

Convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants thermodépendants

T. VARÉ, M. BOUTERAA, C. NOUAR, C. MÉTIVIER

LEMTA UMR 7563 CNRS Université de Lorraine, 2 Avenue de la Forêt de Haye,
BP 90161, 54505 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
thomas.vare@univ-lorraine.fr

Résumé :

Une analyse linéaire et faiblement non linéaire de la convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants entre deux plaques horizontales chauffées par le bas est effectuée. La variation de la viscosité avec la température est prise en considération via un modèle exponentiel. L'objectif de cette étude est de déterminer : (i) l'influence de la non linéarité du comportement rhéologique et de la thermodépendance de la viscosité sur la nature de la bifurcation primaire et le motif qui se développe au démarrage de la convection ; (ii) la stabilité du motif de convection et la gamme des nombres d'onde stables au voisinage des conditions critiques. L'approche adoptée est basée sur les équations d'amplitude de Newell-Whitehead [1] et Segel [2].

Abstract :

A linear and a weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in a layer of a shear-thinning fluid with temperature dependent-viscosity, between two horizontal plates heated from below is performed. The variation of the viscosity with the temperature is described by an exponential model. The objective of the present study is to investigate : (i) the influence of shear-thinning effects on the nature of the primary bifurcation and the pattern selection at the onset ; (ii) the stability of the convective patterns and the range of stable wavenumbers. The approach adopted relies on Newell-Whitehead [1] and Segel [2] amplitude equations.

Mots clefs : Rayleigh-Bénard, motif de convection, instabilités secondaires

1 Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard intervient dans de nombreux procédés industriels ainsi que dans différents systèmes naturels tels que la convection dans le manteau terrestre. C'est aussi un modèle académique pour la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence. Une revue bibliographique des principaux résultats obtenus depuis les travaux de Bénard (1900) et de Rayleigh (1916) a été faite en particulier par Bodenschatz *et al.* [3]. La variation de la viscosité fluide avec la température introduit un coupage non linéaire supplémentaire entre les champs de vitesse et de température et brise

la symétrie de réflexion par rapport au plan médian. Ces caractéristiques vont modifier le seuil et la sélection du motif de convection. Ce problème a été traité dans le cas Newtonien par plusieurs auteurs [4], [5], [6], [7]. Il est montré que les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, Ra_c et du nombre d'onde k_c dépendent du rapport r de la viscosité évaluée aux parois supérieure et inférieure. Dans le cas du modèle exponentiel de thermodépendance de la viscosité, Stengel *et al.* [4] montrent que la thermodépendance a un effet stabilisant pour $1 \leq r \leq 3000$ et un effet destabilisant pour $r > 3000$. Cette évolution est liée au confinement de la convection dans une fine couche de fluide adjacente à la paroi chaude pour des valeurs de r suffisamment élevées. L'influence de la thermodépendance de la viscosité sur l'organisation structurale a été étudiée théoriquement, entre autres, par Palm *et al.* [5], Busse [6] et Jenkins [8]. Pour de faibles contrastes de viscosité et au voisinage des conditions critiques, la convection s'organise sous forme d'hexagones. Ceci résulte de la brisure de symétrie par rapport au plan médian. En s'écartant des conditions critiques, rouleaux et hexagones deviennent simultanément des motifs stables de convection pour $Ra_r \leq Ra \leq Ra_h$. Au delà de Ra_h , seuls les rouleaux sont stables. Cependant lorsque le contraste de viscosité r est supérieur à $r_c = 3$, la convection s'organise sous forme de carrés [8]. Ces différentes études sur la sélection du motif de convection reposent sur l'hypothèse de l'existence d'un seul mode actif. Cependant en s'écartant du seuil d'instabilité, les modes dont le nombre d'onde k , appartient à une bande $[k_c - \delta k, k_c + \delta k]$ avec $\delta k = \sqrt{\epsilon}/\xi_0$ deviennent instables. Ceci se traduit par une modulation spatiale de la solution stationnaire. Ici, ϵ est l'écart au seuil d'instabilité et ξ_0 la longueur de cohérence. La compétition entre les modes actifs est examinée en utilisant l'équation de Ginzburg-Landau (équation d'enveloppe) [9],[10].

A notre connaissance, le cas des fluides non-Newtoniens thermodépendants n'a pas été abordé dans la littérature. L'objectif de la présente communication est d'examiner l'influence de la non linéarité de la rhéologie et de la thermodépendance des paramètres rhéologiques sur la sélection du motif de convection et sa stabilité. On se restreint au cas des fluides rhéofluidifiants purement visqueux. Dans le cas non-thermodépendant, Bouteraa *et al.* [11] ont montré que la rhéofluidification favorisait la formation de rouleaux.

2 Description du problème et formulation mathématique

Considérons un fluide rhéofluidifiant entre deux plaques horizontales infinies, parfaitement conductrices de la chaleur et séparées d'une distance \hat{d} . Les plaques supérieure et inférieure sont maintenues à des températures constantes $\hat{T}_0 - \delta\hat{T}/2$ et $\hat{T}_0 + \delta\hat{T}/2$. Si la différence de température entre les deux plaques est suffisamment faible, le fluide reste au repos et le transfert de chaleur se fait par conduction. La solution du problème est hydrostatique et le profil vertical de la température est linéaire :

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = -\hat{\rho}_0\hat{g} \left[1 - \hat{\beta} (\hat{T} - \hat{T}_0) \right] \quad ; \quad \hat{T}_{cond} - \hat{T}_0 = \frac{\delta\hat{T}}{2} \left(1 - \frac{2\hat{z}}{\hat{d}} \right). \quad (1)$$

Dans l'équation (1), \hat{g} est l'accélération de la pesanteur, $\hat{\rho}_0$ est la masse volumique du fluide à la température de référence \hat{T}_0 , $\hat{\beta}$ est le coefficient de dilatation thermique et \hat{z} la coordonnée verticale dont l'origine est située sur la plaque inférieure. Lorsque la différence de température dépasse une valeur critique, la convection se déclenche avec l'émergence de motifs qui peuvent se présenter généralement sous formes de rouleaux, carrés ou hexagones. Le choix du motif de convection est dicté par les non linéarités du problème. En utilisant les échelles caractéristiques $\hat{d}^2/\hat{\kappa}$, $\hat{\kappa}/\hat{d}$, \hat{d} et $\delta\hat{T}$, respectivement de temps, de vitesse, de distance et de température et en adoptant l'approximation de Boussinesq qui considère que la variation de la masse volumique avec la température peut être négligée dans les équations de

conservation excepté dans le terme de poussée d'Archimède, les équations aux perturbations sous forme adimensionnelle sont données par

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\nabla p + Ra \theta \mathbf{e}_z + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \theta, \quad (4)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le vecteur vitesse, $p(\mathbf{x}, t)$ est la perturbation de la pression, $\theta(\mathbf{x}, t)$ est la perturbation de la température, $\theta = (\hat{T} - \hat{T}_{cond}) / \delta \hat{T}$ et $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ est le vecteur position. Le problème fait intervenir deux paramètres adimensionnels, le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Prandtl, définis par

$$Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\kappa} \hat{\mu}_0} \quad ; \quad Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{\kappa}}. \quad (5)$$

$\hat{\kappa}$ est la diffusivité thermique et $\hat{\mu}_0$ la viscosité du fluide à cisaillement nul et à la température de référence \hat{T}_0 . Généralement pour les fluides non-Newtoniens purement visqueux, le temps de diffusion visqueuse est beaucoup plus court que celui de la diffusion thermique, i.e. $Pr \gg 1$. Pour ce qui est du modèle rhéologique, le modèle de Carreau-Bird avec une dépendance exponentielle en température est adopté :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu}(\hat{\Gamma}) \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad ; \quad \hat{\mu}(\hat{\Gamma}) = \exp\left(-\hat{K}(\hat{T} - \hat{T}_0)\right) \left(1 + \lambda^2 \hat{\Gamma}\right)^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (6)$$

où \hat{K} est un coefficient de thermodépendance, $0 \leq n_c \leq 1$ est l'indice de rhéofluidification et λ un temps caractéristique du fluide. Sous forme adimensionnelle, l'équation précédente s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \mu(\Gamma) = \mu_b(z) \exp(-\zeta \theta) \left(1 + \lambda^2 \Gamma\right)^{\frac{n_c - 1}{2}}. \quad (7)$$

Dans les équations précédentes, Γ est le deuxième invariant du tenseur de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \quad ; \quad \Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}. \quad (8)$$

L'existence d'une perturbation en vitesse induit une perturbation en cisaillement et donc une perturbation de la viscosité. Cette dernière est décrite grâce à un développement limité de Taylor autour de l'état de base $\mu_b = \mu_b(z)$:

$$\mu = \mu_b [1 - \zeta \theta + \dots] \left[1 + \left(\frac{n_c - 1}{2} \right) \lambda^2 \Gamma + \dots \right]. \quad (9)$$

On introduit le degré de rhéofluidification α défini par :

$$\alpha = \left| \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} = \frac{1 - n_c}{2} \lambda^2. \quad (10)$$

Pour les conditions aux limites, nous avons considéré qu'il n'y a pas de glissement aux parois et que celles-ci ont une conductivité thermique beaucoup plus élevée que celle de fluide. Les parois peuvent donc être considérées à température constante. Finalement, les équations aux perturbations sont réécrites en leur appliquant le rotationnel et deux fois le rotationnel. La pression est ainsi éliminée. On obtient des

équations aux perturbations en termes de la composante verticale de la vitesse w et de la composante verticale de la vorticité ξ .

3 Analyse linéaire de stabilité

Dans l'approche linéaire, les perturbations sont supposées infinitésimales et les termes non linéaires peuvent être négligés. dans les équations aux perturbations. De manière classique, nous cherchons des solutions sous forme de modes normaux :

$$\begin{bmatrix} w(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(z) \\ G_{11}(z) \end{bmatrix} f(x, y) e^{st}, \quad (11)$$

où s est la valeur propre, $s = s_r + i s_i$ et $f(x, y)$ satisfait l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0. \quad (12)$$

Dans cette équation, k représente le module du vecteur d'onde horizontal \mathbf{k} . En substituant l'expression (11) dans les équations aux perturbations linéarisées, on aboutit à un problème aux valeurs propres discrétisé par une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev. Sur la figure 1, nous avons représenté les variations de Ra_c et de k_c en fonction du rapport de viscosité $r = \mu_b(z = 1)/\mu_b(z = 0) = \exp(\zeta)$ pour des conditions d'adhérence (courbe 1) et des conditions de glissement parfait (courbe 2). Les résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par Stengel *et al.* [4]. Comme il a été indiqué par les auteurs, trois cas peuvent être distingués : (i) Pour de faibles coefficients de thermodépendance, $0 \leq \zeta \leq 1.5$ ($1 \leq r \leq 5$), Ra_c et k_c sont pratiquement constants ; (ii) pour des valeurs plus élevées du coefficient de thermodépendance de ζ , $1.5 \leq \zeta \leq 8$ ($5 \leq r \leq 3000$), la thermodépendance a un effet stabilisant puisque Ra_c augmente avec r . Le nombre d'onde k_c reste pratiquement constant ou décroît légèrement en situation de glissement parfait ; (iii) pour des fluides fortement thermodépendants, $\zeta \geq 8$ ($r \geq 3000$), la thermodépendance a un effet destabilisant et le nombre d'onde critique décroît rapidement. Dans ce régime, la convection est gouvernée par une fine couche de fluide adjacente à la paroi chaude [4]. Les profils de la composante verticale de la vitesse et de la perturbation de température associés au mode fondamental sont représentés sur la figure (2) pour différentes valeurs du coefficient de thermodépendance. Ils montrent clairement une brisure de symétrie par rapport au plan médian. Elle est d'autant plus marquée que le coefficient de thermodépendance est élevé.

4 Analyse faiblement non linéaire

Le nombre de Rayleigh critique déterminé à partir de l'analyse linéaire de stabilité fait intervenir le nombre d'onde critique k_c , indépendamment de l'orientation du vecteur d'onde \mathbf{k} . Cette dégénérescence est une conséquence de l'isotropie du plan horizontal supposé infini. S'il n'y a pas de direction privilégiée, le plan horizontal sera pavé par des motifs réguliers, lorsque le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique. Par une analyse de symétrie, il est montré que ces structures peuvent être des rouleaux, carrés ou hexagones. La configuration qui sera observée est dictée par les termes non linéaires. Au voisinage de Ra_c , une analyse faiblement non linéaire combinée avec un développement asymptotique en amplitude [11], [12] est utilisée pour analyser la compétition entre les motifs au voisinage des conditions

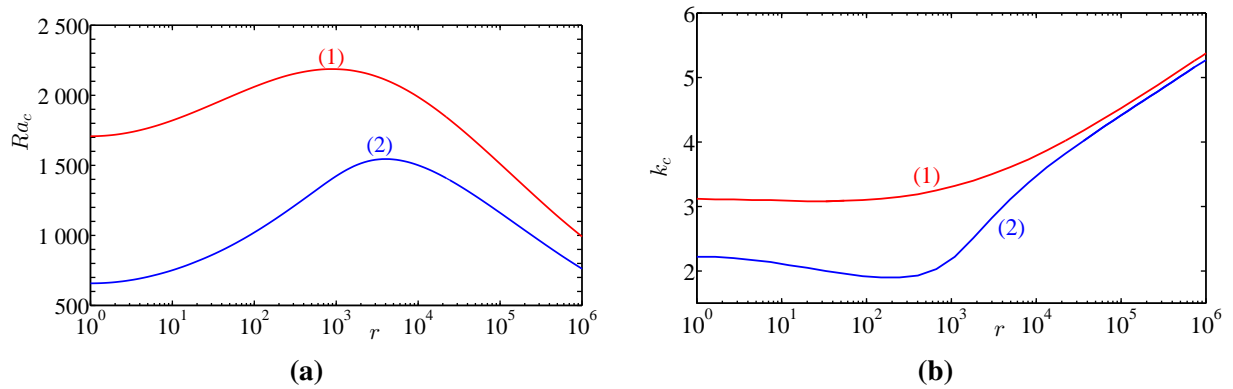


FIGURE 1 – Nombre de Rayleigh critique **(a)** et nombre d'onde critique **(b)** en fonction du rapport de viscosités (1) adhérence, (2) glissement parfait.

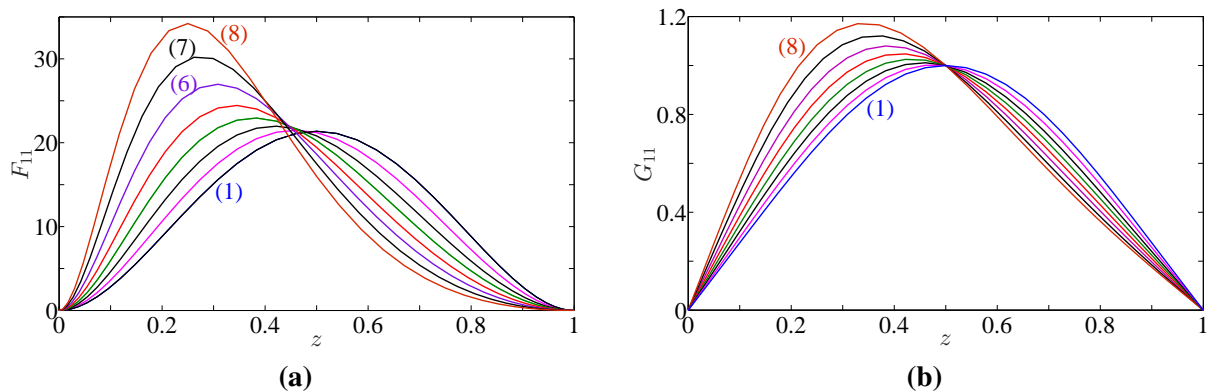


FIGURE 2 – Profils de la composante verticale de la vitesse **(a)** et de la perturbation de température **(b)**, associés au mode fondamental pour différentes valeurs du coefficient de thermodépendance. (1) $\xi = 0$; (2) $\xi = 1$; (3) $\xi = 2$; (4) $\xi = 3$...augmentation de ξ par pas de 1 jusqu'à (8) où $\xi = 7$.

critiques. Pour cela w et θ sont développés en séries de puissance de l'amplitude A de la perturbation :

$$w(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N A_p(t) \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}) F_{11}(z) + \text{Termes d'Ordre Supérieur}, \quad (13)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N A_p(t) \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}) G_{11}(z) + \text{Termes d'Ordre Supérieur} \quad (14)$$

La configuration $N = 1$ correspond à des motifs de convection sous formes de rouleaux, $N = 2$ à des carrés et $N = 3$ à des hexagones. Les coefficients $A_p(t)$ satisfont l'équation de Landau-Stuart qui s'écrit par exemple dans le cas des hexagones, sous la forme :

$$\frac{dA_1}{dt} = sA_1 + \gamma A_2^* A_3^* + \left[g_1 |A_1|^2 + \delta_1 (|A_2|^2 + |A_3|^2) \right] A_1. \quad (15)$$

Les équations pour dA_2/dt et dA_3/dt sont obtenues par une permutation circulaire de A_1 , A_2 et A_3 . Il convient de noter que la présence des termes quadratiques annihile la symétrie $A \rightarrow -A$. La substitution des expressions (13), (14) dans les équations aux perturbations conduit à un système d'équations

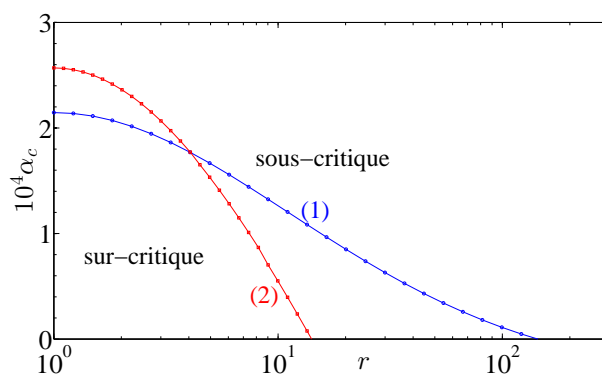


FIGURE 3 – Valeur critique du degré de rhéofluidification, α_c en fonction du rapport des viscosités r à $Pr = 10$ dans le cas des rouleaux (1) et des carrés (2).

différentielles ordinaires qui permet de déterminer de manière séquentielle les termes correctifs. De plus amples détails sont donnés dans [11]. En utilisant les équations de Landau-Stuart (15) et l'alternative de Fredholm, les coefficients γ , g_1 et δ_1 peuvent être déterminés.

4.1 Nature de la bifurcation primaire

Les résultats numériques montrent que les termes non linéaire d'inertie favorisent une bifurcation sur critique alors que la rhéofluidification et la thermodépendance de la viscosité favorisent une bifurcation sous critique. Ce résultat est illustré par la figure 3 où on a représenté dans le plan (α, r) , la frontière qui délimite les domaines de bifurcation sur et sous critiques pour une convection sous forme de rouleaux ou carrés. La valeur critique du degré de rhéofluidification α_c à partir duquel, la bifurcation devient sous critique diminue lorsque r augmente.

Dans le cas des hexagones, le terme quadratique dans l'équation (15) brise la symétrie de réflexion par rapport au plan médian et conduit à une bifurcation trans-critique.

4.2 Sélection du motif de convection

Nous avons étudié la compétition rouleaux/carrés et rouleaux/hexagones pour différentes valeurs des paramètres α et r . La figure 4 montre les domaines de stabilité des rouleaux et des carrés dans le plan (α, r) . Dans le cas Newtonien ($\alpha = 0$), le motif stable de convection passe de rouleau à carré à $r \approx 3$ en accord avec Jenkins [8]. Dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, le motif stable passe de rouleaux à carrés pour des valeurs plus élevées de r . Ceci est en accord avec [11] où il est indiqué que la rhéofluidification favorisait une convection sous forme de rouleaux.

L'étude de la compétition rouleaux/hexagones, montre que l'étendue du domaine de bistabilité (rouleaux-hexagones) diminue de manière significative avec le degré de rhéofluidification et augmente avec r .

5 Instabilités secondaires

Comme il a été indiqué en introduction, en s'écartant des conditions critiques, d'autres modes deviennent actifs ce qui conduit à une modulation spatiale de la solution stationnaire. L'évolution de l'amplitude de la perturbation est donnée par les équations de Newell-Whitehead [1] et Segel [2]. Dans le cas des carrés ($r > r_c$), la gamme des nombres d'onde stables est gouvernée par l'instabilité d'Eckhaus et l'instabilité rectangulaire [14]. Comme dans le cas Newtonien, l'instabilité rectangulaire contrôle la gamme

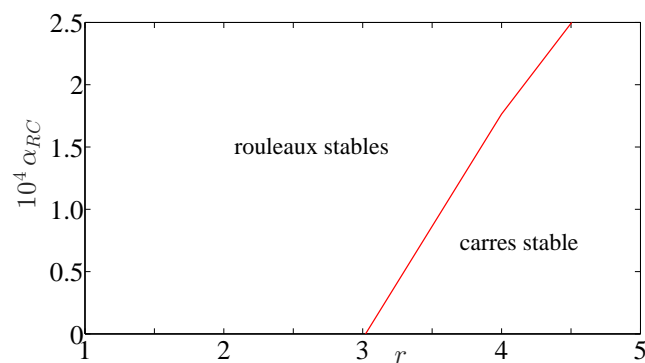


FIGURE 4 – Domaines de stabilité des rouleaux et des carrés dans le plan (α, r) .

des nombres d'onde stables. Néanmoins, cette gamme est d'autant plus réduite que les effets rhéofluidifiants sont importants. Des résultats qualitativement similaires quant au rôle de la rhéofluidification sont obtenus dans le cas des hexagones.

6 Conclusion

Nous avons déterminé la nature de la bifurcation primaire, les motifs qui peuvent se développer au seuil de la convection et leurs stabilité lorsqu'on s'écarte des conditions critiques en fonction du degré de rhéofluidification et du rapport r des viscosités évaluées aux parois supérieure et inférieure. Il est montré que le degré de rhéofluidification à partir duquel la bifurcation devient sous critique diminue avec l'augmentation de la thermodépendance du fluide. L'analyse de la compétition entre les motifs de convection montre en particulier que la valeur critique de r à partir de laquelle, la convection se développe sous forme de carrés augmente avec α . Finalement, l'influence de la rhéologie et de la thermodépendance sur la gamme des nombres d'onde stable a été mise en évidence.

Références

- [1] A.C. Newell, J.A. Whitehead, Finite bandwidth, finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, 38 (1969) 279–303.
- [2] L.A. Segel, Distant side walls cause slow amplitude modulation of cellular convection, *J. Fluid Mech.*, 38 (1969) 203–224.
- [3] E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers, Recent developments in Rayleigh-Bénard convection, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 (2000) 709–778.
- [4] K.C. Stengel, D.S. Olivier, R.J. Booker Onset of convection in a variable-viscosity fluid, *J. Fluid Mech.*, 120 (1982) 411–431.
- [5] E. Palm, T. Ellingsen, B. Gjevik, On the occurrence of cellular motion in Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967) 651–661.
- [6] F.H. Busse, The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967) 625–649.

-
- [7] D. B. White, The planforms and the onset of convection with a temperature dependent-viscosity, *J. Fluid Mech.*, 191 (1988) 247–286.
- [8] D.R. Jenkins, Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, 178 (1987) 491–506.
- [9] R. Hoyle, Nonlinear phase diffusion equations for the long-wave instabilities of hexagons, *Appl. Math. Lett.*, 8 (1995) 81–85.
- [10] B. Echebarria, C. Pérez-García, Phase instabilities in hexagonal patterns, *Europhys. Lett.*, 43 (1998) 35–40.
- [11] M. Bouteraa, C. Nouar, E. Plaut, C. Métivier, A. Kalck Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the primary bifurcation and pattern selection, *J. Fluid Mech.*, 767 (2015) 767-696.
- [12] T. Herbert On perturbation methods in nonlinear stability theory, *J. Fluid Mech.*, 126 (1983) 167-186.
- [13] N.J. Balmforth, A.C. Rust Weakly nonlinear viscoplastic convection, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 158 (2009) 36-45.
- [14] R. Hoyle, Pattern forlation : An introduction to methods, Cambridge University Press, 2006.