présentés en figure 6.

Le graphique 6.a) est obtenu pour une situation favorable à la PWDGM. En effet, pour  $\delta\theta = 0$ , au moins une des ondes de la base est alignée avec la solution recherchée et permet une bonne reconstruction. Dans ce cas précis, la vitesse de convergence de la méthode s’accorde avec celle de la référence MEF (en pointillés). Ce premier résultat indique que le couplage ne semble pas induire de perte de précision comparé aux méthodes seules et en particulier à la MEF.

Pour les graphes b) et c) de la figure 6,  $\delta\theta \neq 0$  et une saturation de la convergence apparaît. En effet, lorsque le nombre d’ondes dans la base est trop faible et/ou qu’aucune n’est alignée avec la solution, des erreurs d’approximation s’installent. De fait, la figure 6.b) montre que le niveau de la saturation dépend significativement de  $N_w$ . Plus la base d’onde est grande et plus elle admet de directions privilégiées (une par onde), réduisant ainsi les angles pour lesquels l’approximation est mauvaise.

Il convient toutefois de noter que les courbes pour  $N_w = 16$  restent inchangées quelque soit  $\delta\theta$ . L’explication est à chercher dans la comparaison du niveau d’erreur de la MEF à celui de la PWDGM. En ajoutant des ondes dans la base, le niveau d’erreur maximal pour la PWDGM [2] diminue et, à partir d’un certain  $N_w$ , devient systématiquement plus faible que celui de la MEF. Pour  $N_w = 16$ , l’erreur

PWDGM est plus faible que celle associée à la MEF, insensible à l'angle  $\delta\theta$ . Cette indépendance vis-à-vis de  $\delta\theta$  et la domination de l'erreur par la MEF s'associent pour expliquer la convergence du schéma hybride à la vitesse des EF pour les trois graphes à  $N_w = 16$ .

Une manière de pousser l'analyse dans ce sens consiste à faire varier l'angle  $\delta\theta$  entre 0 et  $\pi$  tout en conservant constants  $N_w$  et le raffinement du maillage EF. Les résultats pour différents  $N_w$  sont présentés en figure 7. Sur cette figure sont également reportés les angles  $\delta\theta = 0.1$  rad et  $\delta\theta = \pi/3$  rad (traits noirs) utilisés en figure 6.

Sur cette figure, les courbes pour la méthode hybride (foncées) sont à comparer à leurs équivalents pour un domaine entièrement modélisé par DGM (clair). Comme indiqué précédemment, l'erreur relative admet un minimum pour chaque  $\delta\theta$  amenant une des ondes de la base dans l'axe de la solution. Ce comportement avait déjà été observé [2] et se retrouve ici pour la méthode hybride. Dans ce dernier cas, les pics d'erreur (sommet des arches) sont moins élevés que pour la référence ; ce phénomène s'explique en étudiant les mécanismes de génération d'erreur en PWDGM.

L'erreur, dans un schéma PWDGM, se crée et s'amplifie aux frontières, le remplacement de la moitié du domaine par un schéma EF convergé entraîne ainsi la limitation de l'erreur en limitant l'espace dont elle dispose pour s'amplifier. Pour  $N_w = 8$  par exemple la PWDGM seule permet d'atteindre une erreur relative de l'ordre de  $10^{-1}$  pour le cas le plus défavorable et l'ajout de la MEF permet alors de gagner un ordre de grandeur sur cette erreur.

La courbe pour  $N_w = 16$  enfin, permet d'observer pour tous les  $\delta\theta$  ce qui était décrit pour la figure 6 : la DGM seule atteint alors une erreur plus faible que la MEF et cette dernière est donc systématiquement limitante dans le schéma hybride.

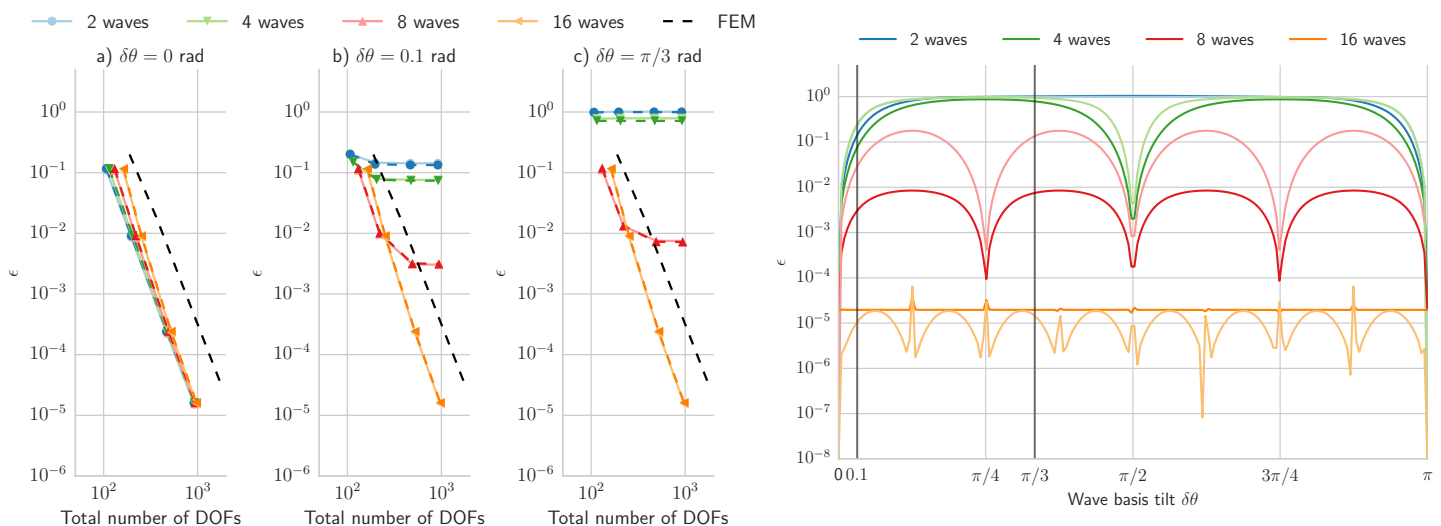


FIGURE 6 – Évolution de l'erreur relative  $\epsilon$  en fonction du nombre d'éléments pour différentes orientations de la base d'ondes planes.

FIGURE 7 – Évolution de l'erreur relative  $\epsilon$  en fonction de  $\delta\theta$  pour différents  $N_w$  (référence DGM en clair pour chaque  $N_w$ ).



## 4.2 Résonateur

Dans ce second exemple, la méthode hybride est utilisée pour déterminer le champ acoustique généré par une source circulaire pulsante placée dans un résonateur. L'excitation se fait en imposant  $v = 1 \text{ m/s}$  sur la source. Les caractéristiques géométriques de l'élément résonant demandent un maillage assez fin (angle aigu, parois fines) qui devient rapidement coûteux. La figure 8 permet d'observer le type de maillage utilisé : le nombre d'éléments dans la zone allouée à la MEF a été réduit pour améliorer la lisibilité mais celui la zone dédiée à la PWDGM correspond à celui utilisé pour le calcul.

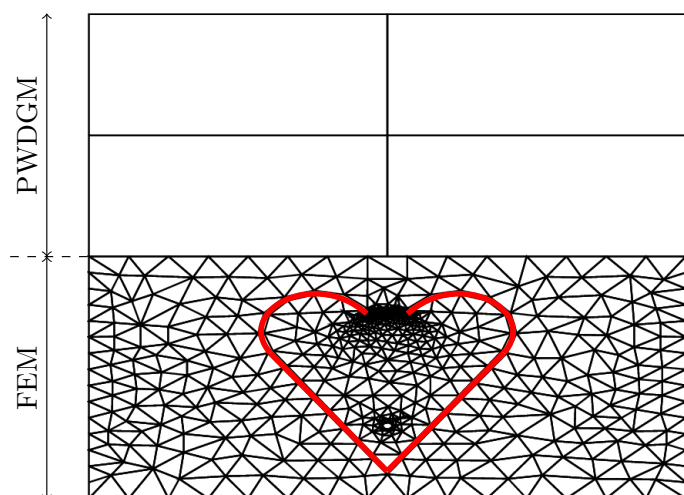


FIGURE 8 – Exemple de maillage (domaine MEF moins raffiné que pour la génération des résultats). En rouge, la paroi rigide du résonateur.

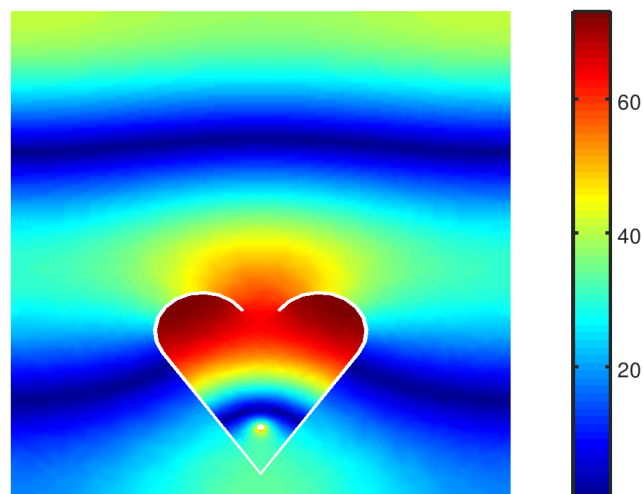


FIGURE 9 – Résultat de simulation pour la pression. Le système est excité par une sphère pulsante située dans le résonateur.

En observant le résultat en figure 9, aucun artefact notable n'est visible au niveau du changement de méthode. L'excitation, générée dans le domaine EF, est ainsi transmise correctement au domaine PWDGM, la séparation entre les deux étant située au milieu du rayonnement du résonateur. Les modes de la cavité sont également bien reconstitués dans chacun des domaines.

Afin de vérifier que la continuité entre les deux domaines est assurée, la pression le long de l'interface telle que vue par chacune des méthodes est calculée. Les deux profils sont superposés sur la figure 10. La correspondance des deux courbes sur toute la largeur de la cavité atteste du bon comportement du couplage et de la bonne transmission du champ entre les deux domaines.

Dans cet exemple, l'utilisation de la méthode hybride a permis de réduire grandement la taille du système linéaire sans perte de précision (réduction de 40 à 50% par rapport à une analyse MEF). Cet exemple est un peu extrême toutefois et il faut souvent se ramener à un maillage plus fin pour la PWDGM que les 4 éléments présents ici.

## 5 Conclusion

L'approche proposée diffère de celle discutée au cours du CFM 2015 en ce qu'elle permet d'éviter la dérivation des fonctions d'interpolation de la MEF et donc de conserver l'ordre de convergence. La

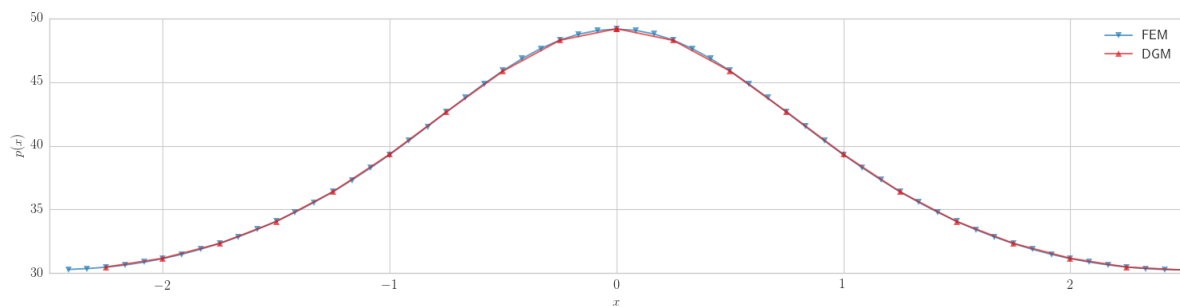


FIGURE 10 – Profils de pression de part et d’autre de l’interface entre MEF et PWDGM.

stratégie a ainsi été complètement revue pour que chacune des méthodes voit ses termes d’interface déduits d’une manière naturelle. Le passage par le formalisme des vecteurs d’état et la réécriture des conditions limites en fonction de ces vecteurs permettent une grande flexibilité et minimise le travail nécessaire pour étendre l’approche à de nouveaux couples de media. En effet, l’écriture du couplage pour d’autres media se résume à identifier les vecteurs d’états pertinents et à exprimer ensuite les conditions de continuité à l’interface en utilisant les éléments de ces vecteurs.

La technique présentée vise à étendre les possibilités de simulation pour l’acoustique et les vibrations en proposant une meilleure granularité pour le choix des méthodes de calcul (du problème complet au sous-domaine). Il a notamment été montré que l’utilisation de l’approche hybride pouvait permettre une réduction significative de la taille du système linéaire à résoudre. Par ailleurs, les tests permettent de confirmer que le couplage en lui-même n’a pas d’impact sur la vitesse de convergence de la méthode. Enfin, au travers du second exemple et de ceux qui seront présentés au congrès, la capacité de la méthode hybride à s’adapter à des géométries complexes est mise à l’épreuve avec un résultat probant.

## Références

- [1] O. Dazel, M. Gaborit, G. Gabard, Couplage entre la MEF et la DGM avec ondes planes pour l’acoustique, In S04 Nouveaux résultats et modèles en interaction fluide-structure. Lyon, France, 2015.
- [2] G. Gabard, Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems, Journal of Computational Physics, 2007, 225(2), pp. 1961-1984. DOI : 10.1016/j.jcp.2007.02.030
- [3] P. Ladevèze, H. Riou, On Trefftz and weak Trefftz discontinuous Galerkin approaches for medium-frequency acoustics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 278, pp. 7297-743. DOI : 10.1016/j.cma.2014.05.024
- [4] J. S. Lee, E. Deckers, S. Jonckheere, W. Desmet, Y. Y. Kim, A direct hybrid finite element-wave based modelling technique for efficient analysis of poroelastic materials in steady-state acoustic problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 304, 5580. DOI : 10.1016/j.cma.2016.02.006