

Ondes à courtes crêtes internes à l'interface de deux couches de fluides d'épaisseurs arbitraires

D. BOUGHAZI^a, N. ALLALOU^a, M. DEBIANE^b

a.Faculté des Sciences UMBB Boumerdes, Algérie (bouda.2007@hotmail.fr.)

b.Faculté de Physique USTHB BP.32 El Alia Alger, Algérie (debianemd@yahoo.fr.)

Résumé

La méthode que nous proposons pour le calcul des ondes à courtes crêtes interfaciales est basée sur celle du Lagrangien moyen de Whitham. Cette approche utilise une formulation variationnelle qui réduit le problème, composé d'équations aux dérivées partielles, à un système d'équations algébriques non-linéaires qui est résolu par la méthode de Newton.

Abstract

A method is obtained, by using Whitham's averaged Lagrangian theory, to solve the problem of short-crested interfacial waves. This variational formulation of the problem yields a set of nonlinear algebraic equations solved by Newton's method.

Mots clefs - ondes à courtes crêtes ; interfaciales ; gravité ; capillarité ; lagrangien de Whitham ; résonance

1. Introduction

Les ondes internes se développent à l'intérieur d'un milieu fluide stratifié en densité. Ces ondes apparaissent comme une composante essentielle des mouvements océaniques. Leur étude est motivée par le rôle important qu'elles jouent dans les échanges globaux d'énergie, les infrastructures sous-marines, le transport des sédiments, la propagation acoustique et la vie de nombreux organismes.

Nous nous intéressons particulièrement aux ondes interfaciales, c'est-à-dire à celles qui se propagent à l'interface de deux fluides de densités différentes. Si les ondes de surface tridimensionnelles ont été intensivement étudiées (e.g. [1], [2]), les ondes internes tridimensionnelles non-linéaires n'ont fait l'objet que de quelques travaux qui concernent essentiellement des formes solitaires. C'est pour cette raison que nous nous sommes intéressés au problème des ondes à courtes crêtes interfaciales. C'est un champ de vagues tridimensionnelles et périodiques suivant deux directions distinctes du plan horizontal. Elles peuvent être générées par l'interaction de deux trains d'ondes de même amplitude qui se propagent suivant des directions différentes. En plus de l'importance des applications, il y a une raison, sans doute plus profonde, de les étudier. Elles représentent la forme la plus simple d'une large variété d'ondes tridimensionnelles qui ne sont pas encore étudiées. Leur étude est le premier pas nécessaire pour envisager de traiter les autres cas plus généraux et plus compliqués.

La méthode que nous proposons pour le calcul de ces vagues est basée sur celle du Lagrangien moyen de Whitham [3]. Cette approche utilise une formulation variationnelle qui réduit le problème à un système d'équations algébriques non-linéaires qui est résolu par la méthode de Newton. Les propriétés de la matrice jacobienne associée à cette dernière et la symétrie des vagues à courtes crêtes permettent de réduire considérablement l'espace mémoire utilisé et le temps de calcul. En outre, cette méthode nous a permis de prendre en considération l'effet de la tension superficielle difficilement

accessible aux autres techniques. Nous cherchons à calculer les profils de ces ondes et leurs caractéristiques fondamentales.

2. Position du problème

Nous considérons la réflexion oblique sur un mur vertical (figure 1) d'un train d'ondes de gravité-capillarité uniforme se propageant à l'interface de deux couches de fluides d'épaisseurs arbitraires. L'écoulement est supposé irrotationnel et les fluides parfaits, incompressibles et homogènes. Les propriétés du fluide inférieur porteront l'indice 1 et celles de la couche supérieure l'indice 2. Pour simplifier, nous considérons le cas où le système des deux couches de fluides est limité, en haut et en bas, par deux parois rigides horizontales. On admet que la réflexion est totale, ce qui implique l'égalité des amplitudes et celle des fréquences des ondes incidentes et réfléchies. Le champ de vagues généré par l'interaction de ces deux dernières est celui des ondes à courtes crêtes qui se propagent uniformément dans la direction de la paroi. Pour les étudier nous avons choisi le repère orthonormé $\mathfrak{R}(O, X, Y, Z)$ dont les axes (OX) et (OY) sont horizontaux et (OZ) vertical ascendant. L'origine est placée telle que le niveau moyen de l'interface soit contenu dans le plan horizontal (XOY) . Ces ondes ont une forme doublement périodique suivant les deux directions (OX) et (OY) avec des longueurs d'ondes $\lambda_x = \lambda/\sin\theta$ et $\lambda_y = \lambda/\cos\theta$ le long de ces deux axes. Ici λ représente la longueur d'onde du train de vagues incident et θ l'angle entre sa direction de propagation et la normale au mur. Pour rendre adimensionnelles les équations, on définit une longueur de référence $k^{-1} = \lambda/2\pi$, et un temps de référence $(gk)^{-1/2}$, g étant l'accélération de la pesanteur et k le nombre d'onde du train incident. Pour étudier les ondes de formes permanentes, on impose au repère \mathfrak{R} de se déplacer dans la direction de propagation (OX) , avec une célérité égale à la vitesse de phase c de l'onde. La méthode utilisée pour les déterminer faisant intervenir des intégrales de fonctions harmoniques, il est intéressant d'avoir une période 2π dans chacune des directions (OX) et (OY) . Ceci nous suggère de définir les variables X, Y et Z comme suit

$$X = px - \omega t \quad Y = qy \quad Z = z$$

ω est la fréquence, $\mathfrak{R}'(o, x, y, z)$ un référentiel fixe dont les axes ont les mêmes directions que leurs homologues dans \mathfrak{R} . p et q représentent les nombres d'ondes adimensionnels suivant les directions (OX) et (OY) et sont définis par

$$p = \sin\theta \quad \text{et} \quad q = \cos\theta$$

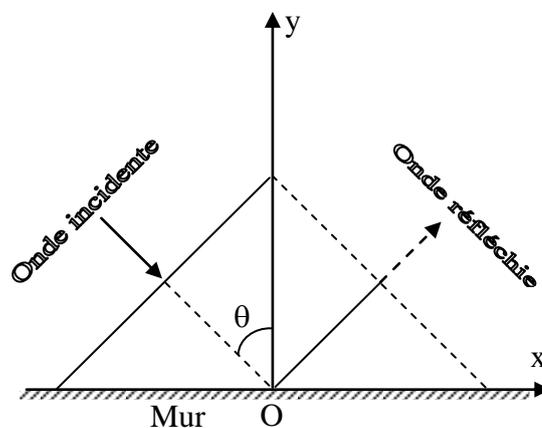


Fig.1. Réflexion oblique sur un mur

L'écoulement étant supposé irrotationnel, il peut être décrit, dans tout le volume liquide, par des potentiels des vitesses adimensionnels Φ_i ($i=1,2$), chacun d'eux satisfaisant l'équation de Laplace

$$p^2\Phi_{iXX} + q^2\Phi_{iYY} + \Phi_{iZZ} = 0$$

dans tout le volume du fluide « i », associée à deux conditions sur l'interface définie par $Z = \eta(X, Y)$

$$-\omega\eta_x + p^2\eta_x\Phi_{ix} + q^2\eta_y\Phi_{iy} - \Phi_{iz} = 0$$

$$-\frac{\omega}{\mu-1}(\mu\Phi_{2x} - \Phi_{1x}) + \frac{\mu}{2(\mu-1)}(p^2\Phi_{2x}^2 + q^2\Phi_{2y}^2 + \Phi_{2z}^2)$$

$$-\frac{1}{2(\mu-1)}(p^2\Phi_{1x}^2 + q^2\Phi_{1y}^2 + \Phi_{1z}^2) + \eta + \kappa\xi(X, Y) = 0$$

Sur les parois inférieure et supérieure, on exprime la condition d'imperméabilité par

$$\Phi_z^{(1)} = 0 \quad z = -d_1,$$

$$\Phi_z^{(2)} = 0 \quad z = d_2,$$

Dans ces équations ρ_i est la masse volumique du fluide « i », T le coefficient de tension superficielle et

$$\mu = \rho_2/\rho_1$$

$$\kappa = \frac{Tk^2}{g(\rho_1 - \rho_2)}$$

$$\xi(x, y) = \frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y}{(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{3/2}}$$

3. Méthode de résolution

La méthode des perturbations permet de montrer que les solutions du problème ci-dessus ont les formes suivantes

$$\Phi_1(X, Y, Z) = \sum_{mn} b_{mn} \frac{\text{ch}\alpha_{mn}(Z + d_1)}{\text{ch}\alpha_{mn}d_1} \chi^{mn}(X, Y) \quad (1a)$$

$$\Phi_2(X, Y, Z) = \sum_{mn} c_{mn} \frac{\text{ch}\alpha_{mn}(Z - d_2)}{\text{ch}\alpha_{mn}d_2} \chi^{mn}(X, Y) \quad (1b)$$

$$\eta(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0}\Delta_{n0} a_{mn} \cos mX \cos nY \quad (2)$$

avec $\chi^{mn}(X, Y) = \sin mX \cos nY$; $\Delta_{j0} = 1 - \frac{1}{2}\delta_{j0}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Dans ces expressions les inconnues à calculer sont les coefficients a_{mn} , b_{mn} et c_{mn} . De l'équation de Laplace, il découle

$$\alpha_{mn}^2 = p^2m^2 + q^2n^2$$

Le niveau moyen de l'interface étant pris égal à zéro

$$\bar{\eta}(X, Y) = a_{00} = 0$$

La barre signifie qu'il s'agit d'une moyenne calculée sur le pavé de côté 2π . La conséquence de la symétrie triangulaire des ondes étudiées est que

$$a_{mn} = b_{mn} = 0$$

lorsque m et n n'ont pas la même parité.

Pour appliquer la méthode variationnelle de Whitham au problème des ondes interfaciales de gravité-capillarité en écoulement irrotationnel et pour deux couches d'épaisseurs finies, on utilise le lagrangien moyen

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-\mu} \int_{-d_1}^{\eta} \left[-\varpi \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \Phi_1)^2 \right] dZ \right\} dXdY \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \int_{\eta}^{d_2} \left[-\varpi \frac{\partial \Phi_2}{\partial X} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \Phi_2)^2 \right] dZ \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \eta^2 + \kappa \left(\sqrt{1 + (\bar{\nabla} \eta)^2} - 1 \right) \right\} dXdY \end{aligned}$$

Dans cette relation, le lagrangien L est exprimé dans le référentiel \mathfrak{R} où la moyenne se calcule dans le

pavé ($\Delta X = 2\pi, \Delta Y = 2\pi$), et $\bar{\nabla} = \left(p \frac{\partial}{\partial X}, q \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right)$

Ce lagrangien moyen est calculé en remplaçant l'élévation de l'interface et les potentiels des vitesses par leurs expressions (1a-b, 2). La méthode adoptée est celle utilisée par Debiante et Kharif [2] pour le problème des ondes de surface à courtes crêtes. Le résultat obtenu s'exprime en fonction des inconnues a_{mn} , b_{mn} et c_{mn}

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \frac{1}{64(1-\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\text{ch}(\alpha_{mn} d_1) \text{ch}(\alpha_{kl} d_1)} \times \frac{1}{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl})} \left[{}_1\Omega_{mnkl}^+ \right]^t \left[\Theta_{mnkl}^+ \right] \\ & + \frac{1}{64(1-\mu)} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty}}_{\alpha_{mn} \neq \alpha_{kl}} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\text{ch}(\alpha_{mn} d_1) \text{ch}(\alpha_{kl} d_1)} \times \frac{1}{(\alpha_{mn} - \alpha_{kl})} \left[{}_1\Omega_{mnkl}^- \right]^t \left[\Theta_{mnkl}^- \right] \\ & + \frac{1}{64(1-\mu)} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty}}_{\alpha_{mn} = \alpha_{kl}} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\text{ch}^2(\alpha_{mn} d_1)} \times \left[{}_1\Lambda_{mn} \right]^t \left[\Theta_{mnmn}^+ \right] \\ & - \frac{\mu}{64(1-\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_{mn} c_{kl}}{\text{ch}(\alpha_{mn} d_2) \text{ch}(\alpha_{kl} d_2)} \times \frac{1}{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl})} \left[{}_2\Omega_{mnkl}^+ \right]^t \left[\Theta_{mnkl}^+ \right] \\ & - \frac{\mu}{64(1-\mu)} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty}}_{\alpha_{mn} \neq \alpha_{kl}} \frac{c_{mn} c_{kl}}{\text{ch}(\alpha_{mn} d_2) \text{ch}(\alpha_{kl} d_2)} \times \frac{1}{(\alpha_{mn} - \alpha_{kl})} \left[{}_2\Omega_{mnkl}^- \right]^t \left[\Theta_{mnkl}^- \right] \\ & - \frac{\mu}{64(1-\mu)} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty}}_{\alpha_{mn} = \alpha_{kl}} \frac{c_{mn} c_{kl}}{\text{ch}^2(\alpha_{mn} d_2)} \times \left[{}_2\Lambda_{mn} \right]^t \left[\Theta_{mnmn}^+ \right] \\ & + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn}^2 - \frac{1}{4(1-\mu)} \varpi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn} \text{ch}(\alpha_{mn} d_1)} {}_1\omega_{mn}^{\text{mn}} \\ & + \frac{\mu}{4(1-\mu)} \varpi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{c_{mn}}{\alpha_{mn} \text{ch}(\alpha_{mn} d_2)} {}_2\omega_{mn}^{\text{mn}} + \frac{\kappa}{4} (R_{00} - 4) \end{aligned}$$

Les quantités $[\Theta_{mnkl}^+]$, $[\Theta_{mnkl}^-]$, $[_i\Omega_{mnkl}^+]$, $[_i\Omega_{mnkl}^-]$ et $[_i\Lambda_{mn}]$ ($i=1,2$) sont des tenseurs d'ordre un définis par

$$[\Theta_{mnkl}^+] = \begin{bmatrix} p^2 mk + q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk + q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \end{bmatrix} \quad [\Theta_{mnkl}^-] = \begin{bmatrix} p^2 mk + q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk + q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \end{bmatrix}$$

$$[_i\Omega_{mnkl}^+] = \begin{bmatrix} _i P_{k-m,1-n}^{mnkl} \\ _i P_{k-m,1+n}^{mnkl} \\ _i P_{k+m,1-n}^{mnkl} \\ _i P_{k+m,1+n}^{mnkl} \end{bmatrix} \quad [_i\Omega_{mnkl}^-] = \begin{bmatrix} _i M_{k-m,1-n}^{mnkl} \\ _i M_{k-m,1+n}^{mnkl} \\ _i M_{k+m,1-n}^{mnkl} \\ _i M_{k+m,1+n}^{mnkl} \end{bmatrix} \quad [_i\Lambda_{mn}] = \begin{bmatrix} a_{k-m,1-n} + 4(-1)^i d_i \\ a_{k-m,1+n} \\ a_{k+m,1-n} \\ a_{k+m,1+n} \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

Dans ces expressions, $_1 P_{rs}^{mnkl}$, $_1 M_{rs}^{mnkl}$, $_2 P_{rs}^{mnkl}$ et $_2 M_{rs}^{mnkl}$ sont, respectivement, les coefficients de Fourier des fonctions

$$\text{sh}(\alpha_{mn} + \alpha_{kl})(\eta + d_1), \text{sh}(\alpha_{mn} - \alpha_{kl})(\eta + d_1), \text{ch}(\alpha_{mn} + \alpha_{kl})(\eta - d_2) \text{ et } \text{sh}(\alpha_{mn} - \alpha_{kl})(\eta - d_2)$$

Les inconnues a_{mn} , b_{mn} et c_{mn} intervenant dans les solutions (1a-b)-(2) ont été déterminées en utilisant la méthode du lagrangien moyen de Whitham [3] en vertu de laquelle les équations variationnelles à résoudre sont

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial a_{mn}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial b_{mn}^i} = 0 \quad i=1,2 \quad m, n=1, 2, 3, \dots$$

L'utilisation de cette méthode conduit à un système d'équations algébriques trop volumineux pour être retranscrit ici.

Pour la procédure numérique, les séries (1a-b) et (2) sont tronquées à l'ordre $N=18$. En conséquence, toutes les sommations intervenant dans le problème sont aussi limitées à cette valeur. Comme la fréquence ω est inconnue, le système d'équations algébriques a été complété par la relation qui définit la cambrure utilisée comme paramètre de contrôle, soit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\eta(0,0) - \eta(0,\pi)) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{2m+1,2n+1} \tanh(\alpha[mn]*H1) * \tanh(\alpha[mn]*H2) * \alpha[mn] * (\mu - 1)$$

Le système d'équations algébriques qui en résulte a été résolu en utilisant la méthode itérative de Newton. Les coefficients de Fourier $_1 P_{rs}^{mnkl}$, $_1 M_{rs}^{mnkl}$, $_2 P_{rs}^{mnkl}$, $_2 M_{rs}^{mnkl}$, $_1 \omega_{mn}^{mn}$ et $_2 \omega_{mn}^{mn}$ ont été calculés au moyen de la transformation de Fourier rapide avec un échantillonnage adéquat.

4. Résultats

Cette technique nous a permis de calculer les profils des ondes à courtes crêtes interfaciales et d'effectuer une étude du comportement des énergies cinétique et potentielle et de la vitesse de phase avec la variation des densités de deux fluides et celle de la cambrure. A titre d'exemple, La figure 2 montre l'influence du rapport des densités sur les énergies pour $\varepsilon=0.01$, $d_1=1$, $d_2=0.004$,

$\theta=5^\circ$, $\kappa=1$. L'énergie cinétique est inférieure à l'énergie potentielle totale contrairement à ce qui se produit pour les ondes de surface. La première évolue linéairement avec le rapport des densités alors que la seconde en est peu sensible. Cette indifférence pourrait être due au fait que l'énergie potentielle est liée au profil dont la cambrure est fixée. Pour la même configuration, et la même variable, la figure 3 montre l'évolution de la célérité de l'onde. La décroissance révélée est compatible avec la tendance à la disparition de l'onde lorsque ρ tend vers 1, c'est-à-dire lorsque les deux couches deviennent homogènes, entraînant la disparition de l'interface.

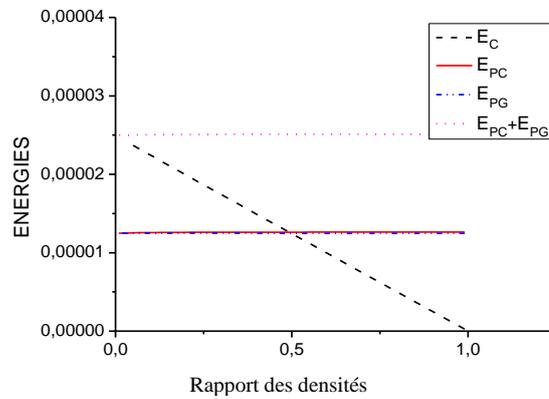


Fig.2. Evolution des énergies cinétique et potentielle en fonction du rapport des densités.

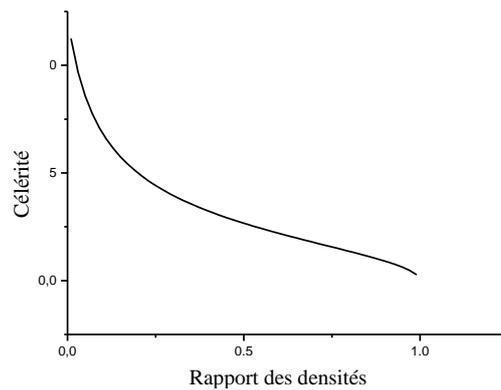


Fig.3. Evolution de la vitesse de phase en fonction du rapport des densités.

Parmi les résultats intéressants de l'influence de la variation des différents paramètres du problème, on relèvera la richesse des profils obtenus. La figure 4 montre une forme orthorhombique semblable à celle qui caractérise les ondes à courtes crêtes en surface libre. Ce profil typique des ondes à courtes crêtes correspond à des configurations de paramètres qui excluent les singularités.

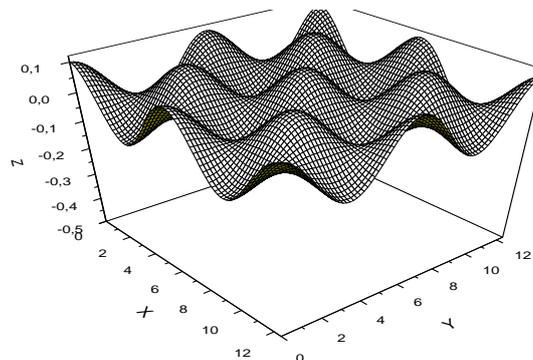


Fig.4. Profil orthorhombique caractéristique des ondes à courtes crêtes régulières.

Des profils singuliers peuvent apparaître, par exemple, lorsque l'épaisseur d'une des deux couches est très petite. Dans ce cas, les dimensions verticales étant très courtes devant celles horizontales, on pourra obtenir des formes fortement localisées assimilables à des ondes solitaires. Si c'est l'épaisseur de la couche supérieure qui est très petite, on obtient une onde solitaire de dépression qui exhibe une forme dite « table top » (figure.5). Dans le cas contraire, il en découle une onde solitaire d'élévation (figure6). Cette forme qui n'a été observée qu'en surface libre, est qualifiée de gauffrée (en anglais grid waves). Il faut noter que dans toutes les figures, les échelles de longueurs horizontale et verticale sont différentes.

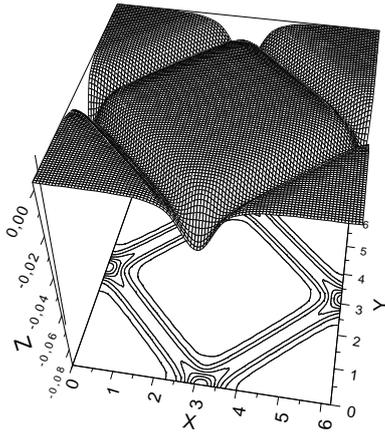


Fig.5. Ondes solitaires de dépression

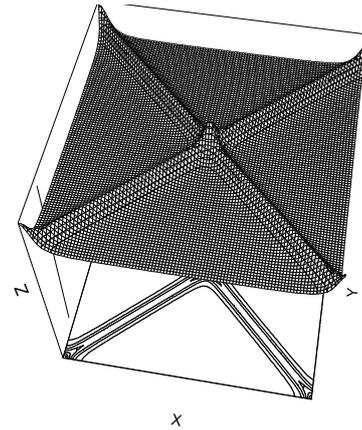


Fig.6. Ondes solitaires d'élévation.

Un autre profil particulier observé uniquement en surface libre est celui dont la forme de base est hexagonale. Nous nous sommes évidemment intéressés à ces structures et dans notre étude de l'influence de la profondeur, nous les avons obtenues pour de petites valeurs de θ ; les profils de l'interface ont alors les formes hexagonales représentées dans la figure 7. Lorsque l'épaisseur de la couche inférieure est suffisamment faible les formes hexagonales ont une structure alvéolaire comme le montre la figure 8

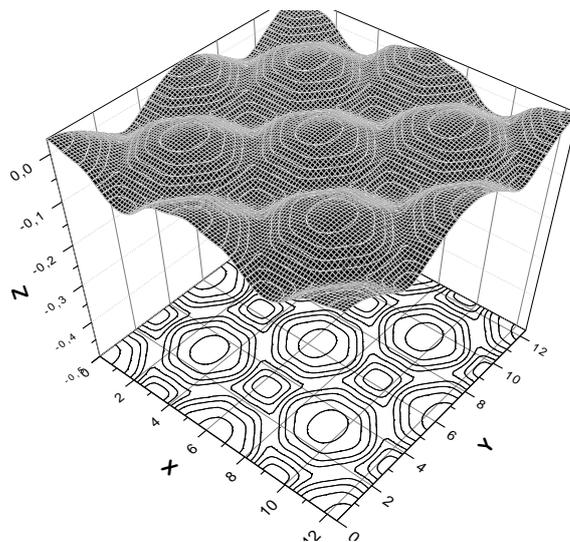


Fig.7. Ondes à courtes crêtes hexagonales.

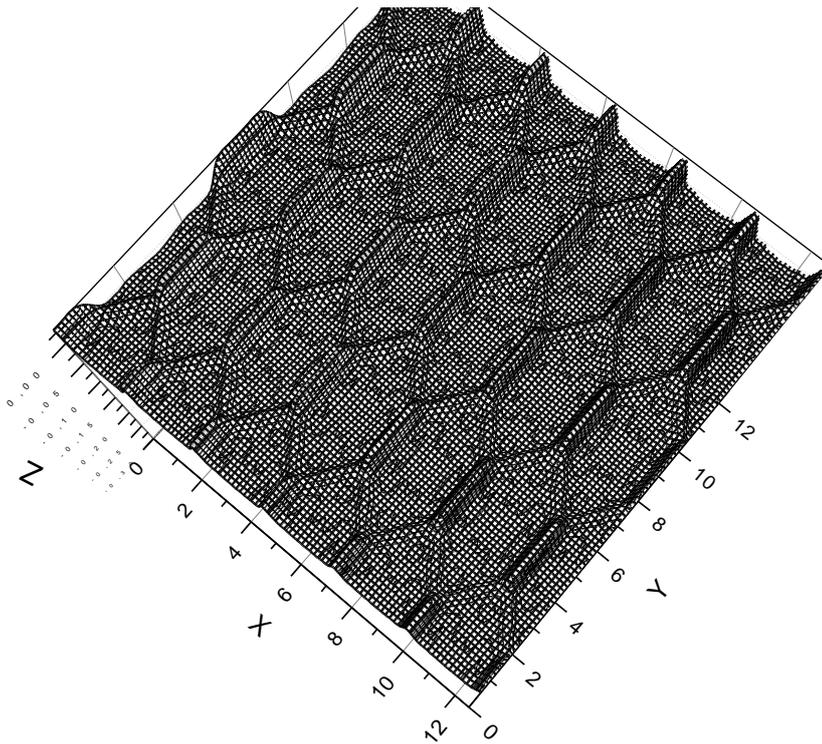


Fig.8. Ondes à courtes crêtes alvéolaires.

Par ailleurs, dans certaines conditions, des modes se propagent avec la même vitesse de phase que le fondamental de l'onde. Ces accrochages de phase génèrent des résonances appelées *résonances harmoniques* parce que le fondamental (1,1) résonne par interaction non linéaire avec un harmonique (j,k). Mathématiquement, ces résonances se traduisent par la présence de diviseurs nuls dans les coefficients des modes biharmoniques (j,k). Dans le cas des ondes interfaciales, nous avons montré que ceci apparaît lorsque les paramètres de l'onde vérifient la relation :

$$\tanh(\alpha_{mn}H_1)\tanh(\alpha_{mn}H_2)\alpha_{mn}(\mu-1-\kappa\alpha_{mn}^2)+\omega_0^2m^2(\tanh(\alpha_{mn}H_2)+\mu\tanh(\alpha_{mn}H_1))=0$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{(1-\mu)(1+\kappa)\tanh(H_1)\tanh(H_2)}{\mu\tanh(H_1)+\tanh(H_2)}$$

La figure 9 montre un exemple de profil obtenu pour la résonance (3,1) et qui exhibe, sur chaque longueur d'onde, trois ondulations dans la direction (Ox) et une dans la direction (Oy).

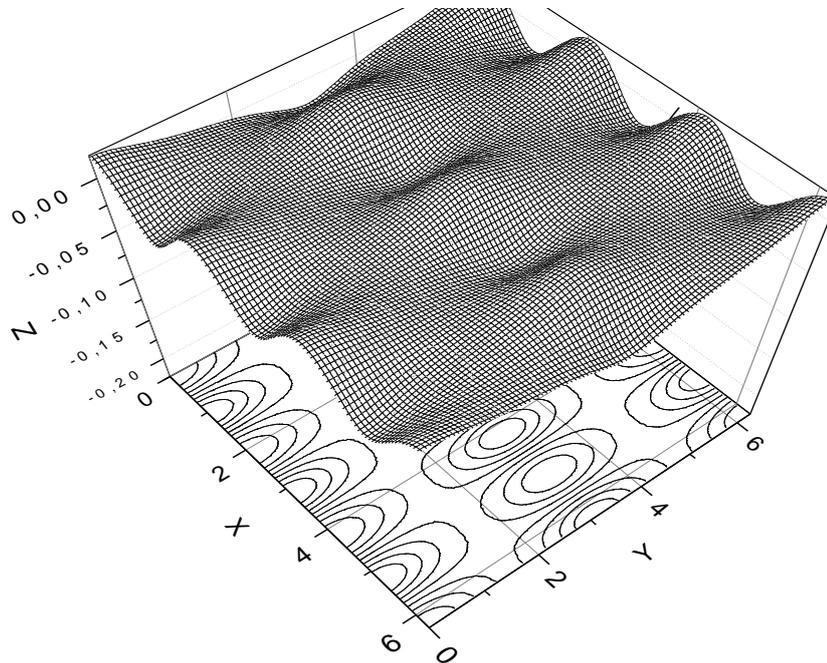


Fig.8. Profil obtenu pour la résonance (3,1)

References

- [1] A. J. Roberts, Highly nonlinear short-crested water waves, *J. Fluid Mech.* **135** (1983), 323.
- [2] M. Debiane et C. Kharif, Calculation of resonant short-crested waves in deep water, *Physics of Fluids* (2009), doi 10.1063/1.3156210
- [3] G.B. Whitham, Nonlinear dispersion of water waves, *J. Fluid. Mech. Part 2*, **27**(1966), 399-412.