

# Convection naturelle dans une cavité confinée : une modélisation $2D^{1/2}$

I. HAMZAOUI<sup>a,b</sup>, R. BOUSSAA<sup>a</sup>, V. BOTTON<sup>b,c</sup>, D. HENRY<sup>b</sup>, S. MILLET<sup>b</sup>, A. BENZAOUI<sup>a</sup>, A. BOUABDALLAH<sup>a</sup> et H. BEN HADID<sup>b</sup>.

a. Laboratoire de Thermodynamique et Systèmes Energétiques, Faculté de Physique, Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediène -BP 32,16111 Bab Ezzouar, Alger, Algérie. E-mail : idir.hamzaoui@insa-lyon.fr

b. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS/Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon/Université Lyon1/INSA de Lyon -ECL, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France. E-mail : daniel.henry@ec-lyon.fr

c. INSA Euro-Méditerranée, Université Euro-Méditerranéenne de Fès, Route de Meknès, BP 51, 30000 Fès, Maroc. E-mail : valery.botton@insa-lyon.fr

## Résumé

*Une étude de la convection naturelle en cavité confinée différentiellement chauffée a été menée. Les rapports d'aspect de cette cavité,  $A_w = \frac{W}{H} = \frac{1}{6}$  et  $A_l = \frac{L}{H} = \frac{10}{6}$ , sont choisis de manière à correspondre à ceux du montage expérimental 'AFRODITE'. L'incapacité des modèles 2D à prédire de bons résultats en termes de champs de température et de vitesses par rapport à une étude 3D complète a tout d'abord été montrée. Deux modèles  $2D^{1/2}$  sont ensuite repris ici. Contrairement au modèle 2D, leur formulation prend en compte le frottement induit par les parois latérales de la cavité. Les résultats obtenus par les différents modèles 2D,  $2D^{1/2}$  et 3D sont comparés. On montre que pour les faibles nombres de Prandtl, et ce pour différents nombres de Grashof, le modèle  $2D^{1/2}$ , avec un choix adéquat du type de profil transverse de vitesse considéré, peut se substituer au modèle 3D.*

## Abstract

*A study of the natural convection in a differentially heated cavity is presented. The aspect ratios  $A_w = \frac{W}{H} = \frac{1}{6}$  and  $A_l = \frac{L}{H} = \frac{10}{6}$ , are chosen to correspond to the experimental benchmark 'AFRODITE'. The inefficiency of 2D models to predict good results in terms of velocity and temperature fields in comparison with 3D models is first shown. Two  $2D^{1/2}$  models are then presented. In contrary of 2D model, their formulation takes into account the no-slip condition at the side walls. A comparison of the results obtained with the different models (2D,  $2D^{1/2}$  and 3D) is made. We show that for low Prandtl number and different Grashof numbers, the  $2D^{1/2}$  model, featuring the adequate type of transverse velocity profile, gives as good results as the 3D model.*

**Mots clefs : Convection naturelle, Cavité confinée, Modèles  $2D^{1/2}$ , Hele-Shaw.**

## 1 Introduction

L'étude de la convection naturelle en cavité confinée revêt une importance majeure, de par ses nombreux domaines d'application notamment la solidification dirigée, et de par le grand intérêt qu'elle suscite chez les chercheurs et les nombreuses études qui lui sont consacrées. On s'intéresse ici à la simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité correspondant au montage expérimental 'AFRODITE' proposé par Fautrelle et al [1-4]. Les modèles 2D ne captent pas la physique de l'écoulement résultant de la convection naturelle dans ce type de géométrie. Botton et al [5] [6] ont proposé un modèle  $2D^{1/2}$ , inspiré des travaux de Hele-Shaw [7] et décrit par Schlichting et Gersten [8], qu'ils ont adapté au cas des métaux liquides à faible nombre de Prandtl. Nous examinons ici l'efficacité de ce modèle  $2D^{1/2}$  à simuler des cas de convection naturelle sous différentes conditions aux limites. Il est aussi comparé au modèle 2D et à un autre modèle  $2D^{1/2}$  afin de déterminer le modèle le plus efficace pour la prédiction du champ de température lors de la convection naturelle en cavité confinée différentiellement chauffée.

## 2 Insuffisance de la modélisation 2D

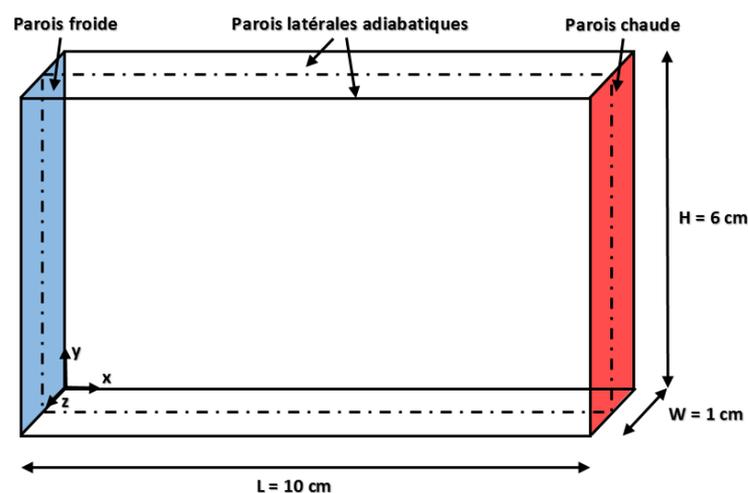


FIGURE 1: Configuration géométrique étudiée

La géométrie représentée sur la figure 1 est la cavité parallélépipédique différentiellement chauffée étudiée. Elle correspond au creuset du montage expérimental 'AFRODITE', proposé par Fautrelle et al [1-4] pour l'étude de la solidification dirigée de métaux liquides. C'est une cavité confinée ( $10 \times 6 \times 1$  cm<sup>3</sup>) avec des rapports d'aspect  $A_w = \frac{W}{H} = \frac{1}{6}$  et  $A_l = \frac{L}{H} = \frac{10}{6}$ . Toutes les parois sont adiabatiques à l'exception des deux parois verticales en  $x = 0$  et  $x = 10$  cm qui sont maintenues à des températures constantes différentes.

La figure 2 montre les résultats obtenus pour un nombre de Prandtl fixe ( $Pr = 0.01$ ) et deux nombres de Grashof différents ( $Gr = 10^3$  et  $Gr = 10^7$ ), chaque fois avec les deux modélisations 2D et 3D. La comparaison entre la figure 2-a et la figure 2-b ne montre pas de différences majeures entre les champs de température 2D et 3D. Cela est dû à la valeur relativement petite du nombre de Grashof ( $Gr = 10^3$ ), pour laquelle les vitesses de convection observées restent petites. Le transfert de chaleur au sein de la cavité

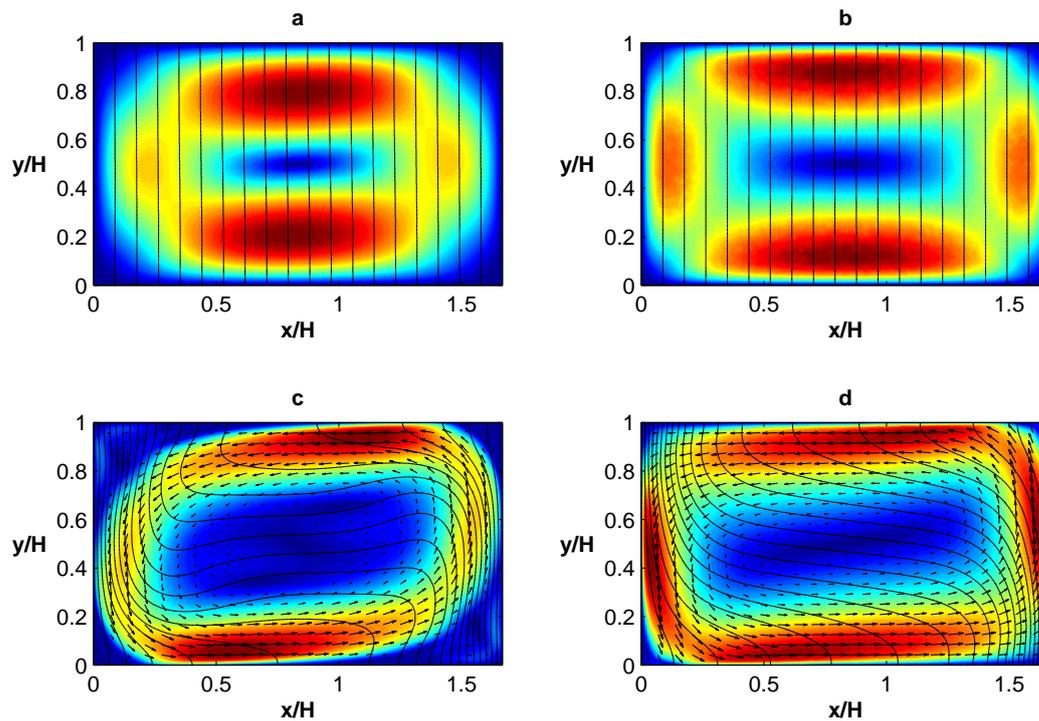


FIGURE 2: Représentation des contours de vitesse (norme) et de température (isothermes) pour  $Pr = 0.01$ . Modélisation 2D : a)  $Gr = 10^3$ , c)  $Gr = 10^7$ , modélisation 3D (vue dans le plan de coupe vertical représenté en pointillés sur la figure 1) : b)  $Gr = 10^3$ , d)  $Gr = 10^7$ .

se fait principalement par diffusion. Par contre les résultats obtenus pour  $Gr = 10^7$  mettent en avant d'importants écarts entre les résultats 2D et les résultats 3D, que ce soit pour le champ de vitesse ou pour le champ de température. En effet la boucle de convection tend à occuper toute la cavité pour le modèle 3D (figure 2-d), alors que pour le modèle 2D (figure 2-c) deux zones de recirculation apparaissent aux coins en haut à gauche et en bas à droite de la cavité. Le champ de température se retrouve ainsi affecté, et on note une inversion du signe du gradient de température horizontal au centre de la cavité 2D, ce qui n'est pas le cas pour la cavité 3D. Une autre différence notable pour les forts nombres de Grashof ( $Gr = 10^7$ ) est le fait que la simulation 3D converge vers un régime stationnaire alors que le calcul 2D reste instationnaire. Pour ce type de cavité confinée transversalement, il semblait possible et intéressant d'utiliser un modèle 2D dans le but de réduire le temps de calcul. Nous pouvons en fait conclure que les modèles 2D ne captent pas bien la physique de l'écoulement au sein de la cavité [5] [6], parce qu'ils ne prennent pas en compte le frottement induit par les parois latérales confinant la cavité 3D, sachant que celui-ci influe de façon très importante sur l'écoulement.

### 3 Modélisation 2D<sup>1/2</sup>

Un modèle 2D modifié, dit 2D<sup>1/2</sup>, a été proposé [5]. Celui-ci est basé sur une approche intégrale suivant la direction transverse ( $z$  sur la figure 1). Il est obtenu en supposant une température invariante dans cette direction, ce qui est vraisemblable pour les faibles nombres de Prandtl (correspondant aux métaux liquides), et en choisissant une forme de profil transverse de vitesse bien définie. Cette approche aboutit à une formulation dite de Hele-shaw ou bien de Saint-Venant. Ce modèle est noté ici 'modèle 2D<sup>1/2</sup><sub>Hartmann</sub>', si on considère un profil de type Hartmann (présentant un cœur uniforme et deux couches

limites près des parois dont l'épaisseur est ajustable à l'aide d'un paramètre  $\delta$ ) et 'modèle  $2D^{1/2}$  Poiseuille', si on suppose un profil transverse de type Poiseuille (profil parabolique).

Les équations de conservation des modèles  $2D^{1/2}$  sont :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \bar{u}_i = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + A_l Gr T \delta_{i,2} + \nabla^2 \bar{u}_i + S_{2D^{1/2}} \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \bar{T} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \bar{T} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

où  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{T}$  sont respectivement la vitesse, la pression, et la température, toutes adimensionnées et moyennées sur l'épaisseur de la cavité (la direction  $z$  sur la figure 1), donc fonctions de  $x$  et  $y$  seulement. On a aussi  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $Gr = \frac{g\beta_T \Delta T H^4}{\nu^2}$  et  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ . Enfin  $\beta_T$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  et  $g$  sont respectivement le coefficient d'expansion thermique, la viscosité cinématique, la diffusivité thermique et la gravité.  $\Delta T$  est la différence de température entre la paroi chaude et la paroi froide.

Les équations de conservation (1), (2) et (3) sont les mêmes que les équations du modèle 2D avec seulement le terme source  $S_{2D^{1/2}}$  supplémentaire dans l'équation (1). Ce terme dépend du type de profil de vitesse transverse (Hartmann ou Poiseuille) choisi lors de l'intégration des équations 3D. Il comprend un terme de type Darcy et un terme non-linéaire en  $\vec{u} \cdot \nabla \bar{u}_i$  [5].

Nous considérons ces différents modèles pour tester leur capacité à bien reproduire la physique de l'écoulement et à prédire aussi bien que les modèles 3D le champ de température et ce pour différentes valeurs du nombre de Grashof.

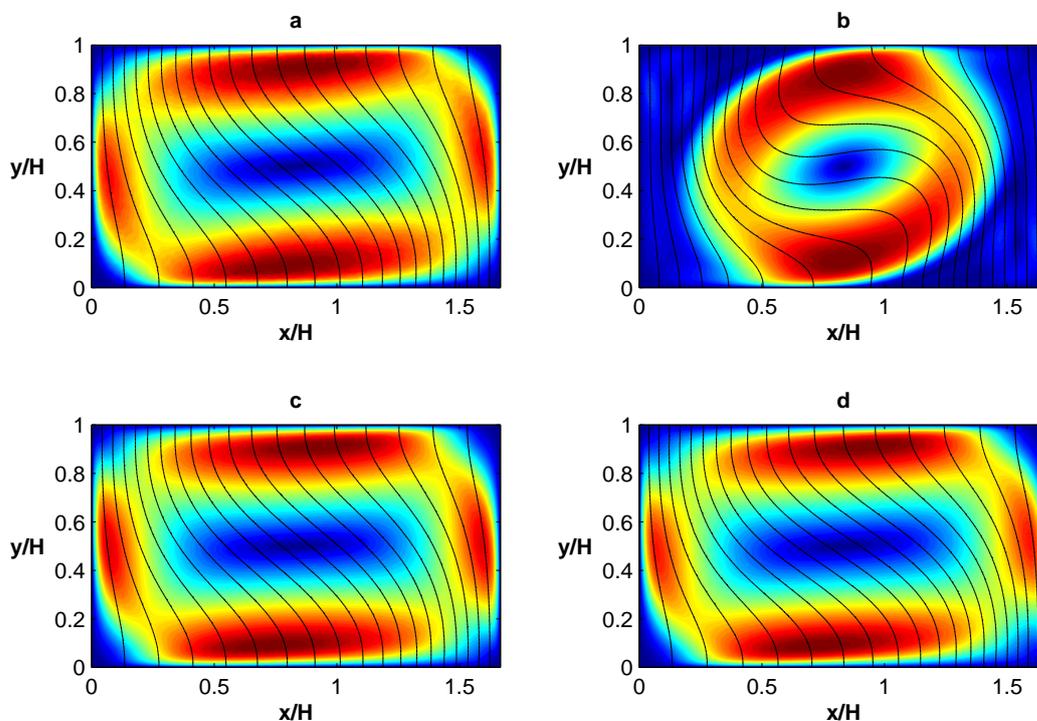


FIGURE 3: Contours de vitesse (norme) et de température (isothermes) pour  $Pr = 0.01$  et  $Gr = 10^6$ . a) modèle 3D (vue dans le plan de coupe central de la cavité 3D), b) modèle 2D, c) modèle  $2D^{1/2}$  Hartmann et d) modèle  $2D^{1/2}$  Poiseuille.

La figure 3 montre les résultats obtenus pour  $Pr = 0.01$  et  $Gr = 10^6$  par les différents modèles étudiés. Le modèle 2D (figure 3-b), comme noté sur la figure 2, ne capte pas la réalité de l'écoulement en ne reproduisant ni le champ de vitesse, ni le champ de température 3D (figure 3-a). On remarque par contre que les deux modèles  $2D^{1/2}_{Hartmann}$  (figure 3-c) et  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$  (figure 3-d) arrivent à mieux reproduire l'écoulement en s'approchant du modèle 3D. En regardant encore plus en détail les contours de température, on note un léger écart entre le modèle  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$  et le modèle 3D. On note aussi la concordance des contours du modèle  $2D^{1/2}_{Hartmann}$  avec les contours du modèle 3D.

Afin de vérifier l'intérêt de cette modélisation  $2D^{1/2}$  et d'examiner la différence entre les résultats prédits, on compare les champs de température obtenus par chacun des modèles 2D,  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$  et  $2D^{1/2}_{Hartmann}$  au champ 3D (considéré comme référence). A chaque fois on exporte le champ de température 3D sur une grille de points dans le plan de coupe central de la cavité 3D. Sur cette même grille on exporte aussi les champs 2D,  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$  et  $2D^{1/2}_{Hartmann}$ . On compare alors les valeurs de l'erreur relative maximale sur l'ensemble de ces points par rapport au modèle 3D. On suit ensuite l'évolution de cette erreur relative maximale avec l'augmentation du nombre de Grashof comme montré sur la figure 4.

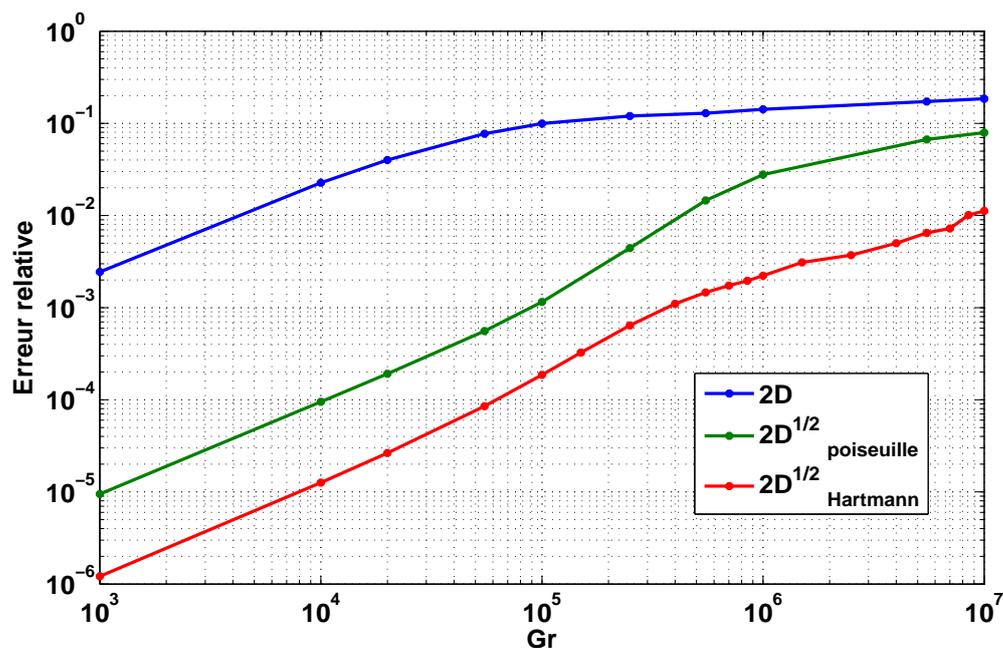


FIGURE 4: Evolution de l'erreur relative maximale de température pour les différents modèles 2D et  $2D^{1/2}$  par rapport au modèle 3D en fonction du nombre de Grashof.

La figure 4 montre que pour toutes les valeurs du nombre de Grashof considérées, l'erreur relative maximale en température obtenue par le modèle  $2D^{1/2}_{Hartmann}$  est inférieure à celle obtenue par le modèle  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$ , qui elle-même reste inférieure à celle donnée par le modèle 2D. Bien que pour  $Gr = 10^3$ , l'erreur 2D qui vaut 0.25% est assez petite (correspondant au cas 'b' de la figure 2), elle dépasse rapidement les 1% pour  $Gr = 10^4$  pour atteindre une erreur relative de 18.5% pour  $Gr = 10^7$ . Le modèle  $2D^{1/2}_{Poiseuille}$  prédit des erreurs inférieures : ainsi la valeur de l'erreur est de  $9.5 \times 10^{-6}$  pour  $Gr = 10^3$  et ne dépasse les 1% que pour  $Gr > 4 \times 10^5$  pour atteindre une valeur maximale de 8% pour  $Gr = 10^7$ . Le modèle  $2D^{1/2}_{Hartmann}$  (avec un choix adéquat de la valeur du paramètre  $\delta$  pour chaque valeur du nombre

de Grashof) améliore encore la prédiction du champ de température par rapport au champ 3D. L'erreur n'est que de  $1.2 \times 10^{-6}$  pour  $Gr = 10^3$  et ne dépasse pas 1.2% pour la plus grande valeur de Gr considérée qui est de  $10^7$ . La prise en compte du frottement induit par les parois latérales par les modèles  $2D^{1/2}$  et le bon choix du type de profil transverse de vitesse permet d'améliorer la prédiction du champ de température et de mieux approcher les prédictions du modèle 3D que ne le ferait un modèle 2D classique.

## 4 Conclusion

Un modèle  $2D^{1/2}$  a été repris pour voir l'intérêt qu'il peut apporter pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité confinée sous différentes conditions aux limites. Ce modèle permet de mieux capter la physique de l'écoulement et de mieux prédire le champ de température, et cela tout en gardant une formulation mathématique 2D des équations avec l'avantage que cela induit en termes de temps et/ou moyens de calcul. La vérification faite ici de la validité de ce modèle pour différentes valeurs du nombre de Grashof, permet d'envisager une étude sur une gamme de nombres de Prandtl et de nombres de Grashof plus large.

## Références

- [1] X. Wang and Y. Fautrelle, An investigation of the influence of natural convection on tin solidification using a quasi two-dimensional experimental benchmark, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52 (2009) 5624-5633.
- [2] X. Wang, P. Petitpas, C. Garnier, J. P. Paulin and Y. Fautrelle, A quasi two-dimensional benchmark experiment for the solidification of a tin-lead binary alloy, *C. R. Mécanique*, 335 (2007) 336-341.
- [3] L. Hachani, K. Zaidat and Y. Fautrelle, Multiscale analysis of the tin-lead alloy solidification process, *Int. J. Thermal Sciences*, 110 (2016) 186-205.
- [4] L. Hachani, B. Saadi, X. Wang, A. Nouri, K. Zaidat, A. Belgacem-Bouzida, L. Ayouni-Derouiche, G. Raimondi and Y. Fautrelle, Experimental analysis of the solidification of Sn-3 wt%Pb alloy under natural convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 55 (2012) 1986-1996.
- [5] V. Botton, R. Boussaa, R. Debaque, L. Hachani, K. Zaidat, H. Ben Hadid, Y. Fautrelle and D. Henry, A  $2D^{1/2}$  model for low Prandtl number convection in an enclosure, *Int. J. Thermal Sciences*, 71 (2013) 53-60.
- [6] R. Boussaa, L. Hachani, O. Budenkova, V. Botton, D. Henry, K. Zaidat, H. Ben Hadid and Y. Fautrelle, Macroseggregations in Sn-3 wt%Pb alloy solidification : Experimental and 3D numerical simulation investigations, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 100 (2016) 680-690.
- [7] H. J. S. Hele-Shaw, On the motion of viscous fluid between two parallel plates, *Nature*, 58 (1898) 34-36.
- [8] H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary layer theory*, 8th Revised and Enlarged Edition, Springer, New York, 2000.