

# Instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial d'un fluide rhéofluidifiant

C. LEMAITRE<sup>a</sup>, C. NOUAR<sup>b</sup>, Y. AGBESSI<sup>a</sup>, P. MARCHAL<sup>a</sup>,  
L. CHOPLIN<sup>a</sup>

a. LRGP, Université de Lorraine-CNRS, UMR 7274, 1 rue Grandville, 54000 Nancy  
cecile.lemaitre@univ-lorraine.fr

b. LEMTA, Université de Lorraine-CNRS, UMR 7563, 2 av. de la Forêt de Haye, 54500  
Vandoeuvre-lès-Nancy

## Résumé :

*Les filtres rotatifs cylindriques sont des procédés de séparation intensifiés utilisés par exemple pour la filtration du plasma sanguin. Ils sont constitués de deux cylindres concentriques. Le cylindre intérieur est poreux et tournant. La suspension circule dans l'espace annulaire entre les 2 cylindres, sous l'effet d'un gradient de pression axial. Au cours de l'écoulement, du liquide quitte la suspension pour traverser la paroi poreuse. La suspension ressort ainsi du système, plus chargée en particules qu'à son entrée. La rotation du cylindre intérieur conduit à l'apparition, au-delà d'une vitesse angulaire seuil, de rouleaux de Taylor, tels que ceux que l'on rencontre dans l'écoulement de Taylor-Couette, modifiés du fait des écoulements axial et radial qui se superposent à l'écoulement azimutal. Les rouleaux de Taylor sont le résultat d'une déstabilisation de l'écoulement de base qui existe à faibles vitesses de rotation du cylindre intérieur. La stabilité de cet écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial a déjà été étudiée dans le cas de fluide newtoniens. Nous généralisons ici cette étude au cas de fluides non newtoniens purement visqueux. La loi rhéologique considérée est la loi de Carreau, qui décrit un comportement rhéofluidifiant (viscosité diminuant avec la vitesse de déformation) avec des plateaux de viscosité newtoniens aux faibles et grandes vitesses de déformation. Les conditions critiques sont étudiées pour différentes valeurs des paramètres rhéologique, géométrique et dynamique.*

## Abstract :

*Cylindrical rotative filters are intensified separation processes used for example to separate blood plasma. They are composed of two concentric cylinders. The inner cylinder is porous and rotates. The suspension flows in the annular space between the two cylinders, under an axial pressure gradient. During the flow, some liquid leaves the suspension to cross the porous inner wall. At the outlet, the suspension thus has a higher particle concentration than at the inlet. If the inner cylinder rotates fast enough, Taylor vortices appear, similar to those occurring in Taylor-Couette flow, but modified by the supplementary axial and radial flows existing in the filter. Taylor vortices are due to an instability of the base flow reigning at low angular velocities. The stability of the Taylor-Couette-Poiseuille-radial flow occurring in the filter has already been investigated for Newtonian fluids. We generalize here this study to purely viscous non Newtonian flows. We consider the rheological law of Carreau, which*

describes a shear-thinning behavior. The critical conditions for instability are calculated for different values of the rheological and geometrical parameters.

## Mots clefs : filtration rotative, instabilités hydrodynamiques

### 1 Introduction

Les filtres rotatifs cylindriques sont composés de deux cylindres concentriques. Le cylindre intérieur est recouvert d'une membrane poreuse. Il est de plus animé d'un mouvement de rotation dans le but de générer des recirculations, les rouleaux de Taylor. La suspension ou solution à séparer circule verticalement dans l'espace annulaire entre les deux cylindres. Au cours de la descente, du liquide traverse le cylindre intérieur poreux et la suspension se concentre en particules pour ressortir en bas du dispositif.

L'écoulement dans le filtre combine un écoulement axial sous l'effet d'un gradient de pression, un écoulement azimutal du fait de la rotation du cylindre intérieur et un écoulement radial sous l'effet de la pression transmembranaire. Il s'agit donc d'un écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial. Les rouleaux de Taylor qui peuvent y apparaître au-delà d'une vitesse minimale de rotation du cylindre intérieur, sont le fait d'une instabilité hydrodynamique de type centrifuge. Nous nous intéressons donc ici à la stabilité de cet écoulement.

La stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette a été très étudiée par le passé, mais on compte très peu de recherches sur la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial, en particulier pour des fluides non newtoniens tels que ceux rencontrés dans les procédés industriels cités précédemment. Pour les approches théoriques de stabilité linéaire temporelle, il faut considérer comme dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette avec flux radial, que le cylindre extérieur est poreux, traversé par le même flux que le cylindre intérieur, de sorte que, par conservation de la masse, la vitesse ne dépende pas de la coordonnée axiale. Ceci représente un écart au cas de filtration rotative, mais permet de comprendre la physique qui modifie l'écoulement Taylor-Couette-Poiseuille quand un flux radial est présent [1]. La première étude théorique considérait un entrefer étroit et deux cylindres en corotation (les deux cylindres tournent dans le même sens), [2], mais présentait des limitations : les perturbations étaient axisymétriques avec un nombre d'onde axial et un taux d'accroissement fixés, ainsi qu'un profil de vitesse axial de base incorrect. Des travaux ultérieurs ont corrigé ces limitations et considéré des perturbations tridimensionnelles et différentes largeurs d'entrefer, [3],[4]. Martinand *et al.* (2009) [5] s'est intéressé au caractère absolu ou convectif des instabilités à l'œuvre dans le système. Des approches expérimentales ont également été abordées. Min & Lueptow (1994) [6] ont ainsi identifié une riche variété de régimes tourbillonnaires en fonction des valeurs de  $Re$ ,  $G$  et  $q_f$ . Schwille *et al.* (2002) [7] a étudié l'effet de plusieurs paramètres (taille des particules, largeur d'entrefer, concentration et débit axial) sur l'efficacité de la filtration et l'épaisseur du gâteau.

Plusieurs des travaux cités ci-dessus [2], [3], considèrent que les deux cylindres sont en rotation. Nous supposons le cylindre extérieur fixe, comme c'est le cas en filtration rotative. A notre connaissance, il n'existe pas d'étude de fluide non newtoniens au sein de ce type de dispositifs.

Dans les modules de filtration, une surconcentration de particules apparaît au voisinage de la paroi filtrante. De même, dans les modules de séparation membranaire, les solutions présentent de fortes concentrations près de la membrane. Or, les suspensions ou solutions concentrées sont souvent rhéofluidifiantes et peuvent présenter un seuil de contrainte au-delà d'une concentration limite. Nous nous intéressons ici au premier aspect, à savoir le caractère rhéofluidifiant que nous modélisons par une loi de comportement de Carreau.

Dans la section 2, nous décrivons le problème et les paramètres adimensionnels associés. Les équations décrivant l'état de base sont données dans la section 3. Les équations aux perturbations dans le cas tridimensionnel sont ensuite déterminées dans la section 4. Dans la section 5 sont décrites les

méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations et des cas de validation sont ensuite présentés. Les résultats sont analysés et discutés au sein de la section 6.

## 2 Description du problème

### 2.1 Géométrie

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans l'espace annulaire situé entre 2 cylindres infinis concentriques de rayons  $\hat{R}_1$  et  $\hat{R}_2$ , Fig. 1. Le cylindre intérieur tourne à une vitesse angulaire  $\hat{\Omega}$  et le cylindre extérieur est immobile. Les deux cylindres sont poreux. Le système présente deux entrées et deux sorties. Du fluide entre par le haut et sort par le bas, sous l'effet d'un gradient de pression vertical  $\hat{G}$ . Du fluide traverse la paroi du cylindre extérieur et ressort par la paroi du cylindre intérieur avec un débit par unité de hauteur  $\hat{q}_f$ . L'écoulement est donc de type Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial.

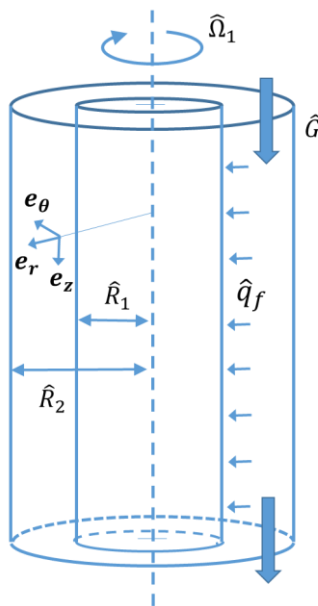


Fig. 1-Géométrie étudiée.

### 2.2 Equations gouvernant le problème

L'écoulement est régi par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (1)$$

$$\hat{\rho} \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} \right] = -\nabla \hat{P} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (2)$$

où  $\hat{\mathbf{U}} = \hat{U} \mathbf{e}_r + \hat{V} \mathbf{e}_\theta + \hat{W} \mathbf{e}_z$  est le vecteur vitesse exprimé en coordonnées cylindriques  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ ,  $\hat{P}$  est la pression et  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  est le déviateur du tenseur des contraintes. Les grandeurs portant un chapeau (^) sont dimensionnelles.

Les équations sont adimensionnées avec les échelles suivantes: la largeur de l'entrefer  $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$  pour les longueurs, la vitesse de rotation du cylindre intérieur  $\hat{\Omega} \hat{R}_1$  pour les vitesses, le temps de diffusion visqueux  $\hat{\rho} \hat{d}^2 / \hat{\mu}_{ref}$  pour le temps et la quantité  $\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega} / \hat{d}$  pour les contraintes et la pression où  $\mu_{ref}$  est une viscosité de référence qui sera précisée dans le paragraphe suivant. Les équations deviennent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} , \quad (4)$$

où l'on a introduit le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega} \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}} . \quad (5)$$

### Loi de comportement rhéologique

On considère un fluide incompressible non newtonien, purement visqueux

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (6)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T$  est le tenseur des taux de cisaillement, de composantes  $\dot{\gamma}_{ij}$  avec  $i, j = r, \theta$  ou  $z$ . Le carré du second invariant du tenseur des taux de cisaillement  $\Gamma$  s'exprime avec la convention de sommation d'Einstein

$$\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} . \quad (7)$$

On suppose que le comportement rhéologique du fluide est décrit par la loi de Carreau [8]

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_{\infty}}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_{\infty}} = (1 + \hat{\lambda}^2 \hat{\Gamma})^{\frac{n-1}{2}} . \quad (8)$$

La constante  $\hat{\lambda}$  est un temps caractéristique du fluide. La viscosité à faible taux de cisaillement  $\hat{\mu}_0$  est supposée grande par rapport à la viscosité à taux de cisaillement élevé  $\hat{\mu}_{\infty}$ ,  $\hat{\mu}_0 \gg \hat{\mu}_{\infty}$  [9]. La loi de Carreau s'écrit alors sous forme adimensionnelle

$$\mu = (1 + \lambda^2 \Gamma)^{\frac{n-1}{2}} \text{ avec } \lambda = \frac{\hat{\lambda} \hat{\rho} \hat{\mu}_{ref}}{\hat{d}^2} . \quad (9)$$

La viscosité à faible taux de cisaillement est choisie comme référence  $\hat{\mu}_{ref} = \hat{\mu}_0$ .

## 2.3 Paramètres adimensionnels

Les paramètres adimensionnels gouvernant le problème sont :

- le rapport de rayons

$$\eta = \frac{\hat{R}_1}{\hat{R}_2} , \quad (10)$$

Deux rapports de rayons seront considérés dans ce travail :  $\eta = 0.4$  et  $\eta = 0.8$ , représentatifs de dispositifs à entrefers larges et étroits respectivement.

- Les paramètres rhéologiques adimensionnels

$$n \text{ et } \lambda = \frac{\hat{\lambda} \hat{\rho} \hat{\mu}_0}{\hat{d}^2} , \quad (11)$$

- le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega} \hat{d}}{\hat{\mu}_0} , \quad (12)$$

- le gradient de pression adimensionnel

$$G = \frac{\hat{d}^2}{\hat{\mu}_0 \hat{R}_1 \hat{\Omega}} \hat{G} , \quad (13)$$

- et le débit radial par unité de hauteur adimensionnel

$$q_f = \frac{\hat{q}_f}{2\pi \hat{R}_1 \hat{\Omega} \hat{d}} . \quad (14)$$

Par convention,  $q_f$  sera positif pour un écoulement radial centripète, c'est-à-dire un flux dirigé vers le cylindre intérieur. Ce cas correspond à la réalité physique de la filtration rotative. Quand  $q_f$  sera négatif, l'écoulement sera centrifuge, c'est-à-dire dirigé vers le cylindre extérieur.

### 3 Etat de base

L'écoulement de base est supposé stationnaire, axisymétrique et établi dans la direction axiale  $z$ ,  $\mathbf{U}^b = (U^b(r), V^b(r), W^b(r))$ . Le gradient de pression axial est en outre supposé constant,

$$\frac{\partial \hat{P}^b}{\partial \hat{z}} = -\hat{G} , \quad (15)$$

ce qui se traduit sous forme adimensionnelle par

$$\frac{\partial P^b}{\partial z} = -G \quad \text{avec} \quad G = \frac{\hat{d}^2}{\hat{\mu}_0 \hat{R}_1 \hat{\Omega}} \hat{G} . \quad (16)$$

Les équations (1) et (2) sont satisfaites par l'état de base et s'écrivent en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^b) = 0 \quad (17)$$

$$Re \left( U^b \frac{\partial U^b}{\partial r} - \frac{V^{b2}}{r} \right) = -\frac{\partial P^b}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}^b) - \frac{\tau_{\theta\theta}^b}{r} \quad (18)$$

$$Re \left( U^b \frac{\partial V^b}{\partial r} + \frac{U^b V^b}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}^b) \quad (19)$$

$$Re \left( U^b \frac{\partial W^b}{\partial r} \right) = G + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}^b) \quad (20)$$

Le tenseur des taux de cisaillement de l'état de base s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^b = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial U^b}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V^b}{r} \right) & \frac{\partial W^b}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V^b}{r} \right) & 2 \frac{U^b}{r} & 0 \\ \frac{\partial W^b}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

et le carré du second invariant de  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^b$

$$\Gamma^b = \frac{1}{2} \left( \dot{\gamma}_{rr}^{b2} + \dot{\gamma}_{\theta\theta}^{b2} \right) + \dot{\gamma}_{r\theta}^{b2} + \dot{\gamma}_{rz}^{b2} . \quad (22)$$

#### Conditions aux limites

La résolution de l'équation de conservation de la masse (17)(17) conduit à

$$U^b = \frac{K}{r} . \quad (23)$$

On constate que la vitesse radiale ne peut pas être nulle au niveau de la paroi extérieure et vaut  $K/R_2$ . Il faut considérer une entrée de fluide dans le système au travers du cylindre extérieur. La constante  $K$  est déterminée à partir des conditions aux limites. Le débit de fluide  $\hat{q}_f$  traversant la paroi du cylindre intérieur, ramené à l'unité de hauteur, est relié à la vitesse radiale dimensionnelle en  $\hat{r} = \hat{R}_1$

$$2\pi \hat{R}_1 \hat{H} \hat{U}^b(\hat{R}_1) = \hat{q}_f \hat{H} \quad (24)$$

où  $\hat{H}$  est une hauteur arbitraire. On en déduit

$$U^b(r) = -\frac{q_f}{r} \quad \text{avec} \quad q_f = \frac{\hat{q}_f}{2\pi \hat{R}_1 \hat{\Omega} \hat{d}}. \quad (25)$$

La vitesse orthoradiale est égale à la vitesse de rotation de la paroi du cylindre intérieur en  $\hat{r} = \hat{R}_1$  et est nulle au contact du cylindre extérieur qui est immobile. La vitesse axiale  $W_B$  est nulle aux parois des cylindres intérieur et extérieur. Les conditions aux limites s'écrivent ainsi sous forme adimensionnelle

$$U^b(R_1, \theta, z) = -\frac{q_f}{R_1} \quad \text{et} \quad U^b(R_2, \theta, z) = -\frac{q_f}{R_2}, \quad (26)$$

$$V^b(R_1, \theta, z) = 1 \quad \text{et} \quad V^b(R_2, \theta, z) = 0 \quad (27)$$

$$W^b(R_1, \theta, z) = W^b(R_2, \theta, z) = 0 \quad (28)$$

Les équations (17)-(20) associées aux conditions (26)-(28) sont résolubles analytiquement dans le cas où le fluide est newtonien [3], [8]

Lorsque le fluide n'est pas newtonien, l'équation de conservation de la masse (17) est inchangée et le profil de vitesse radiale est donc identique au cas newtonien

$$U^b(r) = -\frac{q_f}{r}. \quad (29)$$

Pour obtenir les autres composantes de la vitesse de base dans le cas rhéofluidifiant, il faut effectuer une résolution numérique approchée des équations (19)-(20) et (27)-(28), comme décrit au paragraphe 5.1.

## 4 Equations aux perturbations

Pour étudier la stabilité linéaire de l'écoulement au sein du procédé, on superpose à l'écoulement de base une perturbation infinitésimale

$$\{\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\tau}\} = \{\mathbf{U}^b, P^b, \boldsymbol{\tau}^b\} + \epsilon \{\mathbf{u}', p', \boldsymbol{\tau}'\}. \quad (30)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre petit devant 1. L'expression (30) de  $\{\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\tau}\}$  est injectée dans les équations (3)-(4). Une linéarisation est ensuite opérée autour de l'état de base pour obtenir les équations aux perturbations

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + Re [(\mathbf{U}^b \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U}^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'. \quad (32)$$

La perturbation du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{\epsilon} [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}') - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b)] = \mu^b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}') + \mu' \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}^b) \quad (33)$$

et fait intervenir la perturbation de viscosité  $\mu'$  qui s'exprime, en utilisant la convention de sommation d'Einstein,

$$\mu' = \frac{1}{\epsilon} [\mu(\mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}') - \mu(\mathbf{U}^b)] = \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{U}^b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') = \left( \frac{d\mu}{d\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right) (\mathbf{U}^b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') \quad (34)$$

avec

$$\frac{d\mu}{d\Gamma} = \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + \lambda^2 \Gamma)^{\frac{n-3}{2}} \quad (35)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \dot{\gamma}_{ij} & \text{si } ij = rr, \theta\theta \text{ ou } zz \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = 2 \dot{\gamma}_{ij} & \text{si } ij = r\theta, rz \text{ ou } \theta z \end{cases} \quad (36)$$

### Formulation $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Le système linéaire (31)-(32) est homogène dans les directions axiale et azimutale. La solution peut donc être recherchée sous la forme d'une superposition de modes normaux

$$\{\mathbf{u}', p'\} = \{\tilde{\mathbf{u}}(r), \tilde{p}(r)\} \exp[\sigma t + i(m\theta + kz)] + c.c. \quad (37)$$

avec  $\tilde{\mathbf{u}}(r) = u(r) \mathbf{e}_r + v(r) \mathbf{e}_\theta + w(r) \mathbf{e}_z$ ,  $k \in \mathbb{R}$  le nombre d'onde axial et  $m \in \mathbb{N}$  le nombre d'onde azimutal.

La grandeur  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  est le taux de croissance complexe. Sa partie réelle est le taux d'amplification temporel de la perturbation. La partie imaginaire du taux de croissance  $\sigma_i$  est la fréquence d'oscillation de la perturbation et le rapport  $\sigma_i/k$  sa vitesse de phase.

Nous avons ensuite utilisé l'équation (31) pour exprimer la composante  $w(r)$  et la projection de l'équation (32) suivant  $z$  pour exprimer  $\tilde{p}(r)$ . Ces expressions ont été injectées dans les projections suivant  $r$  et  $\theta$  de l'équation (32). Nous avons ainsi obtenu un problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathcal{L} \tilde{\mathbf{q}} = \sigma \mathcal{M} \tilde{\mathbf{q}} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{q}} = (u, v)^T. \quad (38)$$

Les opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  ne sont pas reproduits ici car ils comportent plus de 700 termes. Les risques d'erreur sont donc importants. Pour cette raison, un travail de validation a été réalisé, section 5.2.

## 5 Résolution et validation des équations

### 5.1 Résolution numérique

Pour résoudre les équations (17)-(20) (état de base) et (38) (équations aux perturbations), nous utilisons une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev évalués en  $N + 1$  points de Gauss-Lobatto [10].

### 5.2 Validation

Plusieurs articles de la littérature donnent des conditions critiques pour des valeurs de nombre d'onde azimutal  $m$  arbitraires. Nos programmes donnent des valeurs très proches, Tab. 1.

$\eta$	$m$	$q_f$	$G$	$Re_c$ présent travail	$Re_c$ sources ci-contre	Sources
0.95	0	0	0.3213	186.77	186.76	[11], [3]
0.95	0	0	0.6248	192.04	192.04	[11], [3]
0.95	1	0	1.1338	211.69	211.67	[11], [3]
0.5	1	0	4.1146	86.83	86.81	[12], [3]
0.8	0	-0.1677	0	119.27	119.27	[3]
0.8	0	0.0934	0	214.28	214.21	[3]

Tab. 1-Comparaison des conditions critiques obtenues avec le programme décrit à la section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** avec des valeurs précédemment publiées dans la littérature. Nombre de Reynolds critique  $Re_c$  pour différentes valeurs de rapport de rayon  $\eta$ , nombre d'onde azimutal  $m$ , débit radial  $q_f$  et gradient de pression axial  $G$ .

## 6 Résultats

Sur les figures 2 à 5, sont présentées les conditions critiques en fonction du débit radial  $q_f$  pour deux tailles d'entrefer,  $\eta = 0.4$  et  $0.8$ , avec ou sans écoulement axial,  $G = 0$  et  $1$ , et pour différentes intensités de rhéofluidifiant,  $n = 1$  à  $0.5$ .

### Nombre de Reynolds critique

Pour tous les cas considérés, le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  décroît puis croît quand le débit augmente, en passant par un minimum  $Re_{cmin}$ , Fig. 2(a), Fig. 3(a), Fig. 4(a) et Fig. 5(a). Le lieu de ce minimum  $q_{fmin}$  est négatif. De plus, il n'est possible de calculer les conditions critiques que dans un intervalle limité de débit radial  $[q_{f1}, q_{f2}]$ . Pour  $q_f < q_{f1}$  et  $q_f > q_{f2}$ , l'écoulement est inconditionnellement stable.

Lorsque le fluide devient plus rhéofluidifiant ( $n$  diminue),  $Re_{cmin}$  diminue. Le débit qui réalise ce minimum  $q_{fmin}$  diminue pour  $\eta = 0.4$  mais reste pratiquement constant pour  $\eta = 0.8$ . L'intervalle  $[q_{f1}, q_{f2}]$  dans lequel il y a instabilité se réduit quand  $n$  diminue. Pour  $\eta = 0.4$ ,  $q_{f1}$  est presque invariant et  $q_{f2}$  décroît, alors que pour  $\eta = 0.8$ ,  $q_{f1}$  augmente et  $q_{f2}$  baisse.

### Nombre d'onde axial critique

Le nombre d'onde axial  $k_c$  présente également un minimum  $k_{min}$  mais son lieu  $q'_{fmin}$  est différent de  $q_{fmin}$ , Fig. 2(b), Fig. 3(b), Fig. 4(b) et Fig. 5(b). Pour  $\eta = 0.4$ ,  $k_{min}$  augmente et  $q'_{fmin}$  diminue quand  $n$  diminue. Pour  $\eta = 0.8$  au contraire,  $k_{min}$  diminue et  $q'_{fmin}$  varie peu quand le fluide devient plus rhéofluidifiant.

Lorsque  $G = 1$ , les courbes  $k_c(q_f)$  présentent des décrochements qui correspondent à des changements de nombre d'onde azimutal critique  $m_c$ .

### Nombre d'onde azimutal critique

Pour  $G = 0$ , le nombre d'onde azimutal critique  $m_c$  est toujours nul, ce qui signifie que les tourbillons sont de forme toroïdale, fermés sur eux-mêmes.

Lorsque  $G = 1$  en revanche,  $m_c$  est non nul pour des valeurs de  $|q_f|$  suffisamment élevées, Fig. 3(c), et Fig. 5(c). Dans ce cas, les tourbillons sont enroulés en hélice autour du cylindre intérieur. L'étendue de la zone pour laquelle  $m_c = 0$  dépend de l'indice  $n$  et de la largeur de l'entrefer  $\eta$ .



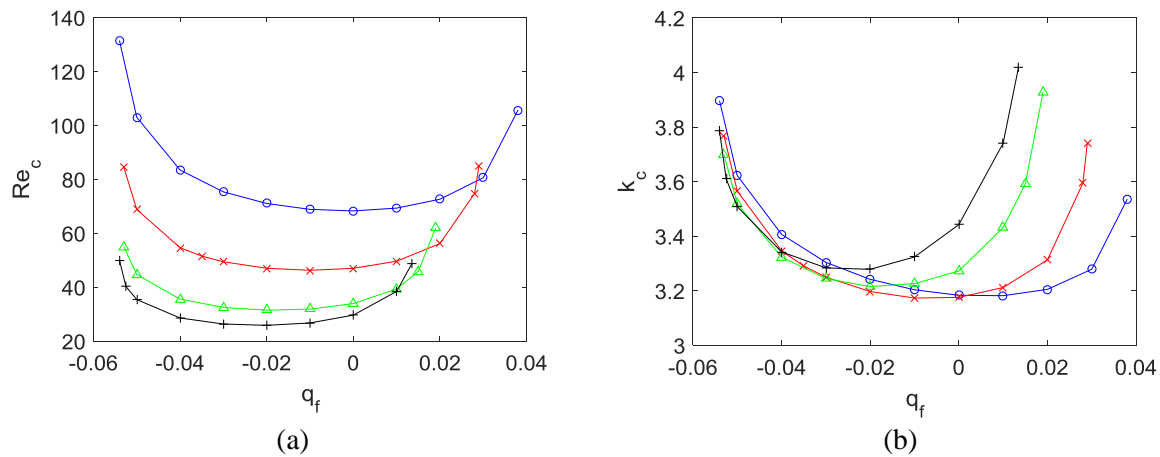


Fig. 2-Conditions critiques en fonction du débit radial adimensionnel  $q_f$  pour un large entrefer  $\eta = 0.4$  et un gradient de pression adimensionnel nul  $G = 0$ . (a) Nombre de Reynolds critique  $Re_c$ . (b) Nombre d'onde axial critique  $k_c$ . (o) Fluide newtonien ( $n = 1$ ). Fluides rhéofluidifiants suivant une loi rhéologique de Carreau avec  $\lambda = 5$  et (x)  $n = 0.8$ , ( $\Delta$ )  $n = 0.6$ , (+)  $n = 0.5$ .

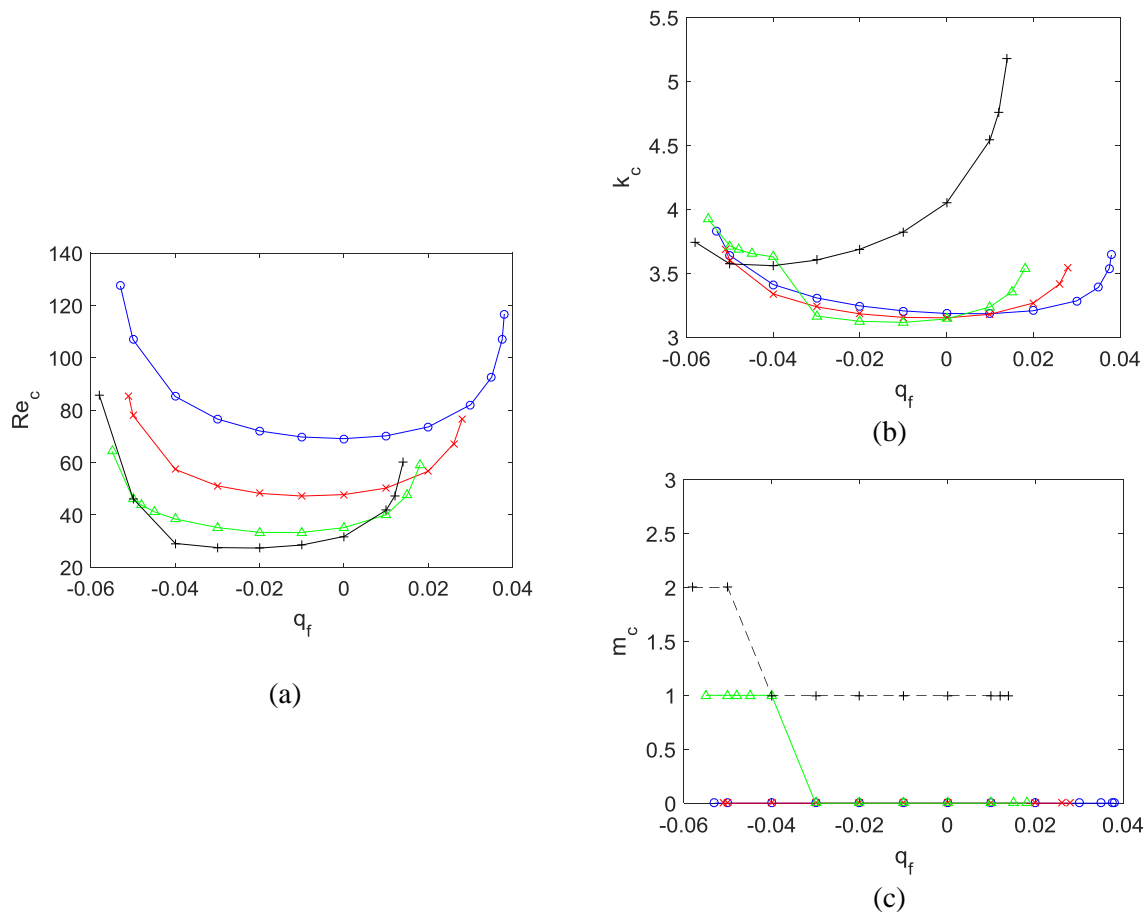


Fig. 3-Conditions critiques en fonction du débit radial adimensionnel  $q_f$  pour un large entrefer  $\eta = 0.4$  et un gradient de pression adimensionnel non nul  $G = 1$ . (a) Nombre de Reynolds critique  $Re_c$ . (b) Nombre d'onde axial critique  $k_c$ . (c) Nombre d'onde azimutal critique  $m_c$ . (o) Fluide newtonien ( $n = 1$ ). Fluides rhéofluidifiants suivant une loi rhéologique de Carreau avec  $\lambda = 5$  et (x)  $n = 0.8$ , ( $\Delta$ )  $n = 0.6$ , (+)  $n = 0.5$ .

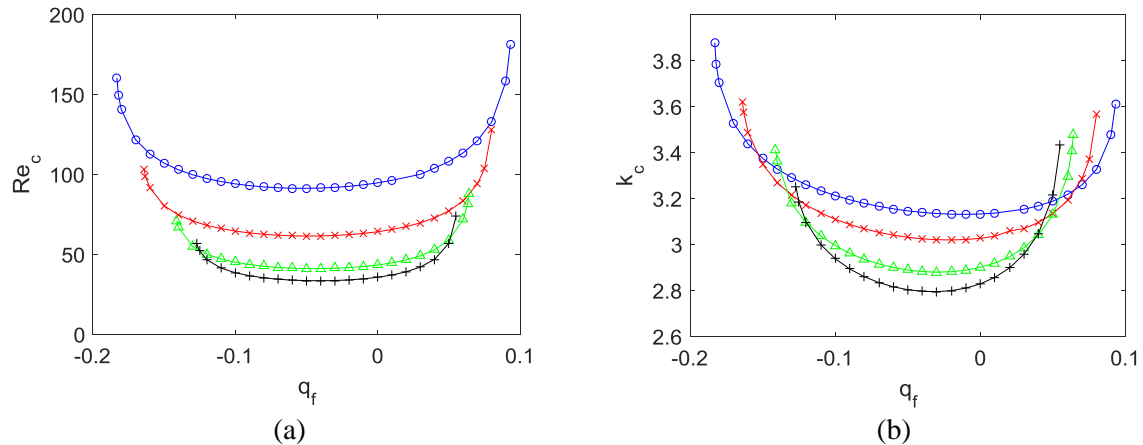


Fig. 4-Conditions critiques en fonction du débit radial adimensionnel  $q_f$  pour un entrefer étroit  $\eta = 0.8$  et un gradient de pression adimensionnel nul  $G = 0$ . (a) Nombre de Reynolds critique  $Re_c$ . (b) Nombre d'onde axial critique  $k_c$ . (o) Fluide newtonien ( $n = 1$ ). Fluides rhéofluidifiants suivant une loi rhéologique de Carreau avec  $\lambda = 5$  et (x)  $n = 0.8$ , ( $\Delta$ )  $n = 0.6$ , (+)  $n = 0.5$ .

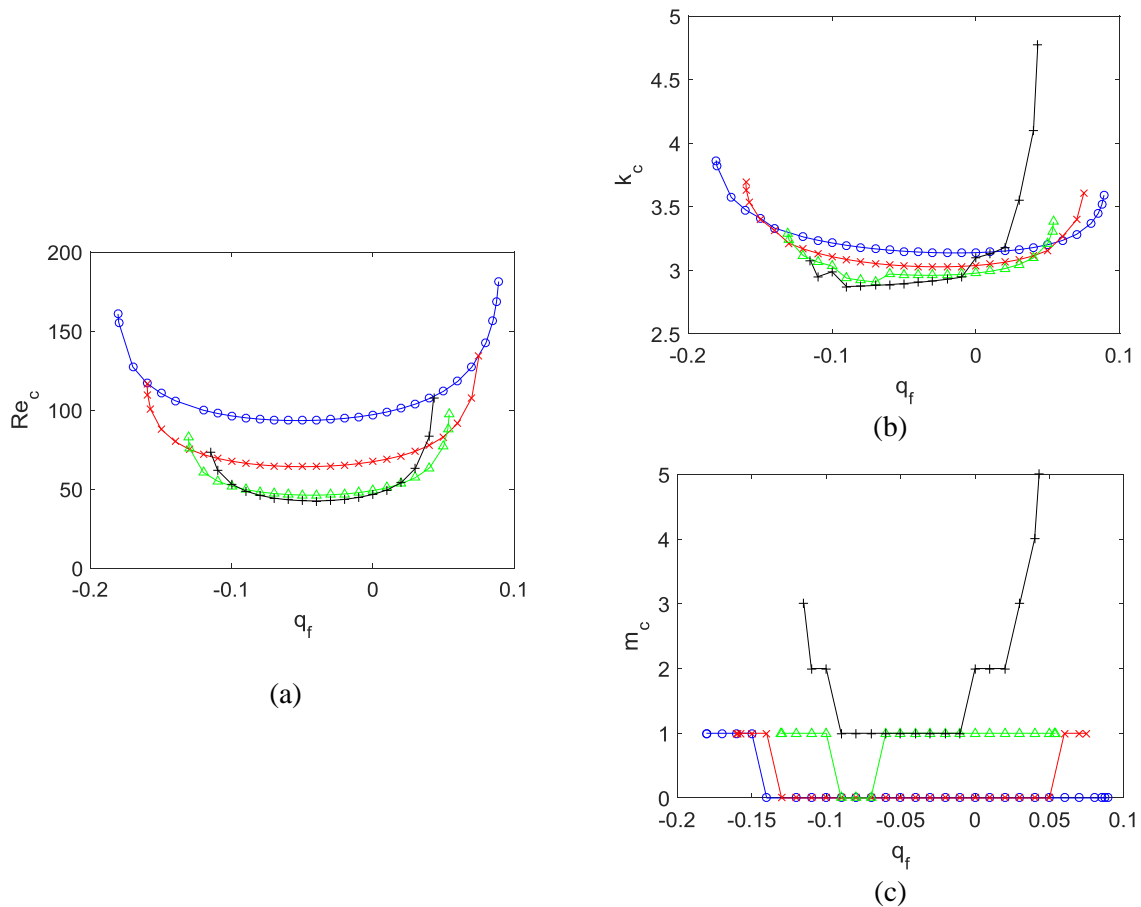


Fig. 5-Conditions critiques en fonction du débit radial adimensionnel  $q_f$  pour un entrefer étroit  $\eta = 0.8$  et un gradient de pression adimensionnel non nul  $G = 1$ . (a) Nombre de Reynolds critique  $Re_c$ . (b) Nombre d'onde axial critique  $k_c$ . (c) Nombre d'onde azimutal critique  $m_c$ . (o) Fluide newtonien ( $n = 1$ ). Fluides rhéofluidifiants suivant une loi rhéologique de Carreau avec  $\lambda = 5$  et (x)  $n = 0.8$ , ( $\Delta$ )  $n = 0.6$ , (+)  $n = 0.5$ .

## 7 Conclusion

Dans cette communication, nous nous sommes intéressés à un procédé de filtration rotative cylindrique. Un tel dispositif est notamment utilisé pour la filtration du plasma sanguin.

L'écoulement au sein de ce dispositif est de type Taylor-Couette-Poiseuille avec flux radial. Une analyse de stabilité linéaire de cet écoulement a été conduite. Les équations gouvernant l'état de base et celles décrivant l'évolution de perturbations infinitésimales ont été établies.

Ces équations ont été résolues par une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev évalués en  $N + 1$  points de Gauss-Lobatto. Les équations et leur résolution ont ensuite été validées en traitant des cas tests et en comparant avec succès les résultats obtenus à des résultats publiés antérieurement.

Les conditions critiques ont été détaillées pour différentes valeurs de  $q_f$ ,  $G$ , et  $n$  et pour deux rapports de rayons  $\eta = 0.4$  et  $0.8$  correspondant à des entrefers large et étroit. Le nombre de Reynolds  $Re_c$  et le nombre d'onde axial  $k_c$  critiques sont décroissants puis croissants quand  $q_f$  augmente, passant par un minimum. En présence d'écoulement axial, le nombre d'onde azimutal critique  $m_c$  peut prendre des valeurs non nulles et présenter un minimum à faible entrefer. Les lieux des minima de ces 3 grandeurs sont différents et peuvent varier avec la valeur de  $n$ . Il n'est pas possible de calculer les conditions critiques en dehors d'un intervalle  $[q_{f1}, q_{f2}]$ : l'écoulement est inconditionnellement stable à l'extérieur de cet intervalle. Cet intervalle se réduit lorsque  $n$  diminue.

## Références

- [1] E. Serre, M. A. Sprague, et R. M. Lueptow, « Stability of Taylor–Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow », *Phys. Fluids*, vol. 20, n° 3, p. 034106, 2008.
- [2] S. K. Bahl et K. M. Kapur, « The Stability of a Viscous Flow between Two Concentric Rotating Porous Cylinder with an Axial Flow », *Def. Sci. J.*, vol. 25, n° 4, p. 139–144, 2014.
- [3] A. A. Kolyshkin et R. Vaillancourt, « Convective instability boundary of Couette flow between rotating porous cylinders with axial and radial flows », *Phys. Fluids*, vol. 9, n° 4, p. 910, 1997.
- [4] E. C. Johnson et R. M. Lueptow, « Hydrodynamic stability of flow between rotating porous cylinders with radial and axial flow », *Phys. Fluids*, vol. 9, n° 12, p. 3687, 1997.
- [5] D. Martinand, E. Serre, et R. M. Lueptow, « Absolute and convective instability of cylindrical Couette flow with axial and radial flows », *Phys. Fluids*, vol. 21, n° 10, p. 104102, 2009.
- [6] K. Min et R. M. Lueptow, « Circular Couette flow with pressure-driven axial flow and a porous inner cylinder », *Exp. Fluids*, vol. 17, n° 3, p. 190–197, 1994.
- [7] J. A. Schwille, D. Mitra, et R. M. Lueptow, « Design parameters for rotating cylindrical filtration », *J. Membr. Sci.*, vol. 204, n° 1, p. 53–65, 2002.
- [8] R. B. Bird, W. E. Stewart, et E. N. Lightfoot, « Transport phenomena. 2nd », N. Y., 2002.
- [9] R. I. Tanner, *Engineering rheology*, vol. 52. OUP Oxford, 2000.
- [10] P. J. Schmid et D. S. Henningson, *Stability and transition in shear flows*, vol. 142. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] B. S. Ng et E. R. Turner, « On the linear stability of spiral flow between rotating cylinders », in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1982, vol. 382, p. 83–102.
- [12] D. I. Takeuchi et D. F. Jankowski, « A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow », *J. Fluid Mech.*, vol. 102, p. 101–126, 1981.