

Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide rhéofluidifiant avec seuil de contrainte

Y. AGBESSI^a, C. NOUAR^b, C. LEMAITRE^a, L. CHOPLIN^a

a. LRGP, Université de Lorraine-CNRS, UMR 7274, 1 rue Grandville, 54000 Nancy
cecile.lemaitre@univ-lorraine.fr

b. LEMTA, Université de Lorraine-CNRS, UMR 7563, 2 av. de la Forêt de Haye, 54500
Vandoeuvre-lès-Nancy

Résumé :

La stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide à seuil est étudiée. Les deux cylindres, intérieur et extérieur, sont animés d'un mouvement de rotation. Le fluide suit la loi rhéologique de Bingham. L'état de base est d'abord étudié. Puis les équations aux perturbations linéarisées sont établies.

Dans une approche modale, les conditions de stabilité marginales sont calculées. Le caractère non newtonien produit globalement une stabilisation de l'écoulement (le nombre de Reynolds intérieur critique augmente avec le nombre de Bingham), sauf dans le cas d'un entrefer large (rapport de rayons de 0.4) pour des cylindres co-rotatifs, au-delà d'une vitesse limite de rotation du cylindre extérieur. Un examen des nombres d'ondes azimutaux critiques montre une apparition d'autant plus fréquente de tourbillons toroïdaux que le nombre de Bingham est élevé.

L'évolution des perturbations aux temps courts est ensuite étudiée. Il apparaît que le phénomène de croissance transitoire est atténué par le caractère non newtonien. De plus, la croissance optimale suit une loi de puissance en fonction de Re , nombre de Reynolds défini par Dubrulle et al. (2005) qui décrit le cisaillement dans le système.

Abstract :

The stability of Taylor-Couette flow of a yield stress fluid is investigated. Both cylinders are rotated independently. The fluid is assumed to follow the rheological law of Bingham. The base state is first computed and analyzed. The linearized perturbation equation are then derived.

In a modal approach, the marginal stability conditions are established. The non-Newtonian character leads globally to a flow stabilization (the critical interior Reynolds number increases with the Bingham number), except for the case of a large gap, with co-rotating cylinders, above a minimal angular velocity of the outer cylinder. The azimuthal wavenumber is found to remain equal to zero for a broader range of outer Reynolds number for Bingham fluids. This indicates that the yield stress favors the appearance of toroidal structures.

The evolution of the perturbations at short times is then investigated. It appears that the transient growth phenomenon is attenuated for Bingham fluids compared to the Newtonian case. Furthermore, the optimal growth is governed by a power law as function of Re , a Reynolds number, defined by Dubrulle et al. (2005), that describes the shear in the system.

Mots clefs : Ecoulement de Taylor-Couette, instabilités hydrodynamiques, modèle de Bingham

1 Introduction

L'écoulement de Taylor-Couette [1-2] écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux cylindres co-axiaux infiniment longs tournant à des vitesses angulaires différentes est un paradigme pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et la transition à la turbulence des systèmes dynamiques non linéaires [3-4].

L'écoulement laminaire (existant à faibles nombres de Reynolds intérieur Re_1 et extérieur Re_2) dans ce système est purement azimutal. Pour une vitesse du cylindre extérieur donnée, il existe une vitesse minimale du cylindre intérieur au-dessus de laquelle l'écoulement de base se déstabilise et des structures tourbillonnaires appelées rouleaux de Taylor apparaissent. Andereck *et al.* (1986) [5] ont étudié par visualisation les différents types de structures pouvant apparaître après déstabilisation en fonction de la valeur du nombre de Reynolds extérieur Re_2 .

La stabilité linéaire de fluides à seuil en écoulement de Taylor-Couette a été étudiée pour la première fois par Graebel (1964) [6]. Le modèle classique de Bingham a été utilisé et un effet stabilisant du seuil a été mis en évidence dans le cas d'un entrefer étroit. Les travaux ultérieurs de Peng & Zhu (2004) [7] et Landry *et al.* (2006) [8] ont montré un effet déstabilisant du seuil pour des nombres de Bingham faibles et des cylindres en co-rotation. Landry *et al.* (2006) ont proposé une explication de cette non-monotonie du nombre de Reynolds critique, basée sur une analyse énergétique de la perturbation. Landry *et al.* (2006) [8] ont également étudié la stabilité pour des cylindres en contra-rotation pour des perturbations axisymétriques. Plus récemment Chen *et al.* (2015) [9] se sont intéressés à la croissance transitoire de fluides de Bingham en écoulement de Taylor-Couette.

2 Formulation mathématique

2.1 Equations

Nous considérons dans cette communication l'écoulement d'un fluide non newtonien entre deux cylindres concentriques infinis. Le cylindre intérieur, de rayon \hat{R}_1 , est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\hat{\Omega}_1 > 0$. Le cylindre extérieur, de rayon \hat{R}_2 , est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\hat{\Omega}_2$, positive dans le cas où les cylindres sont co-rotatifs et négative dans le cas contra-rotatif. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'expriment

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

où $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_r + V \mathbf{e}_\theta + W \mathbf{e}_z$ est le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , P est la pression et $\boldsymbol{\tau}$ et le déviateur du tenseur des contraintes. Par convention, les grandeurs munies d'un chapeau (^) dans cet article sont dimensionnelles et les grandeurs sans chapeau sont adimensionnelles. Nous définissons deux nombres de Reynolds

$$Re_1 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}}, \quad Re_2 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_2 \hat{\Omega}_2 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}} \quad (3)$$

représentant la rotation des cylindres intérieur et extérieur respectivement. Les équations (1)(2) ont été adimensionnées en utilisant la largeur de l'entrefer $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$ comme échelle des longueurs, la

vitesse de rotation du cylindre intérieur $\widehat{\Omega}_1 \widehat{R}_1$ pour les vitesses, le temps de diffusion visqueux $\widehat{\rho} \widehat{d}^2 / \widehat{\mu}_{ref}$ pour le temps et la quantité $\widehat{\mu}_{ref} \widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1 / \widehat{d}$ pour les contraintes et la pression où μ_{ref} est une viscosité de référence précisée ultérieurement. Aux équations précédentes sont associées les conditions de non-glissement et d'imperméabilité aux parois

$$\mathbf{U}(R_1, \theta, z) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{U}(R_2, \theta, z) = \left(0, \frac{Re_2}{Re_1}, 0\right) \quad (4)$$

où les rayons adimensionnels $R_1 = \eta / (1 - \eta)$ et $R_2 = 1 / (1 - \eta)$ ont été introduits, avec $\eta = \widehat{R}_1 / \widehat{R}_2$, le rapport des rayons.

2.2 Modèle rhéologique

Nous considérons ici un fluide purement visqueux rhéofluidifiant présentant un seuil de contrainte. Le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ et tenseur des taux de cisaillement $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ s'écrivent

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \quad (5)$$

L'intensité des contraintes visqueuses et du taux de cisaillement est donnée par les seconds invariants des tenseurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} \quad , \quad \Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \quad (6)$$

exprimé avec la notation indicielle d'Einstein. Le fluide est supposé suivre le modèle rhéologique de Bingham qui s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\mu = 1 + \frac{Bi}{\Gamma} \quad \text{si} \quad \tau > Bi \quad (7)$$

$$\Gamma = 0 \quad \text{si} \quad \tau \leq Bi$$

où le nombre de Bingham a été introduit

$$Bi = \frac{\hat{\tau}_y \widehat{d}}{\widehat{\mu}_p \widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1} \quad (8)$$

avec $\hat{\tau}_y$ le seuil de contrainte du matériau et $\widehat{\mu}_p$ sa viscosité plastique. La viscosité de référence utilisée dans les nombres de Reynolds est choisie de manière classique égale à la viscosité plastique

$$\widehat{\mu}_{ref} = \widehat{\mu}_p \quad (9)$$

2.3 Paramètres adimensionnels

Les paramètres adimensionnels gouvernant le problème sont le rapport de rayons η , le nombre de Bingham Bi et les nombres de Reynolds Re_1 et Re_2 . Pour séparer les effets de cisaillement des effets centrifuges, Dubrulle et al. (2005) [10] deux nombres adimensionnels remplaçant Re_1 et Re_2 . Le premier est le nombre de Reynolds de cisaillement comparant un temps caractéristique visqueux $\widehat{\rho} \widehat{d}^2 / \widehat{\mu}^b$ et un temps caractéristique de cisaillement $|\widehat{\gamma}_{r\theta}^b(\widehat{r})|^{-1}$

$$Re = \frac{\widehat{\rho} |\widehat{\gamma}_{r\theta}^b(\widehat{r})| \widehat{d}^2}{\widehat{\mu}^b} \quad (10)$$

Le second est le nombre de rotation comparant le temps caractéristique de cisaillement et un temps caractéristique de rotation $1/2\widehat{\Omega}_f(\widehat{r})$

$$R_\Omega = \frac{2\widehat{\Omega}_f(\widehat{r})}{|\widehat{\gamma}_{r\theta}^b(\widehat{r})|} \quad (11)$$

L'exposant b fait référence à l'état de base qui est purement azimuthal, $\widehat{\gamma}_{r\theta}^b(\widehat{r})$ est le taux de cisaillement de base évalué à la position radiale \widehat{r} . Cette position est le lieu d'un référentiel en rotation à la vitesse angulaire $\widehat{\Omega}_f(\widehat{r})$ telle que

$$\widehat{V}^b(\widehat{R}_1) - \widehat{\Omega}_f \widehat{R}_1 = -[\widehat{V}^b(\widehat{R}_2) - \widehat{\Omega}_f \widehat{R}_2] \quad (12)$$

Dans ce référentiel, les cylindres tournent à des vitesses égales mais opposées. Dans le cas d'un fluide newtonien, Dubrulle et al. (2015) [10] a montré

$$\bar{r} = \sqrt{R_1 R_2}, \quad Re = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad R_\Omega = \frac{(1 - \eta)(Re_1 + Re_2)}{\eta Re_2 - Re_1} \quad (13)$$

Pour un fluide de Bingham, ces grandeurs sont évaluées numériquement.

3 Etat de base

L'état de base est purement azimuthal est solution de l'équation

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{r\theta}^b) = 0 \quad (14)$$

avec les conditions aux limites

$$V^b(R_1) = 1 \quad \text{et} \quad V^b(R_2) = \frac{Re_2}{Re_1} \quad (15)$$

L'écoulement des fluides à seuil peut présenter des zones bouchon, c'est-à-dire des zones non cisillées, se comportant comme un solide. Ceci peut se produire au voisinage du cylindre extérieur de dans l'écoulement de Taylor-Couette car la contrainte est minimale dans cette zone, potentiellement inférieure à la contrainte seuil $\hat{\tau}_y$. On peut distinguer 3 cas, qui correspondent à 3 zones différentes dans le plan (Re_1, Re_2) , illustrées sur la figure Fig. 1 pour $Bi = 10$ et $\eta = 0.881$ et 0.4 .

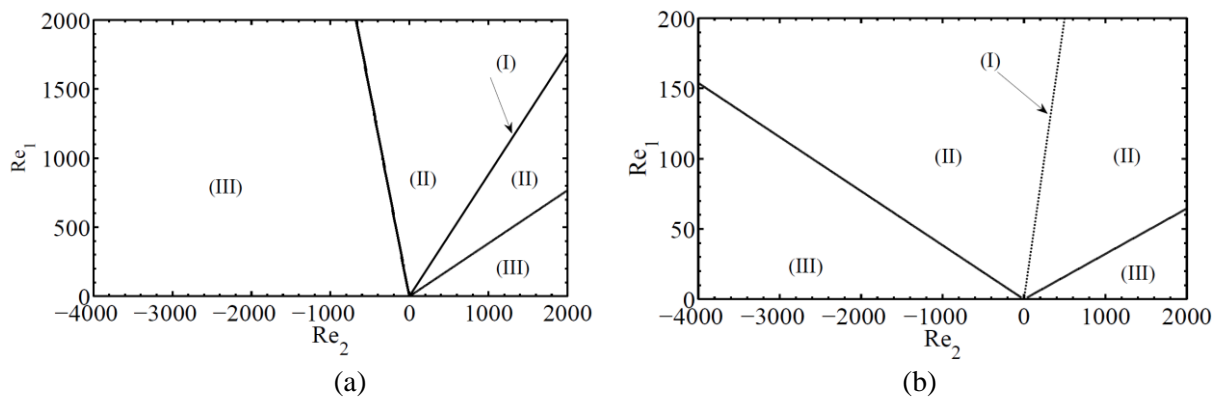


Fig. 1-Régimes d'écoulement d'un fluide de Bingham pour $Bi = 10$ et deux rapports de rayons différents. (a) $\eta = 0.881$ et (b) $\eta = 0.4$. (I) Ligne de rotation solide, (II) espace annulaire partiellement cisillé et (III) espace annulaire totalement cisillé.

La zone (I), pour laquelle le cylindre intérieur et le cylindre extérieur tournent à la même vitesse, est la droite de rotation solide. La vitesse de base s'exprime alors

$$V^b(r) = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{r}{R_2} . \quad (16)$$

Dans la zone (II), seule la partie intérieure de l'espace annulaire est en écoulement, la partie extérieure effectuant une rotation solide. L'écoulement de base dans ce cas s'écrit

$$V^b(r) = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{r}{R_0} + \frac{1}{2} R_1^2 \tau_1^b r \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \text{sgn}(\tau_1^b) Bi r \ln \left(\frac{R_0}{r} \right) \quad (17)$$

où R_0 est la position de l'interface séparant la zone cisailée de la zone non cisailée, définie par $|\tau_{r\theta}^b| = Bi$. La contrainte à la paroi intérieure est calculée numériquement en utilisant la condition aux limites $V^b(R_1) = 1$.

Dans la zone (III), tout le fluide contenu dans l'entrefer s'écoule et la vitesse devient

$$V^b = \frac{Re_2}{Re_1} \frac{r}{R_2} + \frac{1}{2} R_1^2 \tau_1^b r \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \text{sgn}(\tau_1^b) Bi r \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) \quad (18)$$

avec la contrainte en $r = R_1$

$$\tau_1^b = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{Re_2}{Re_1} \eta \right) \frac{1 - \eta}{\eta} + \text{sgn} \left(\frac{Re_2}{Re_1} \eta - 1 \right) Bi \ln(\eta) \right] . \quad (19)$$

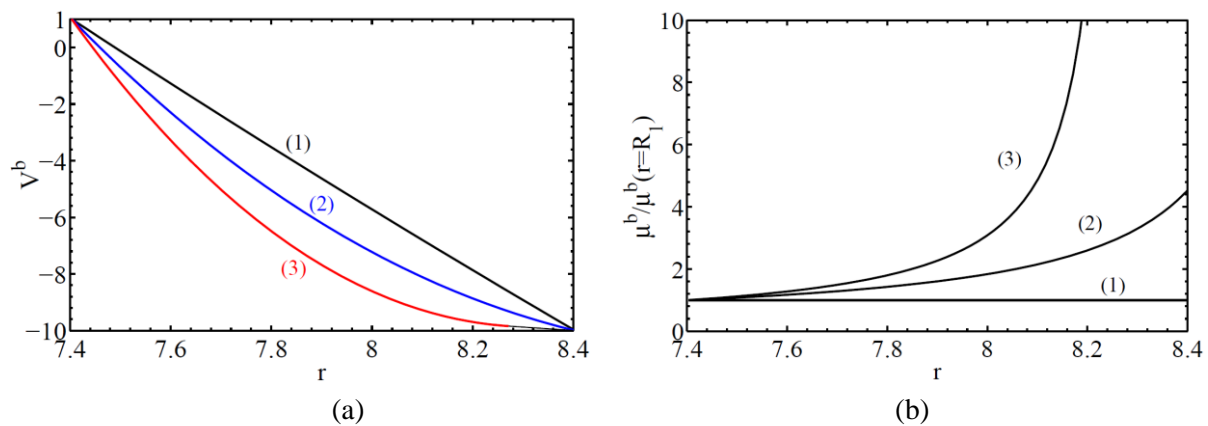


Fig. 2-Ecoulement de base pour une fluide de Bingham avec $\eta = 0.881$, $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$. (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosités. (1) $Bi = 0$ (fluide newtonien), (2) $Bi = 50$ et (3) $Bi = 100$.

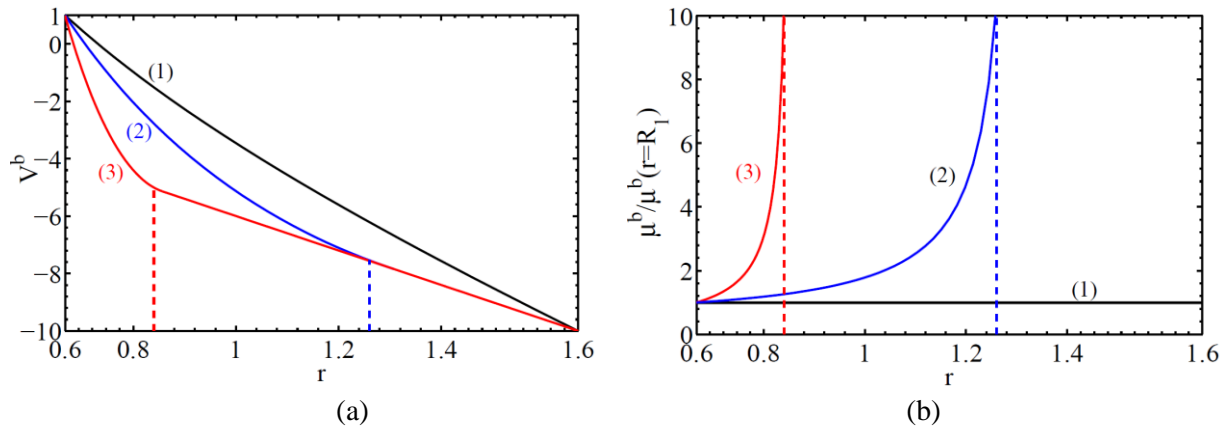


Fig. 3-Ecoulement de base pour une fluide de Bingham avec $\eta = 0.4$, $Re_1 = 300$ et $Re_2 = -3000$. (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosités. (1) $Bi = 0$ (fluide newtonien), (2) $Bi = 10$ et (3) $Bi = 100$. Les lignes verticales pointillées correspondent à la position de l'interface entre les zones cisailée et non cisailée.

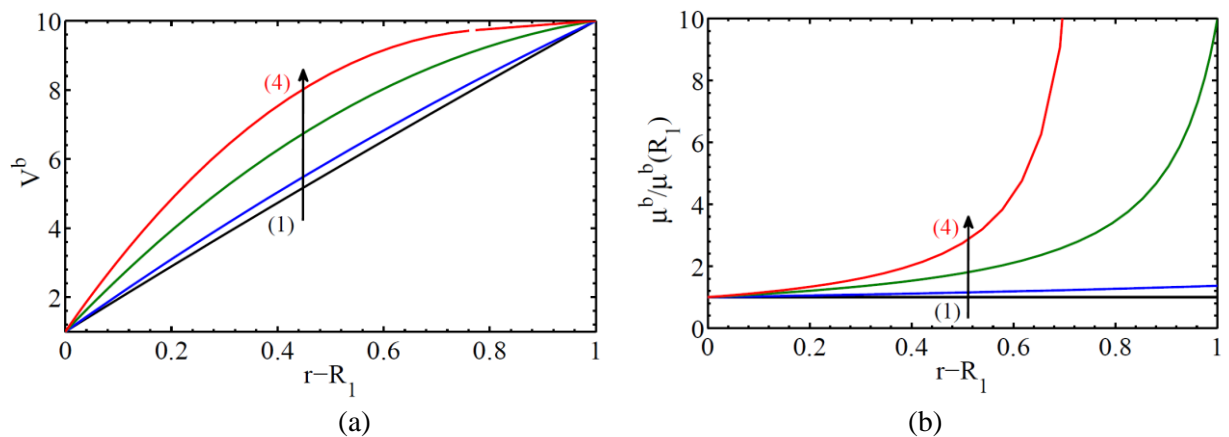


Fig. 4-Ecoulement de base pour un fluide de Bingham entre deux cylindres en co-rotation pour $\eta = 0.881$, $Re_1 = 300$ et $Re_2 = 3000$. (a) Profils de vitesse et (b) profils de viscosités. (1) $Bi = 0$ (fluide newtonien), (2) $Bi = 10$, (3) $Bi = 50$ et (4) $Bi = 100$.

Les figures 2 et 3 montrent la forme de l'état de base pour des entrefers large et étroit dans le cas de cylindres contra-rotatifs. La figure 4 présente le cas de cylindres co-rotatifs. Le caractère rhéofluidifiant du fluide a pour effet d'incurver le profil de vitesse. Les profils sont convexes dans le cas contra-rotatif, et concaves dans le cas co-rotatif. La dérivée de la vitesse en R_1 augmente en valeur absolue lorsque Bi augmente, ce qui indique une augmentation du taux de cisaillement du fait de la rhéofluidification. Pour des valeurs de Bi suffisamment élevées, une zone non cisailée existe, le profil de vitesse y est linéaire et la viscosité tend vers l'infini quand r tend vers R_0 , la position de l'interface séparant la zone cisailée de la zone non cisailée.

4 Rotation solide et ligne de Rayleigh

La rotation solide correspond à la situation où $\widehat{\Omega}_1 = \widehat{\Omega}_2$ ou sous forme adimensionnelle $Re_1 = \eta Re_2$. Dans la paramétrisation de Dubrulle et al. (2005) [10], cette ligne est représentée par $R_\Omega = \pm\infty$. L'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette est due à la stratification de moment angulaire. Quand les cylindres sont en co-rotation, le régime stable est défini d'après le critère de Rayleigh par

$$\frac{d}{dr}(L^2) > 0 \quad , \quad \forall r \in [R_1, R_2] \quad (20)$$

où $L = rV^b$ est le moment angulaire. Ce régime est délimité dans le plan (Re_1, Re_2) par la ligne de Rayleigh sur laquelle il existe une position radiale telle $\frac{d}{dr}(L^2) = 0$. Pour un fluide newtonien, l'équation de la ligne de Rayleigh s'écrit

$$Re_1 = \frac{Re_2}{\eta} . \quad (21)$$

Pour un fluide de Bingham, l'équation devient

$$Re_1 = \frac{2(1 - \eta)Re_2}{|\tau_1^b| \frac{R_1^2}{R_0^2} + Bi \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 - Bi} . \quad (22)$$

5 Equations aux perturbations

Une perturbation infinitésimale est superposée à l'état de base

$$\{\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\tau}\} = \{\mathbf{U}^b, P^b, \boldsymbol{\tau}^b\} + \varepsilon\{\mathbf{u}', p', \boldsymbol{\tau}'\} \quad (23)$$

Cette expression est injectée dans les équations (1)-(2), qui sont alors linéarisées autour de la solution de base pour obtenir les équations aux perturbations

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad , \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + Re [(\mathbf{U}^b \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U}^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' . \quad (25)$$

où la perturbation du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{\varepsilon} [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b + \varepsilon \mathbf{u}') - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}^b)] = \mu^b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}') + (\mu_t - \mu^b) \mathbf{A} . \quad (26)$$

Les composantes du tenseur \mathbf{A} sont toutes nulles sauf $A_{1,2} = A_{2,1} = \dot{\gamma}_{r\theta}(\mathbf{u}')$. Dans l'équation (26), la viscosité tangentielle a été introduite

$$\mu_t = \mu(\mathbf{U}^b) + \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{r\theta}}(\mathbf{U}^b) \dot{\gamma}_{r\theta}(\mathbf{U}^b) . \quad (27)$$

On obtient le système

$$0 = D_* \mathbf{u}' + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = & -Re_1 \frac{V^b}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \theta} - 2v' \right) - Dp' + \mu^b \left[\Delta \mathbf{u}' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \theta} - \frac{\mathbf{u}'}{r} \right] + 2D\mu^b D\mathbf{u}' \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial (\mu_t - \mu^b)}{\partial \theta} \left(\bar{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} = & -Re_1 \left(u' D_* V^b + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu^b \left[\Delta v' + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] \\ & + D \mu^b \left[D v' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] + D_* \left[(\mu_t - \mu^b) \left(\bar{D} v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + (\mu_t - \mu^b) \left[\frac{1}{r} \left(\bar{D} v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -Re_1 \frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu^b \Delta w' + D \mu^b \left[D w' + \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \quad (31)$$

où $D = \frac{\partial}{\partial r}$, $D_* = D + \frac{1}{r}$, $\bar{D} = D - \frac{1}{r}$ et $\Delta = D^2 + \frac{1}{r} D + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2$.

Les conditions aux limites expriment l'adhérence du fluide aux parois intérieure et extérieure et leur imperméabilité

$$\mathbf{u}' = 0 \quad \text{pour } r = R_1, R_2. \quad (32)$$

Comme le système linéaire (24)-(25) est homogène dans les directions axiale et azimutale, les perturbations sont recherchées sous la forme d'une superposition de modes normaux

$$\{\mathbf{u}', p'\} = \{\bar{u}(r, t), \bar{p}(r, t)\} \exp[i(m\theta + kz)]. \quad (33)$$

où m et k sont les nombres d'onde azimutal et axial et $\bar{\mathbf{u}}(r, t) = \bar{u}(r, t) \mathbf{e}_r + \bar{v}(r, t) \mathbf{e}_\theta + \bar{w}(r, t) \mathbf{e}_z$. En éliminant la pression \bar{p} et la composante \bar{w} de la vitesse, on obtient un système à deux équations gouvernant les composantes \bar{u} et \bar{v} de la forme

$$\mathcal{L} \bar{\mathbf{q}} = \mathcal{M} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} \quad \text{avec } \bar{\mathbf{q}} = (\bar{u}, \bar{v})^T \quad (34)$$

où \mathcal{L} et \mathcal{M} sont des opérateurs linéaires.

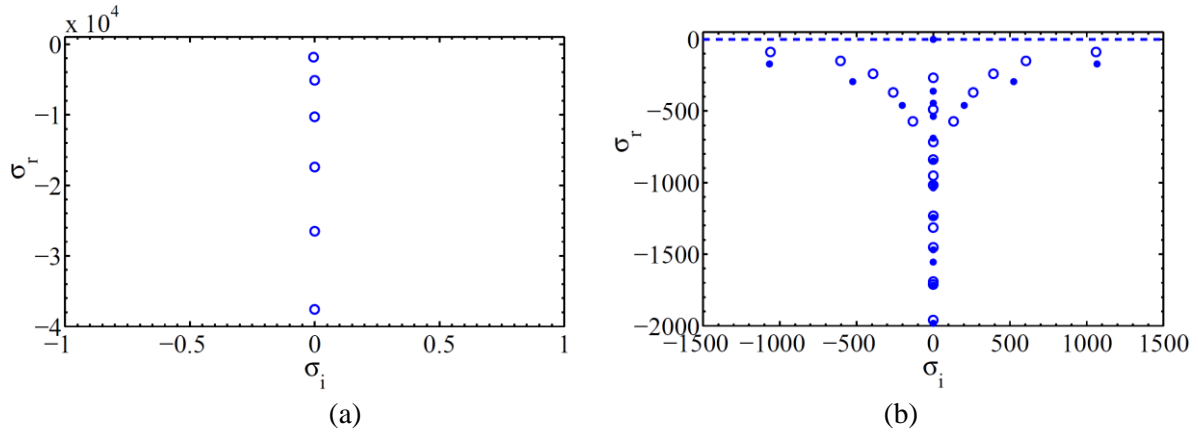


Fig. 5-Spectres de valeurs propres d'un fluide à seuil, $Bi = 10$, avec $\eta = 0.881$, $k = \pi$ et $m = 0$ (perturbation axisymétrique). (a) Sur la ligne de Rayleigh, $Re_1 = 500$ et $Re_2 = 560.01$. (b) $Re_2 = -4000$ et (o) $Re_1 = 500$, (.) $Re_1 = Re_{1c} = 1962.9$.

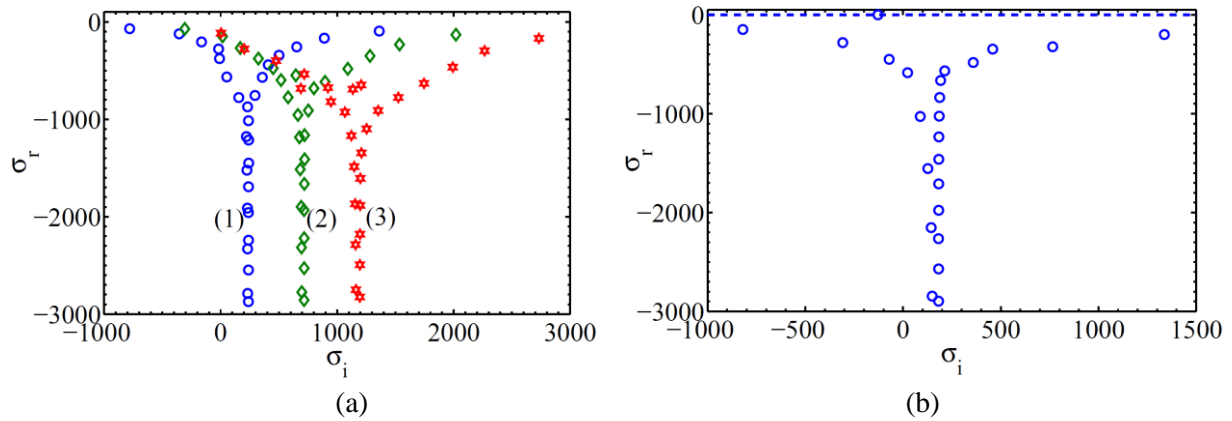


Fig. 6-Spectres de valeurs propres pour un fluide à seuil, $Bi = 10$ avec $\eta = 0.881$, $Re_2 = -4000$, $k = \pi$ et différentes valeurs du nombre d'onde azimutal. (a) $Re_1 = 400$, (1) $m = 1$, (2) $m = 3$, (3) $m = 5$. (b) $m = 1$, $Re_1 = Re_{1c} = 1962$.

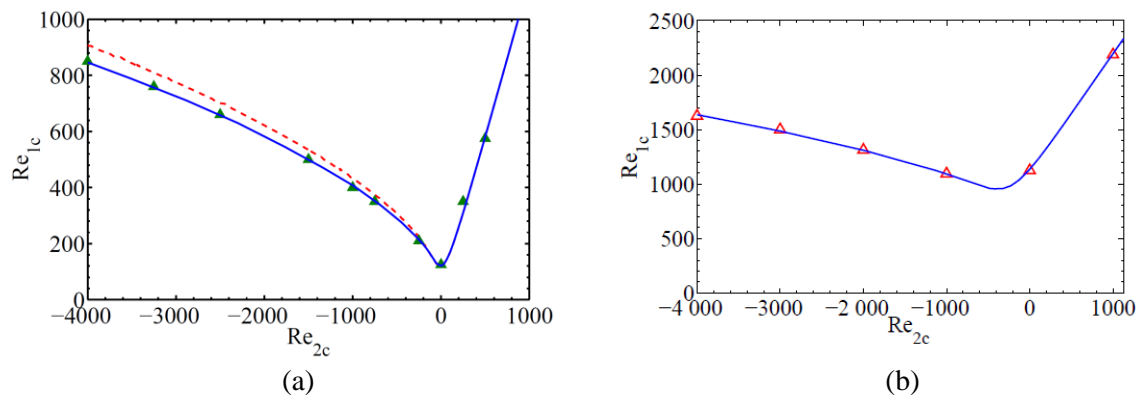


Fig. 7-Courbes de stabilité marginale dans le plan (Re_1, Re_2) . (a) Cas newtonien ($Bi = 0$) et entrefer étroit $\eta = 0.881$; comparaison de nos résultats (-) pour $m \neq 0$ avec ceux de [11] (Δ) ; (---) simulations pour $m = 0$. (b) Cas $Bi = 10$, $m = 0$ et $\eta = 0.883$; comparaison de nos résultats (-) avec les résultats de [8] (Δ).

6 Comportement aux temps longs des perturbations

Le problème aux valeurs initiales (34) peut être transformé en supposant une dépendance temporelle exponentielle de la perturbation $\bar{q}(r, t) = \mathbf{q}(r) \exp(\sigma t)$. On obtient ainsi le problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathcal{L} \bar{q} = \sigma \mathcal{M} \bar{q} \quad (35)$$

dont la valeur propre $\sigma = \sigma_r + i \sigma_i$ est la fréquence complexe. La partie réelle de σ est le taux de croissance de la perturbation et la partie imaginaire est sa fréquence d'oscillation. Le problème (35) est discrétisé en utilisant une méthode de collocation spectrale basée sur les polynômes de Chebyshev évalués aux N points de collocation de Gauss-Lobatto. Le problème aux valeurs propres matriciel qui en résulte est résolu avec l'algorithme QZ de Matlab. Pour s'assurer de la convergence de la méthode numérique, des calculs ont été réalisés pour de valeurs de N croissantes. Pour $N \geq 40$, les 5 valeurs propres les moins stables (i.e. de plus grande partie réelle) sont inchangées à 10^{-3} près. Chaque calcul est réalisé pour N et $N + 5$ et seules les valeurs propres apparaissant dans les 2 cas sont conservées, ce qui permet d'éliminer les valeurs propres spurieuses.

Les spectres de valeurs propres sont analysés pour des perturbations axisymétriques et tridimensionnelles.

Dans le cas axisymétrique ($m = 0$), les spectres sont similaires à ceux des fluides newtoniens et des fluides rhéofluidifiants sans seuil. Cependant quelques différences sont à noter :

- Les valeurs propres sont réelles pour des couples (Re_1, Re_2) situés sur la ligne de Rayleigh, figure Fig. 5(a).
- Les valeurs propres sont plus espacées dans les cas d'un fluide de Bingham, Fig. 5(b).

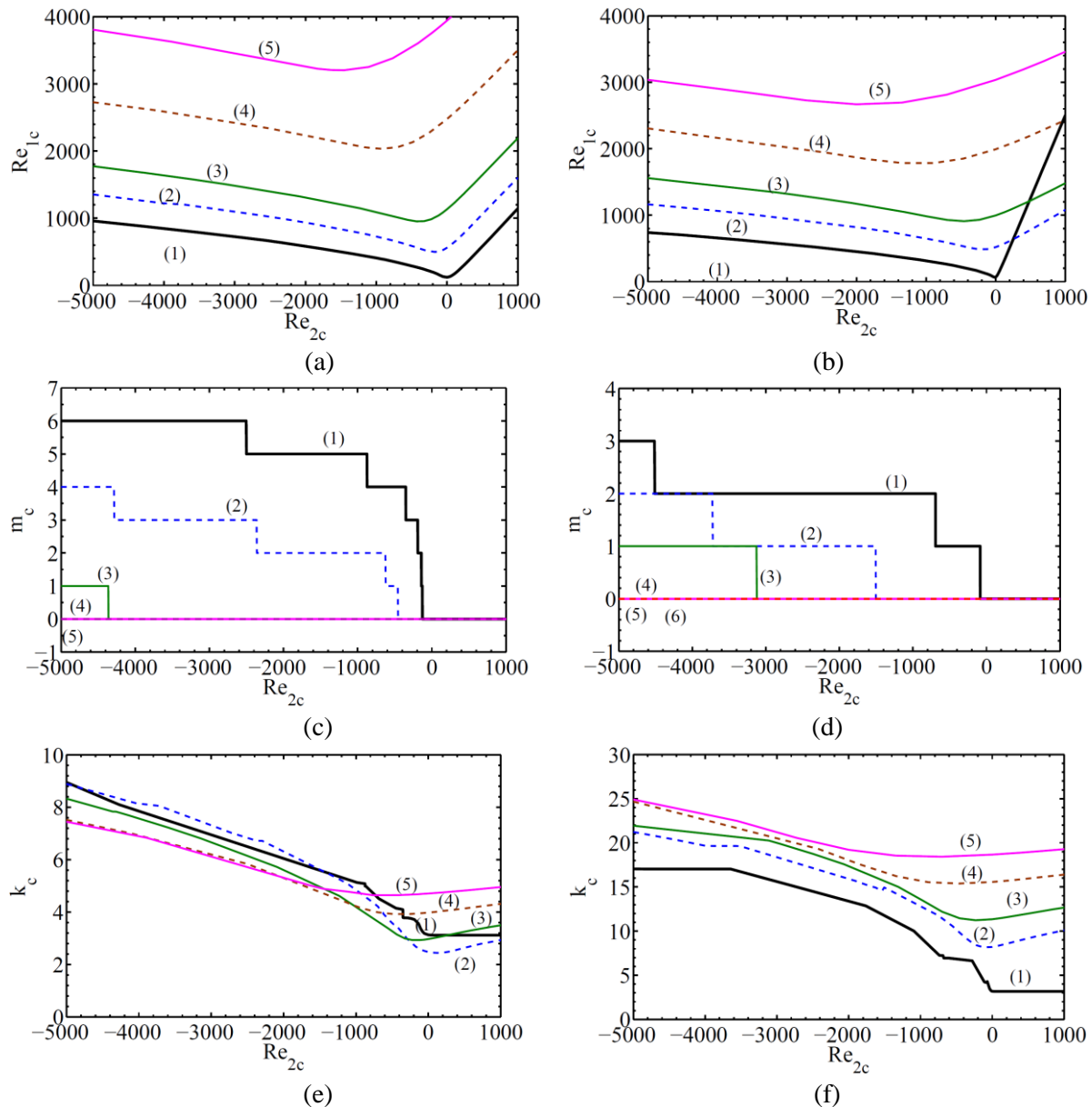


Fig. 8-Conditions critiques pour deux rapports de rayons $\eta = 0.881$ (figures de gauche) et $\eta = 0.4$ (figures de droite). (a) et (b) Courbes de stabilité marginale dans le plan (Re_1, Re_2) . (c) et (d) nombres d'onde azimutaux critiques. (e) et (f) nombres d'onde axiaux critiques. (1) Fluide newtonien, (2) $Bi = 5$, (3) $Bi = 10$, (4) $Bi = 20$, (5) $Bi = 30$ et (6) $Bi = 50$.

Dans certaines situations, le mode le moins stable est tridimensionnel ($m_c \neq 0$). Quand on augmente la valeur du nombre d'onde azimutal m , les spectres passent progressivement d'une structure en forme de jet, caractéristique des perturbations axisymétriques à une structure en forme de Y, Fig. 6. Par ailleurs, le spectre n'est pas centré en $\sigma_i = 0$ contrairement au cas axisymétrique. Le mode critique est

à partie imaginaire non nulle, ce qui signifie que des spirales tourbillonnaires de vitesse phase $\omega_c = -\sigma_{ic}/m_c$ apparaissent lors de la déstabilisation.

Pour valider le code de calcul, les conditions de stabilité marginale ont été calculées et comparées à des résultats publiés antérieurement dans la littérature. La figure Fig. 7(a) montre ainsi un très bon accord avec les résultats de [11] pour un cas newtonien et des perturbations tridimensionnelles. La figure Fig. 7(b) montre un très bon accord avec les résultats de [8] pour un fluide de Bingham et des perturbations bidimensionnelles.

Les conditions critiques ont ensuite été calculées pour différentes valeurs du nombre de Bingham et des perturbations tridimensionnelles, ceci pour une large gamme de nombre de Reynolds extérieur Re_2 , figure Fig. 8. Pour un entrefer étroit, $\eta = 0.881$, l'existence d'un seuil est stabilisante, que les cylindres soient en co- ou contra-rotation., figure Fig. 8(a). En revanche, pour un entrefer large, $\eta = 0.4$, le seuil induit une déstabilisation pour des valeurs positives de Re_2 suffisamment élevées, figure Fig. 8(b).

Le nombre d'onde azimutal critique m_c est nul pour $Re_2 > 0$, comme dans le cas newtonien, indiquant l'apparition de rouleaux de Taylor toroïdaux, Fig. Fig. 8(c-d). Pour les valeurs négatives de Re_2 , il existe une valeur limite Re_{2lim} en dessous de laquelle, m_c est non nul. La valeur de m_c augmente lorsque $|Re_2|$ augmente. La valeur absolue $|Re_{2lim}|$ augmente lorsque le nombre de Bingham Bi augmente, ce qui signifie que le seuil de contrainte favorise l'apparition de structures toroïdales.

Le seuil produit une élévation du nombre d'onde axial k_c , quand l'entrefer est large, Fig. 8(e-f). Lorsque l'entrefer est étroit, le seuil entraîne plutôt une augmentation de k_c pour $Re_2 > 0$ et plutôt une diminution de k_c pour $Re_2 < 0$.

7 Comportement aux temps courts des perturbations

$$\|\bar{\mathbf{q}}(t)\|_E^2 = \int_{R_1}^{R_2} \left[|\bar{u}|^2 + \frac{1}{k^2} \frac{1}{r^2} \left| \frac{d(r\bar{u})}{dr} \right|^2 + \left(\frac{m^2}{r^2 k^2} + 1 \right) |\bar{v}|^2 + \frac{im}{kr} \left(\frac{\bar{v}}{r} \frac{d(r\bar{u}^*)}{dr} - \frac{\bar{v}^*}{r} \frac{d(r\bar{u})}{dr} \right) \right] r dr$$

qui est une fonction du temps et de la condition initiale $\bar{\mathbf{q}}_0 = (\bar{u}_0, \bar{v}_0)^T = \bar{\mathbf{q}}(r, t = 0, m, k)$. L'amplification maximale d'énergie cinétique à l'instant t pour toutes les conditions initiales est définie par

$$G(t, m, k) = \sup_{\mathbf{q}_0 \neq 0} \frac{\|\bar{\mathbf{q}}(t)\|_E^2}{\|\bar{\mathbf{q}}(0)\|_E^2} \quad (36)$$

La croissance transitoire maximale d'énergie pour tous les instants s'exprime

$$G^{max}(m, k) = \sup_{t \geq 0} G(t, m, k) \quad (37)$$

Le maximum de G^{max} pour toutes les paires (m, k) est noté G^{opt} et est atteint par la perturbation optimale à l'instant t^{opt} .

L'amplification de l'énergie $G(t, m, k)$ est calculée numériquement. Soit un sous-espace linéaire S_M de M fonctions propres $\bar{\mathbf{q}}_j = (\bar{u}_j, \bar{v}_j)^T$ correspondant aux M valeurs propres les moins stables du spectre de l'opérateur \mathcal{L} intervenant dans le problème aux valeurs initiales (34). Toute perturbation peut être approchée par une combinaison linéaire de ces fonctions

$$\bar{q}_j = \sum_{j=1}^M K_j \bar{q}_j = Q \bar{K} \quad (38)$$

où Q est la matrice des vecteurs propres \bar{q}_j . La grandeur $G(t, m, k)$ est obtenue en calculant l'amplification maximale d'énergie à l'instant t pour toutes les combinaisons initiales possibles des M vecteurs propres.

Le problème (34) peut être mis sous la forme

$$\bar{K} = \exp(\Sigma t) \bar{K}_0 \quad (39)$$

avec $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ la matrice diagonale des valeurs propres et \bar{K}_0 le vecteur des coefficients qui déterminent la perturbation initiale. La norme énergie de $\bar{q}(t)$ s'écrit

$$\|\bar{q}(t)\|_E^2 = \bar{K}^* M \bar{K} = \bar{K}^* F^H F \bar{K} = \|F \bar{K}\|_2^2 \quad (40)$$

où M est une matrice Hermitienne définie positive que l'on peut donc mettre sous la forme $M = F^H F$, l'exposant H indiquant le transconjugué. On en déduit

$$G(t) = \sup_{\bar{K}_0 \neq 0} \frac{\|F \bar{K}(t)\|_2^2}{\|F \bar{K}_0\|_2^2} = \sup_{\bar{K}_0 \neq 0} \frac{\|F \exp(\Sigma t) F^{-1} F \bar{K}_0\|_2^2}{\|F \bar{K}_0\|_2^2} \quad (41)$$

$$= \|F \exp(\Sigma t) F^{-1}\|_2^2 = s_1^2$$

où s_1 est la plus grande valeur singulière de la matrice $F \exp(\Sigma t) F^{-1}$. Les calculs sont réalisés à l'aide des polynômes de Chebyshev. Le nombre de points de collocation nécessaire pour assurer la convergence des calculs est de $N = 40$.

La figure Fig. 9 montre les contours de G^{opt} dans le plan (Re_1, Re_2) pour un fluide newtonien. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de Meseguer (2002) [11]. Sur la figure Fig. 10, sont présentés les contours de G^{opt} dans le cas d'un fluide de Bingham, avec $Bi = 10$. Les valeurs sont inférieures à celles obtenues dans le cas newtonien ce qui indique que la présence d'un seuil atténue le phénomène de croissance transitoire.

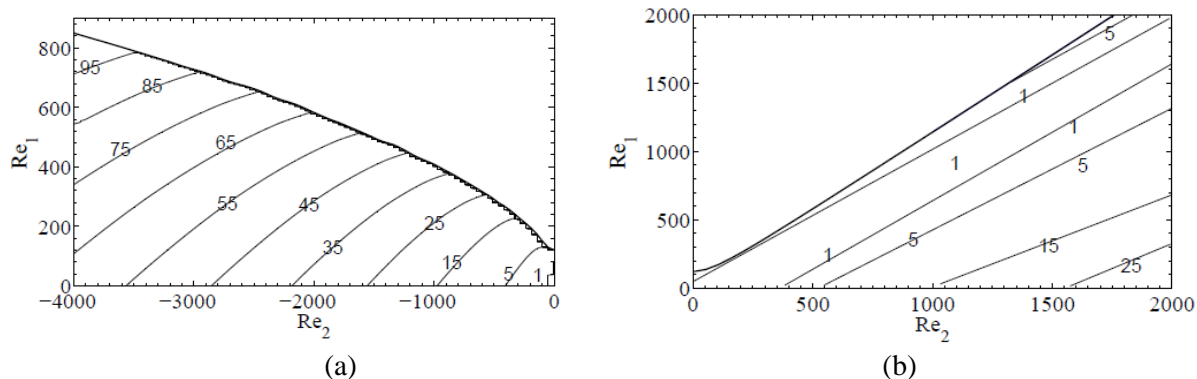


Fig. 9-Contours de l'amplification optimale de l'énergie G^{opt} dans le plan (Re_1, Re_2) pour un fluide newtonien et le rapport de rayon $\eta = 0.881$. (a) Cylindres contra-rotatifs. (b) Cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

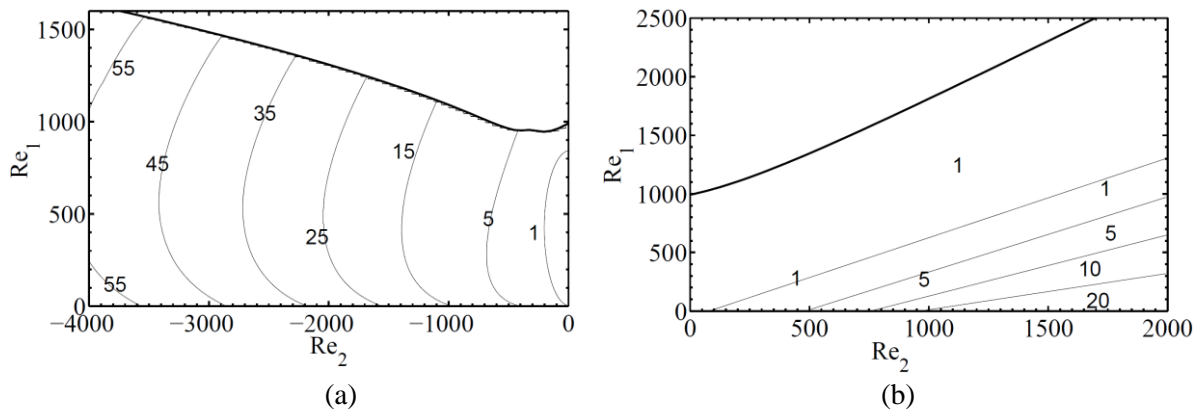


Fig. 10-Contours de l'amplification optimale de l'énergie G^{opt} dans le plan (Re_1, Re_2) pour un fluide en loi de Bingham avec $Bi = 10$ et le rapport de rayon $\eta = 0.881$. (a) Cylindres contra-rotatifs. (b) Cylindres co-rotatifs. Le trait gras représente la courbe de stabilité marginale.

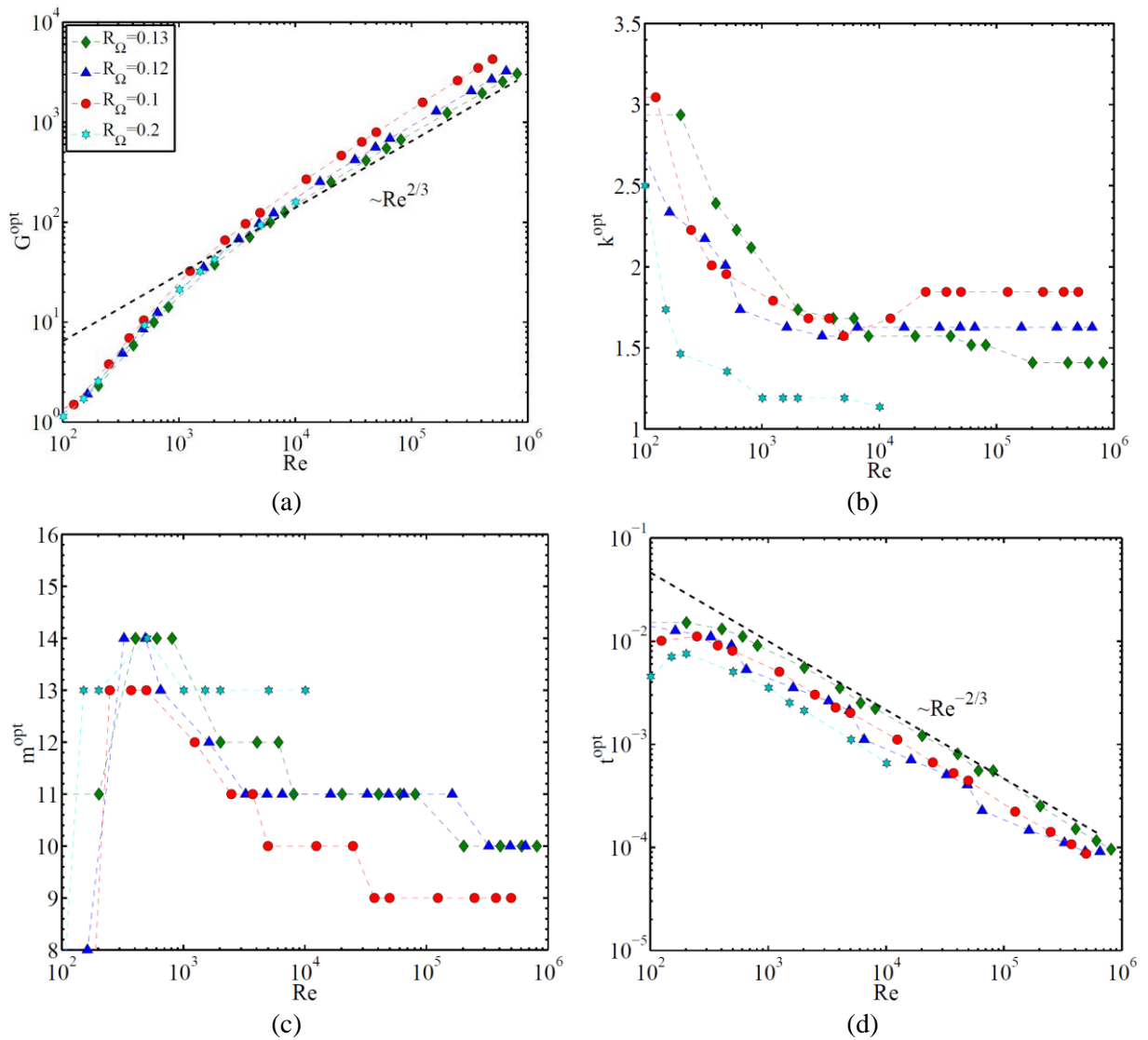


Fig. 11-Amplification optimale de l'énergie et caractéristiques de la perturbation optimale en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement pour différentes valeurs du nombre de rotation R_Ω . Pour un fluide de Bingham avec $Bi = 10$ et un rapport de rayon $\eta = 0.881$. (a) Amplification optimale G^{opt} . (b) Nombre d'onde axial optimal k^{opt} . (c) Nombre d'onde azimutal optimal m^{opt} . (d) Temps optimal t^{opt}

Sur la figure Fig. 11 sont tracés les conditions optimales en fonction du nombre de Reynolds de cisaillement Re pour différentes valeurs du nombre de rotation R_Ω . Pour des valeurs de Re suffisamment élevées, G^{opt} et t^{opt} , instant auquel est atteint le maximum d'énergie, suivent une loi de puissance avec Re :

$$G^{opt} \propto Re^{2/3} \quad \text{et} \quad t^{opt} = Re^{-2/3} \quad (42)$$

Et les nombres d'onde optimaux sont tels que

$$9 \leq m^{opt} \leq 13 \quad \text{et} \quad k^{opt} < k_c \quad (43)$$

8 Conclusion

Dans cette communication, la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide de Bingham a été réalisée. Des perturbations tridimensionnelles ont été considérées. Une étude aux temps longs a d'abord été effectuée qui a permis de calculer les conditions critiques de déstabilisation. Le seuil de contrainte a un effet stabilisant, sauf dans le cas d'un large entrefer et de cylindres co-rotatifs, où il est déstabilisant.

Par ailleurs, le seuil favorise l'apparition de structures toroïdales.

Nous avons ensuite procédé à une étude aux temps courts. La croissance transitoire dans le cas d'un fluide de Bingham est moins forte que dans le cas newtonien. La croissance optimale de l'énergie des perturbations varie en loi de puissance avec le nombre de Reynolds de cisaillement défini par Dubrulle *et al.* (2005).

Références

- [1] M. Couette, « Sur un nouvel appareil pour l'étude du frottement des liquides. », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, p. 388-390, 1888.
- [2] G. I. Taylor, « Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders », *Philos. Trans. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 223, n° 605-615, p. 289-343, janv. 1923.
- [3] E. L. Koschmieder, *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge University Press, 1993.
- [4] R. Tagg, « The couette-taylor problem », *Nonlinear Sci. Today*, vol. 4, n° 3, p. 1-25, 1994.
- [5] C. D. Andereck, S. S. Liu, et H. L. Swinney, « Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders », *J. Fluid Mech.*, vol. 164, p. 155-183, 1986.
- [6] W. Graebel, « The hydrodynamic stability of a Bingham fluid in Couette flow. », *Proceedings of International Symposium on 2nd Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*, Haifa, Israel, p. 636-649, 23-avr-1964.
- [7] J. Peng et K.-Q. Zhu, « Linear stability of Bingham fluids in spiral Couette flow », *J. Fluid Mech.*, vol. 512, août 2004.
- [8] M. P. Landry, I. A. Frigaard, et D. M. Martinez, « Stability and instability of Taylor-Couette flows of a Bingham fluid », *J. Fluid Mech.*, vol. 560, p. 321, août 2006.
- [9] C. Chen, Z.-H. Wan, et W.-G. Zhang, « Transient growth in Taylor-Couette flow of a Bingham fluid », *Phys. Rev. E*, vol. 91, n° 4, avr. 2015.
- [10] B. Dubrulle, O. Dauchot, F. Daviaud, P.-Y. Longaretti, D. Richard, et J.-P. Zahn, « Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data », *Phys. Fluids*, vol. 17, n° 9, p. 095103, 2005.
- [11] Á. Meseguer, « Energy transient growth in the Taylor-Couette problem », *Phys. Fluids*, vol. 14, n° 5, p. 1655, 2002.

