

# Etude du phénomène d'entraînement dans des jets turbulents dits Non-Boussinesq

M. CREYSSELS<sup>a</sup>, P. SALIZZONI<sup>a</sup>, S. VAUX<sup>b</sup>, J. CRASKE<sup>c</sup>, M. VAN REEUWIJK<sup>c</sup>

a. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS, Univ. Lyon, Ecole centrale de Lyon, 36, av. Guy de Collongues, 69134 Ecully.

b. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Saint-Paul-Lez-Durance.

c. Department of Civil and Environmental Engineering, Imperial College, London.

## Résumé :

*Nous présentons une étude numérique de la dynamique de jets turbulents de fluides léger ou lourd dans un environnement non stratifié. La densité du jet est choisie bien inférieure ou bien supérieure à la densité du fluide environnant afin d'explorer les effets dits "non-Boussinesq" sur la dynamique de l'écoulement. Une question centrale est de savoir comment l'entraînement du fluide ambiant par le jet est modifié lorsque l'écart entre les densités du jet et de l'environnement est fortement augmenté. L'entraînement est mesuré traditionnellement par un coefficient  $\alpha$  qui représente le rapport entre la vitesse d'entraînement horizontale du fluide ambiant et la vitesse verticale du jet. L'étude expérimentale de Ricou et Spalding [1] a été interprétée de la façon suivante : le coefficient  $\alpha$  évoluerait comme la racine carrée du rapport de densité entre les deux fluides [ $\alpha \propto (\rho/\rho_a)^{1/2}$ ]. Ainsi, pour un jet très léger,  $\alpha$  serait plus petit que pour un jet traditionnel dit "Boussinesq" tandis que pour un jet très lourd  $\alpha$  augmenterait comme la racine carrée du rapport de densité. Cependant l'origine physique de cette dépendance du coefficient d'entraînement avec le rapport de densité est sujette à caution. Afin de déterminer la dépendance du coefficient d'entraînement avec la densité du jet, des simulations numériques de jets légers et lourds ont été menées et les résultats ont été interprétés en suivant l'analyse proposée par Craske et Van Reeuwijk [2] et Ezzamel et al. [3]. Cet approche permet de sonder les effets du rapport de densité des deux fluides sur la production d'énergie cinétique turbulente ainsi que ses relations avec le coefficient d'entraînement.*

## Abstract :

*We investigate the dynamics of jets of light or heavy fluid within an unstratified still environment. The density of the jet is significantly smaller or significantly greater than the environment fluid. This kind of jets releases are commonly identified in the literature as "non-Boussinesq" jets. A main issue is to determine how the entrainment of the surrounding fluid by the jet is modified when the density ratio between the two fluids is highly increased or highly decreased. The entrainment is usually measured by the ratio ( $\alpha$ ) between the horizontal entrainment velocity and the vertical velocity of the jet averaged over the jet horizontal sections. Early experiment from Ricou and Spalding [1] has been interpreted as follows : the entrainment rate  $\alpha$  might rescale on the square roots of the density ratio of the two fluids [ $\alpha \propto (\rho/\rho_a)^{1/2}$ ]. Hence, for a light jet,  $\alpha$  should be smaller than in a iso-density jet whereas for a heavy jet  $\alpha$  should be increased compared to a "Boussinesq" jet. However, the dynamical effects that*

are responsible for this power-law dependence of the entrainment rate with the density ratio are still not elucidated. To investigate this we have performed Large Eddy Simulations of light and heavy jets and the corresponding results are analysed following the method recently presented by Craske and Van Rieuwijk [2] and Ezzamel et al. [3]. This procedure allows us to enlighten the effects of a decreasing or increasing density ratio on the kinetic energy budget within the jet and its relation to the entrainment rate.

**Mots clefs : Jet turbulent, effets dits Non-Boussinesq.**

## Introduction

Les jets sont des outils académiques qui permettent de modéliser le comportement plus complexe de rejets de gaz par exemple toxiques en espace confiné ou directement dans l'atmosphère. En fonction des quantités de matière en jeu, les effets de ces rejets peuvent affecter des communautés locales ou bien des pays ou continents dans leur globalité, l'éruption du volcan Eyjafjallajökull en Islande et les problèmes rencontrés à la centrale nucléaire de Fukushima au Japon sont deux exemples de rejets dans l'atmosphère qui ont marqué les esprits. Les organismes de contrôle des industries et les autorités publiques sont demandeuses d'informations sur l'étalement de la contamination induite par ces rejets, de façon à définir des seuils de risque sanitaire.

La littérature sur les jets est assez vaste mais généralement les études expérimentales et numériques concernent uniquement les jets de fluide de densité proche de la densité du fluide environnant, de façon à simplifier les équations de la dynamique dans le cadre de l'approximation bien connue de Boussinesq. Le champ de vitesse est alors à divergence nulle et, dans les bilans de quantité de mouvement et d'énergie interne, les variations de densité du fluide sont considérées comme non nulles uniquement pour le terme de flottabilité.

La plupart des descriptions théoriques ont pour origine les équations intégrales proposées par Morton et al. [4] dans lesquelles le taux de mélange entre le jet et l'environnement est modélisé par un coefficient d'entraînement constant :

$$u_e = \alpha w_m, \quad (1)$$

la vitesse d'entraînement de l'air ambiant par le jet ( $u_e$ ) étant définie à partir de l'augmentation du flux de masse du jet ( $G$ ) au fur et à mesure de son développement :

$$\frac{dG}{dz} = 2r_m \rho_a u_e = 2r_m \rho_a \alpha w_m, \quad (2)$$

$w_m$  et  $r_m$  sont respectivement la vitesse verticale et le rayon du jet moyennés sur sa section transverse,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air ambiant.

Le manque de données expérimentales concernant les jets non-Boussinesq provient de la difficulté à obtenir des mesures de vitesse et de densité fiables à partir des techniques classiques à cause de la présence de forts gradients de densité ou de température. Les travaux théoriques des 20 dernières années [5, 6, 7] s'appuient sur les résultats expérimentaux anciens de Ricou et Spalding [1] et adoptent un modèle d'entraînement modifié dans lequel le coefficient d'entraînement est proportionnel à la racine

carré du rapport des densités du fluide flottant et environnant :

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} \quad (3)$$

Le taux d'entraînement prédit par ce modèle est donc réduit dès que la densité du fluide injecté diminue. L'origine physique de cette dépendance du coefficient d'entraînement avec le rapport de densité n'est pas claire et repose de plus essentiellement sur l'interprétation des résultats expérimentaux de [1]. Ici, des simulations numériques de jets légers et lourds sont présentées et les résultats ont été interprétés en suivant l'analyse proposée par Craske et Van Reeuwijk [2] et Ezzamel et al. [3]. Cette approche permet de sonder les effets du rapport de densité des deux fluides sur la production d'énergie cinétique turbulente ainsi que ses relations avec le coefficient d'entraînement.

## Etude théorique de l'entraînement dans la situation non-Boussinesq

Le coefficient d'entraînement  $\alpha$  est défini à partir de grandeurs moyennées sur une section transverse du jet (éq. 2). Nous proposons ici d'étendre les résultats de [2] au cas non-Boussinesq et d'obtenir ainsi  $\alpha$  en fonction des propriétés du profil de vitesse du jet. Nous considérons les équations de Navier-Stokes en supposant le nombre de Mach faible et la moyenne de Favre est utilisée : les grandeurs moyennées avec un tilde (exemple :  $\tilde{w}$ ) et les fluctuations avec une apostrophe. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\overline{\rho u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho w}) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\overline{\rho u} \tilde{w} + \overline{\rho u'' w''}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho w^2} + \overline{\rho w''^2}) = -\frac{\partial}{\partial z} \bar{p}, \quad (5)$$

avec  $\bar{p}$  la pression moyenne.  $r$  et  $z$  représentent respectivement les distances à l'axe et à l'origine du jet en coordonnées cylindriques.

En multipliant l'éq. (5) par  $2\tilde{w}$  et en utilisant l'éq. (4), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \overline{\rho u} \tilde{w}^2 + 2\overline{\rho u'' w''} \tilde{w} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{\rho w^3} + 2\overline{\rho w''^2} \tilde{w} + 2\bar{p} \tilde{w} \right) \\ = 2\overline{\rho u'' w''} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{w} + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w} + 2\overline{\rho w''^2} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w}, \end{aligned} \quad (6)$$

L'intégration des eqs. (4), (5) et (6) entre  $r = 0$  et l'infini donne :

$$\frac{d\tilde{G}}{dz} = 2\rho_a \lim_{r \rightarrow \infty} (-r\tilde{u}), \quad (7)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \tilde{\beta}_g \tilde{M} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \tilde{\gamma}_g \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{G}} \right) = \frac{\tilde{\delta}_g}{r_m} \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{G}}, \quad (9)$$

$\tilde{G}$ ,  $\tilde{M}$  et  $\tilde{Q}$  représentent respectivement les flux de masse, de quantité de mouvement et de volume,  $r_m$  est le rayon du jet et  $\rho_m$  est la masse volumique moyenne dans une section transverse :

$$\tilde{G} \equiv 2 \int_0^\infty \overline{\rho w} r dr, \quad \tilde{M} \equiv 2 \int_0^\infty \overline{\rho w^2} r dr, \quad \tilde{Q} \equiv 2 \int_0^\infty \tilde{w} r dr, \quad r_m \equiv \frac{\tilde{Q}^{1/2} \tilde{G}^{1/2}}{\tilde{M}^{1/2}}, \quad \rho_m \equiv \frac{\tilde{G}}{\tilde{Q}} \quad (10)$$

Chaque terme  $\tilde{\beta}_g$ ,  $\tilde{\gamma}_g$  et  $\tilde{\delta}_g$  est la somme de trois intégrales :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_m &\equiv 1, & \tilde{\beta}_f &\equiv 2 \frac{1}{\tilde{M}} \int_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{w}^2 r dr, & \tilde{\beta}_p &\equiv 2 \frac{1}{\tilde{M}} \int_0^\infty \tilde{p} r dr, \\ \tilde{\gamma}_m &\equiv 2 \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{w}^3 r dr, & \tilde{\gamma}_f &\equiv 4 \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{w} \tilde{w}^2 r dr, & \tilde{\gamma}_p &\equiv 4 \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{w} \tilde{p} r dr, \\ \tilde{\delta}_m &\equiv \frac{4}{r_m} \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{w}' u' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} r dr, & \tilde{\delta}_f &\equiv \frac{4}{r_m} \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{w}^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} r dr, & \tilde{\delta}_p &\equiv \frac{4}{r_m} \frac{\tilde{G}}{\tilde{M}^2} \int_0^\infty \tilde{p} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} r dr,\end{aligned}$$

L'équation (7) permet de définir la vitesse d'entraînement :

$$\frac{d\tilde{G}}{dz} = 2\rho_a r_m u_e, \quad (11)$$

ou bien le coefficient d'entraînement  $\alpha$  :

$$\frac{d\tilde{G}}{dz} = 2\alpha \frac{\rho_a}{\rho_m} \frac{\tilde{G}}{r_m}, \quad (12)$$

En utilisant l'éq. (8), l'éq. (9) devient :

$$\frac{1}{\tilde{G}} \frac{d\tilde{G}}{dz} = -\frac{1}{r_m} \frac{\delta_g}{\gamma_g} + \frac{d}{dz} \left( \ln \frac{\gamma_g}{\beta_g^2} \right), \quad (13)$$

A partir de (12) et (13), le coefficient  $\alpha$  est obtenu :

$$\alpha = \frac{\rho_m}{\rho_a} \left[ -\frac{\delta_g}{2\gamma_g} + r_m \frac{d}{dz} \left( \ln \frac{\gamma_g^{1/2}}{\beta_g} \right) \right] = \alpha_1 + \alpha_2. \quad (14)$$

L'équation précédente montre que  $\alpha$  est composé de deux termes. Pour des jets dits Boussinesq (différence de densité avec l'air ambiant faible), le deuxième terme ( $\alpha_2$ ) devient nul lorsqu'on s'éloigne de la source (condition dite asymptotique) et le premier terme ( $\alpha_1$ ) est constant et égal à 0.065. Le but de ces travaux est de déterminer l'évolution de ce dernier terme en fonction du rapport de densité entre le jet et l'air ambiant.

## Présentation des simulations numériques

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la concentration sont résolues avec le code ISIS de l'IRSN [8]<sup>1</sup>. Une description plus précise de ces simulations grandes échelles (LES) d'écoulements turbulents est donnée dans [9]. Le domaine d'étude correspond à un cube de côté  $40 r_0$ , avec  $r_0$  le rayon initial du jet. La discrétisation de ce domaine est la suivante. Dans une section transverse et au cœur du jet ( $-4r_0 < r < 4r_0$ ), le pas de discrétisation est pris à  $r_0/14$ , puis le maillage est d'autant moins fin que l'on s'éloigne du centre du jet. Le long de l'axe longitudinal du jet, le pas de discrétisation est pris à  $r_0/8$ . L'ensemble du domaine contient environ  $15.10^6$  mailles. Ces simulations LES ont été validées en comparant aux résultats numériques DNS obtenus par [2] pour des jets de densité constante.

1. Le code ISIS peut être téléchargé librement à l'adresse : <https://gforge.irsn.fr/gf/project/isis/>

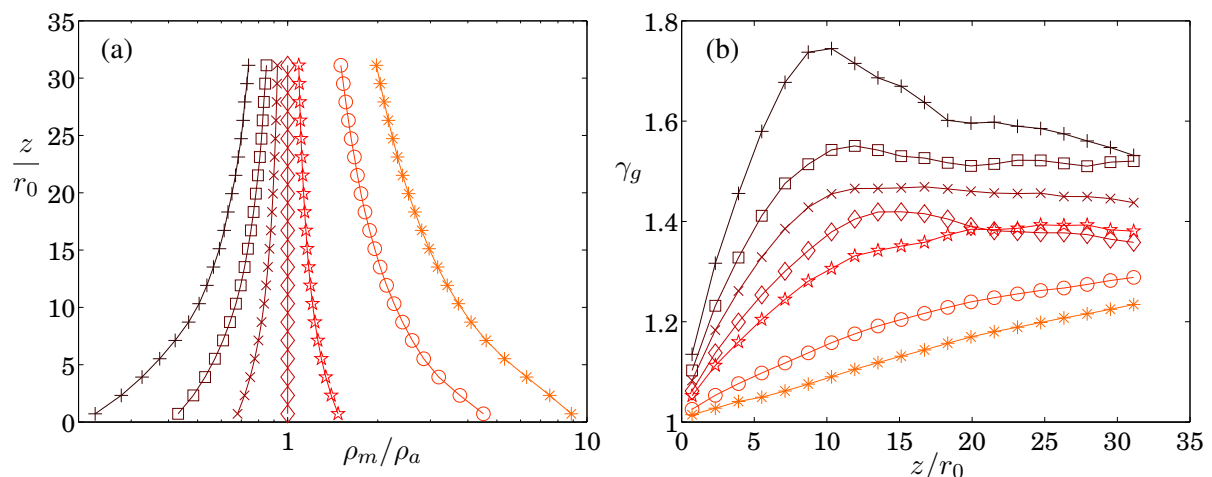


FIGURE 1 – (a) Evolution de la masse volumique selon l'axe longitudinal,  $r_0$  est le rayon du jet à  $z = 0$ . 7 jets ont été simulés, du jet très léger au jet très lourd :  $(\rho_m/\rho_a)_{z=0} = 0.2$  (+),  $0.4$  ( $\square$ ),  $0.6$  ( $\times$ ),  $1$  ( $\diamond$ ),  $1.5$  ( $\star$ ),  $5$  ( $\circ$ ),  $10$  ( $\ast$ ). (b) Evolution du coefficient  $\gamma_g$  selon l'axe longitudinal pour les 7 jets.

## Résultats

7 jets différents ont été simulés : du jet très léger pour lequel la masse volumique à  $z = 0$  est  $0.2\rho_a$  au jet très lourd ( $\rho_m = 10\rho_a$  à  $z = 0$ ). Le jet iso-densité a également été simulé. L'évolution de  $\rho_m$  avec  $z$  est représentée sur la figure 1(a) pour ces 7 jets.  $\rho_m/\rho_a$  tend vers 1 en s'éloignant du point origine mais, aussi bien pour les jets légers que lourds,  $\rho_m/\rho_a$  est bien différent de un même pour  $z/r_0 > 30$ . L'évolution du coefficient  $\gamma_g$  est représentée sur la figure 1(b). Nous observons que  $\gamma_g$  a deux comportements différents pour les jets légers :  $\gamma_g$  augmente avec  $z$  jusqu'à  $z \approx 10r_0$ , puis décroît. L'augmentation de  $\gamma_g$  est sans doute lié au fait que proche de  $z = 0$  les coefficients  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  et  $\delta_i$  ( $i = m, f$  ou  $p$ ) n'ont pas encore atteint leur régime asymptotique. Puis, pour  $z \gtrsim 10r_0$ , le jet a un comportement asymptotique mais son rayon continue d'augmenter, sa masse volumique se rapproche de celle de l'air ambiant et donc les coefficients continuent de varier. Les coefficients  $\gamma_g$  et  $\delta_g$  sont tracés en fonction du rapport entre les masses volumiques du jet et de l'air ambiant sur les figures 2, et ceci pour l'ensemble des jets légers et lourds simulés (mais pour  $z > 15r_0$ ).  $\gamma_g$  et  $\delta_g$  se comportent comme des lois de puissance :

$$\gamma_g \propto \left(\frac{\rho_m}{\rho_a}\right)^{-A_{\gamma_g}}, \quad \delta_g \propto -\left(\frac{\rho_m}{\rho_a}\right)^{-A_{\delta_g}} \quad \text{avec : } 0.2 < A_{\gamma_g} < 0.25 \text{ et } 1.5 < A_{\delta_g} < 1.6. \quad (15)$$

On en déduit que  $\gamma_g/2\delta_g$  se comporte également comme une loi de puissance [voir Fig. 3(a)] :

$$\frac{\delta_g}{2\gamma_g} = -0.065 \left(\frac{\rho_m}{\rho_a}\right)^{-A_{\alpha_1}} \quad \text{avec : } A_{\alpha_1} \approx \frac{4}{3}. \quad (16)$$

Le premier terme de l'équation (14) devient :

$$\alpha_1 = 0.065 \left(\frac{\rho_m}{\rho_a}\right)^{-1/3}. \quad (17)$$

$\alpha_1 = -\frac{\rho_m}{\rho_a} \frac{\delta_g}{2\gamma_g}$  est représentée sur la figure 3(b) et un bon accord est observé avec la loi de puissance (17). L'exposant trouvé est donc  $-1/3$ , ce qui est bien différent de l'exposant  $1/2$  de l'équation (3).

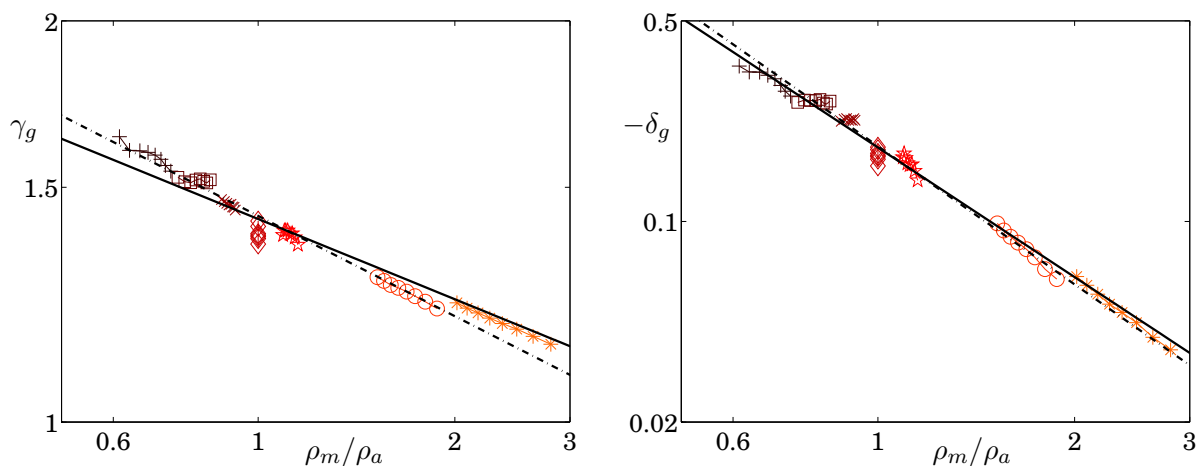


FIGURE 2 – Coefficients  $\gamma_g$  (à gauche) et  $-\delta_g$  (à droite) en fonction du rapport de densité entre le jet et le fluide ambiant, en diagramme log-log. Des lois de puissance sont également représentées. A gauche : pente -0.2 (ligne continue) et -0.25 (ligne discontinue). A droite : pente -1.5 (ligne continue) et -1.6 (ligne discontinue).

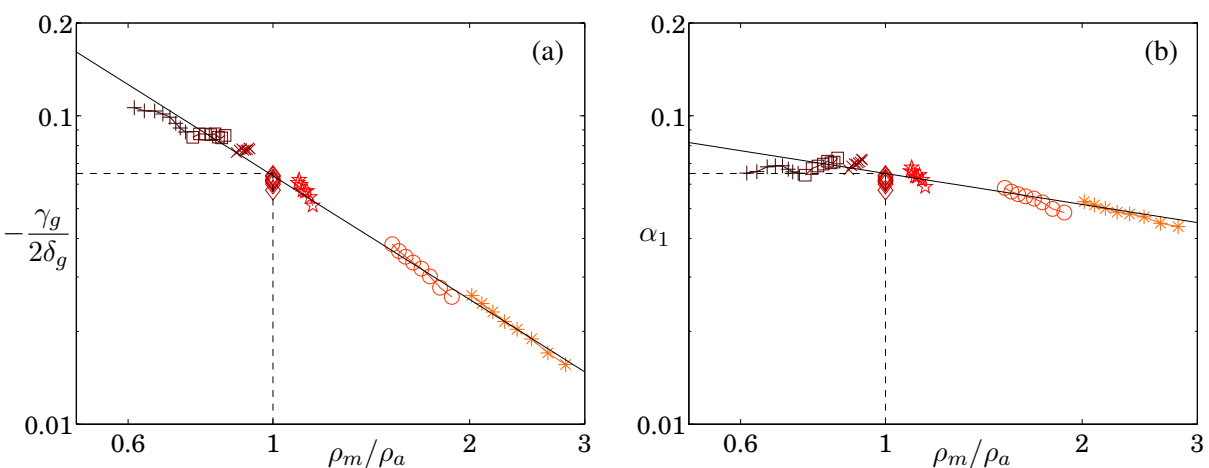


FIGURE 3 – Evolution de  $-\frac{\gamma_g}{2\delta_g}$  (a) et  $\alpha_1 = -\frac{\rho_m}{\rho_a} \frac{\gamma_g}{2\delta_g}$  (b) en fonction du rapport des masses volumiques du jet et de l'air ambiant. Egalement représentées : loi de puissance  $0.065 (\rho_m/\rho_a)^{-4/3}$  (a) et  $0.065 (\rho_m/\rho_a)^{-1/3}$  (b).

## Conclusions

Des jets très légers et très lourds ont été simulés numériquement ce qui a permis de réaliser un bilan de masse et d'énergie cinétique sur une tranche transverse du jet (intégrales  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  et  $\delta_i$ ). En suivant l'analyse proposée par [2, 3], l'entraînement  $\alpha$  est directement relié à ces intégrales [éq. (14)].  $\alpha$  est composé de deux termes :  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Le premier terme est égal à 0.065 pour des jets Boussinesq, et les simulations présentées ici montrent qu'il varie comme  $(\rho_m/\rho_a)^{-1/3}$  lorsque le rapport des densités du jet et de l'air ambiant est non négligeable. Il s'agit d'un résultat bien différent de l'interprétation traditionnellement donnée des résultats expérimentaux de Ricou et Spalding [1]. Le deuxième terme ( $\alpha_2$ ) devient nul pour des jets dits Boussinesq lorsqu'on s'éloigne de la source du jet. Pour des jets dits non Boussinesq, une légère dépendance avec la distance à la source persiste car  $\alpha_2$  dépend du rapport de densité et donc de  $z$ . Ces résultats ont un impact important sur la modélisation des jets qui, à son tour, impacte directement

les études de rejets de gaz toxiques en espace confiné ou directement dans l'atmosphère. Une extension de ces résultats aux panaches en présence de gravité est envisagée ce qui pourra étendre encore la portée de cette étude pour la modélisation de panaches flottants en espace confiné ou libre.

## Références

- [1] F. P. Ricou and D. B. Spalding. Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets. *J. Fluid Mech.*, 11 :21–32, 1961.
- [2] Reeuwijk M van and J Craske. Energy-consistent entrainment relations for jets and plumes. *J. Fluid Mech.*, 782 :333–355, 2015.
- [3] A. Ezzamel, P. Salizzoni, and G. R. Hunt. Dynamical variability of axisymmetric buoyant plumes. *J. Fluid Mech.*, 765 :576–611, 2015.
- [4] B. R. Morton, G. I. Taylor, and J. S. Turner. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc. London A*, 234 :1–23, 1956.
- [5] G. G. Rooney and P. F. Linden. Similarity considerations for non-Boussinesq plumes in an unstratified environment. *J. Fluid Mech.*, 318 :237–250, 1996.
- [6] A. W. Woods. A note on non-Boussinesq plumes in an incompressible stratified environment. *J. Fluid Mech.*, 345 :347–356, 1997.
- [7] P. Carlotti and G. R. Hunt. Analytical solutions for turbulent non-Boussinesq plumes. *J. Fluid Mech.*, 538 :343–359, 2005.
- [8] Babik F., Lapuerta C., and Suard S. Isis 3.0.0. : Physical modelling. technical report semic-2011-054. *Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire*, 2011.
- [9] R. Mehaddi, S. Vaux, F. Candelier, and O. Vauquelin. On the modelling of steady turbulent fountains. *Environmental Fluid Mech.*, 15(6) :1115–1134, 2015.