Les tenseurs affines de la mécanique : le torseur, le co-torseur et le moment

G. DE SAXCÉ

Laboratoire de Mécanique de Lille (FRE CNRS 3723), gery.desaxce@univ-lille1.fr

Résumé :

Dans [9], Souriau propose de revisiter la Mécanique en mettant l'accent sur son caractère affine. C'est ce point de vue que nous adopterons ici en considérant les objets familiers de la mécanique (torseurs, application moment) comme des tenseurs affines, une généralisation simple des tenseurs classiques [2].

Abstract :

In [9], Souriau proposes to revisit the Mechanics emphasizing its affine nature. It is the point of view that we shall adopt here, considering the familiar objects of the Mechanics (torsors, momentum map) as affine tensors, une simple generalization of the classical tensors [2].

Mots clefs : Dynamique des corps rigides, Mécanique des Milieux Continus, Relativité, Mécanique symplectique

1 Groupe affine et groupe de Galilée

Soit un espace affine $A\mathcal{T}$ associé à un espace vectoriel $\mathcal{T}$ de dimension n. Tout repère affine est constitué d'une origine $\boldsymbol{Q} \in A\mathcal{T}$ et d'une base $(\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ de $\mathcal{T}$. Par la décomposition unique : $\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha$, il permet d'associer à chaque point $\boldsymbol{P}$ de $A\mathcal{T}$ un ensemble de coordonnées affines V^α, rangées dans le vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$. A tout changement de repère affine correspond une transformation affine, constituée d'une translation C et d'une matrice de passage régulière P :

$$V = C + P\, V' \,. \tag{1}$$

Il est judicieux de la présenter formellement comme une transformation linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ V' \end{pmatrix} = \tilde{P}\, \tilde{V}' \,.$$

Cette remarque est importante car les règles du calcul affine se ramènent ainsi aisément à celle du calcul linéaire. L'ensemble des transformations affines $a = (C, P)$ forment le groupe affine $\mathbb{A}ff(n)$, à la base de la géométrie affine. Avec une règle graduée et un rapporteur, nous pouvons mesure les distances entre deux points, les angles entre deux droites et les volumes de l'espace physique $A\mathcal{T}$. Les transformations affines qui conservent ces quantités sont les isométries

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & R \end{pmatrix}, \qquad R \in \mathbb{SO}(3) , \tag{2}$$

qui forment le groupe d'Euclide $\mathbb{SE}(3)$, sous-groupe de $\mathbb{A}ff(3)$. C'est le groupe de la géométrie euclidienne mais aussi, comme nous le verrons, celui de la statique. Si nous disposons d'une horloge, nous pouvons mesurer des durées. Rajoutons une dimension en travaillant dans l'espace-temps $A\mathcal{T}$. Dans un repère affine de $A\mathcal{T}$, tout événement survenant à la position x et à l'instant t sera représenté par :

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ,$$

En l'absence de gravité, les particules matérielles se déplacent en mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.). Les transformations affines qui conservent le M.R.U., les durées, les distances, les angles et les volumes orientés sont de la forme :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 1 & 0 \\ k & u & R \end{pmatrix} . \tag{3}$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ est un boost galiléen, $k \in \mathbb{R}^3$ est une translation spatiale et $\tau_0 \in \mathbb{R}$ est un changement d'horloge. Elles forment le groupe de Galilée $\mathbb{GAL}$, sous-groupe de $\mathbb{A}ff(4)$. C'est le groupe de la dynamique classique.

2 Tenseurs affines

A tout objet affine, nous pouvons associer un système de composantes affines. Considérons par exemple une fonction affine $\mathbf{\Psi}$ de $A\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$. On peut lui associer les composantes Φ_α de l'unique forme linéaire associée, rangées dans le vecteur ligne Φ, et la hauteur au-dessus de l'origine $\chi = \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{Q})$. Dans un changement de repère affine, ces composantes affines se transforment suivant la règle simple :

$$\tilde{\Psi}' = \begin{pmatrix} \chi' & \Phi' \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} \chi & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \tilde{\Psi}\,\tilde{P} . \tag{4}$$

qui est une représentation linéaire de $\mathbb{A}ff(n)$. Ces fonctions affines forment un espace vectoriel $A^*\mathcal{T}$ de dimension $(n+1)$.

On peut généraliser cette construction et définir un **tenseur affine** comme un objet qui assigne un ensemble de composantes à chaque repère affine f de $A\mathcal{T}$ avec une **règle tensorielle** qui est une représentation (linéaire ou affine) de $\mathbb{A}ff(n)$.

Avec cette définition, les tenseurs affines sont une généralisation naturelle des tenseurs classiques que nous appellerons **tenseurs linéaires**, ces derniers étant des tenseurs affines triviaux pour lesquels la transformation affine $a = (C, P)$ opère à travers sa partie linéaire $P = lin(a)$.

Soit $\mathcal{R}$ un espace vectoriel de dimensions finie m. $\mathcal{T}$ est appelé l'**espace source** et $\mathcal{R}$ l'**espace cible**. Si $\mathcal{R}$ est différent de $\mathbb{R}$, le tenseur est **à valeur vectorielle**. Un tenseur affine peut être construit comme une application qui est affine ou linéaire par rapport chacun de ses arguments. Comme les tenseurs linéaires, les tenseurs affines peuvent être classés en trois familles, contravariants, covariants et mixtes.

Les tenseurs affines les plus simples sont les points qui sont 1 fois contravariants et les formes affines qui sont 1 fois covariants mais on peut en construire de plus complexes qui ont une signification physique profonde : les *torseurs* (proposés dans [1]), les *co-torseurs* et les *moments* détaillés dans [2]. Pour plus de détail sur l'espace affine dual, le produit tensoriel affine, le produit extérieur affine et les fibrés tangents affines, le lecteur peut consulter [3], [10] (AV-differential geometry).

Un tenseur peut être vu comme une orbite d'un groupe dans l'espace de ses composantes. Par restriction des règles tensorielles des tenseurs à un sous-groupe $G \subset \mathbb{A}ff(n)$, nous obtenons les G-tenseurs. Par exemple, les $\mathbb{SE}(3)$-tenseurs sont les tenseurs euclidiens et les $\mathbb{GAL}$-tenseurs sont les tenseurs galiléens.

3 Torseurs

On invente un nouvel objet, le torseur. C'est une forme bilinéaire antisymétrique $\boldsymbol{\tau}$ sur l'espace $A^*\mathcal{T}$ des formes affines :

$$\forall \boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}} \in A^*\mathcal{T}, \qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}) = -\boldsymbol{\tau}(\hat{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{\Psi}) \; .$$

Tenant compte de la bilinéarité et de l'antisymétrie, le torseur est représenté dans un repère affine par :

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}) = \tau((\chi, \Phi_\alpha), (\hat{\chi}, \hat{\Phi}_\beta)) = J^{\alpha\beta}\Phi_\alpha\,\hat{\Phi}_\beta + T^\alpha(\chi\,\hat{\Phi}_\alpha - \hat{\chi}\,\Phi_\alpha) \; ,$$

avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$. Les composantes affines $(T^\alpha, J^{\alpha\beta})$ se transforment suivant la règle :

$$\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & T'^T \\ -T' & J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C' & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & C'^T \\ 0 & P^{-T} \end{pmatrix} = \tilde{P}^{-1}\tilde{\tau}\,\tilde{P}^{-T} \; , \qquad (5)$$

avec $C' = -P^{-1}C$.

3.1 Statique d'un arc

Appliquons cette démarche générale à un exemple simple, la statique d'un arc. Faisons une coupe en un point. La section droite est soumise à un vecteur des efforts F et à un vecteur des moments M . On peut lui associer un **torseur statique** représenté par la matrice antisymétrique :

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & F^T \\ -F & -j(M) \end{pmatrix} \; , \qquad (6)$$

où $j(u)$ est la matrice antisymétrique représentant le produit vectoriel : $j(u)\,v = u \wedge v$. Considérons un changement d'origine représenté par une translation C' (la matrice de passage R étant l'identité). Quel est l'effet de cette transformation euclidienne sur les composantes du torseur ? La règle (5) conduit à deux relations attendues, la conservation des efforts et la loi de transport des moments :

$$F' = F, \qquad M' = M + C' \wedge F \; .$$

3.2 Dynamique d'une particule matérielle

Quel est la structure de son torseur ? On peut travaille de nouveau dans l'espace-temps et le représenter par une matrice antisymétrique (5). Nous recherchons ses invariants par transformation galiléenne, ce qui nous amène à poser :

$$\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j(l_0) \end{pmatrix} . \tag{7}$$

On fait ainsi apparaître un scalaire m que nous identifierons à la masse, et un vecteur-colonne $l_0 \in \mathbb{R}^3$, de norme invariante, que nous identifierons au moment cinétique propre. On peut interpréter (7) comme l'expression du torseur d'une particule au repos dans le repère considéré. Pour connaître ces composantes dans un repère en mouvement, appliquons un boost galiléen de vitesse d'entraînement v . Grâce à la règle (5) appliquée à une transformation galiléenne (3), les composantes du torseur dans le repère en mouvement sont :

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T \\ -m & 0 & -q^T \\ -p & q & -j(l) \end{pmatrix} , \tag{8}$$

où on voit apparaître la quantité de mouvement $p = m\,v$ et le moment cinétique $l = l_0 + m\,x \wedge v$, incluant le terme de transport, mais aussi la quantité de position $q = m\,x$, produit de la masse par le vecteur position. Ces variables familières n'apparaissent pas de manière indépendante mais comme les composantes d'un objet structuré.

4 Gravité galiléenne

Élargissons notre cadre en considérant une variété différentielle $\mathcal{M}$ pouvant être dotée d'une courbure mais que nous percevrions, au moins localement, de manière affine. Par la suite $\mathcal{T}$ sera l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{X}$, noté $T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ et $AT_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ le même espace tangent enrichi de sa structure d'espace affine. Nous devons nous donner un moyen de le paralléliser en le munissant de la géométrie du groupe affine. En passant d'un point $\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}$ à un autre infiniment voisin $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + \overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$, nous devons donner, en fonction de $\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$, les mouvements de la base locale, donc une matrice de passage infinitésimale dP, et le mouvement de l'origine, donc une translation infinitésimale dC. Nous définissons ainsi une matrice de connexion Γ (contenant les symboles de Christoffel) et un vecteur de connexion affine Γ_A :

$$d\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dC & dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma_A & \Gamma \end{pmatrix} = \tilde{\Gamma} .$$

Un calcul élémentaire montre que $\Gamma_A(dX) = dX - \nabla_{dX} C$. En considérant que C se réduit à une translation en x et en se restreignant au groupe de Galilée, nous définissons ainsi une connexion galiléenne (symétrique, à valeur dans l'algèbre de Lie de $\mathbb{GAL}$) :

$$\tilde{dP} = \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 \\ -\Omega \wedge x\,dt & \Omega \wedge dx - g\,dt & j(\Omega)\,dt \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Les symboles de Christoffel s'interprètent comme la gravité g et un nouvel objet Ω appelé tournoiement. On peut ainsi différentier un champs de torseur sur $\mathcal{M}$ de manière intrinsèque en tenant compte de la variation du repère affine : $d\tilde{\tau} = d(\tilde{P}\,\tilde{\mu}'\tilde{P}^T) = \tilde{P}\,d\tilde{\mu}'\tilde{P}^T + d\tilde{P}\,\tilde{\mu}'\tilde{P}^T + \tilde{P}\,\tilde{\mu}'d\tilde{P}^T$ En faisant tendre la transformation P vers l'identité, donc $\tilde{\tau}'$ vers $\tilde{\tau}$, on obtient la dérivée affine du torseur :

$$\tilde{\nabla}\tilde{\tau} = d\tilde{\tau}\mid_{\tilde{P}=Id} = d\tilde{\tau} + \tilde{\Gamma}\,\tilde{\tau} + \tilde{\tau}\,\tilde{\Gamma}^T\ .$$

Cette dérivée affine est notée $\tilde{\nabla}$ pour la distinguer de la dérivée vectorielle usuelle ∇. Sur cette base, nous énonçons un principe affirmant que la dérivée covariante du champ de torseur est nulle, ce qui donne lieu, tenant compte de (5), à deux groupes d'équations :

$$\tilde{\nabla}T = dT + \Gamma\,T = 0, \qquad \tilde{\nabla}J = dJ + \Gamma\,J + J\,\Gamma^T + \Gamma_A T^T - T\,\Gamma_A^T = 0\ . \tag{10}$$

Vérifions sur deux exemples la pertinence de ce principe pour la Mécanique.

4.1 Équations d'équilibre d'un arc

Soit s la longueur courante le long de l'arc et $U = dx\,/\,ds$ le vecteur unitaire tangent. Pour le torseur (6), le principe précédent donne lieu aux équations d'équilibre en translation et rotation d'un arc sans charges réparties :

$$\frac{dF}{ds} = 0, \qquad \frac{dM}{ds} + U \times F = 0\ .$$

4.2 Équations du mouvement d'une particule ou d'un solide rigide

Tenant compte de (8), (9) et (10), le principe de nullité de la dérivée du torseur conduit aux équations du mouvement : on retrouve donc la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, le théorème du moment cinétique et une équation méconnue mais élégante qui stipule que la dérivée de la quantité de position q est la quantité de mouvement p :

$$\dot{m} = 0, \qquad \dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \wedge v), \qquad \dot{l} + \Omega \wedge l_0 = x \wedge m\,(g - 2\,\Omega \wedge v), \qquad \dot{q} = p\ . \tag{11}$$

En l'absence de tournoiement, on retrouve la loi de Newton. La présence de Ω permet d'expliquer le mouvement du pendule de Foucault sans devoir négliger l'accélération centripète [2]. Le terme contenant le moment cinétique propre l_0 permet d'expliquer par exemple le mouvement d'un satellite ou de la toupie de Lagrange.

4.3 Généralisation aux milieux continus de dimension arbitraire

Les exemples précédents peuvent être considérés comme des milieux continus de dimension 1 (l'arc, la trajectoire d'une particule). On généralise sans grosses difficultés aux milieux curvilignes de dimension m plongés dans un espace environnant de dimension n. Le torseur sera un tenseur affine à valeur dans un espace vectoriel cible de dimension m. Ces composantes affines $({}^{\gamma}\,T^{\alpha}, {}^{\gamma}\,J^{\alpha\beta})$ auront trois indices, celui de gauche étant relatif à l'espace cible, ceux de droite ayant la même fonction qu'à la section 3. Le principe énoncé à la section 4 se généralise aisément en affirmant que la divergence affine du champ de torseurs à valeur vectorielle s'annule :

$${}_{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}\,T^{\alpha} = 0, \qquad {}_{\gamma}\tilde{\nabla}\,{}^{\gamma}J^{\alpha\beta} = 0\ .$$

Ces équations sont très générales et peuvent se décliner en fonction du milieu curviligne choisi et de l'espace environnant [2]. Pour la dynamique des corps 3D ($n = m = 4$), on en déduit les équations d'Euler des milieux continus. L'étude des milieux 1D ($n = 4$, $m = 2$) révèle des équations de la dynamique plus riches que celles des poutres et des arcs qui permettent aussi de modéliser des fluides (par exemple, un jet d'eau ou l'écoulement dans un tuyau).

5 Co-torseurs

Un **co-torseur** est une forme bi-affine antisymétrique $\boldsymbol{\gamma}$ sur l'espace $A\mathcal{T}$:

$$\forall \boldsymbol{P}, \hat{\boldsymbol{P}} \in A\mathcal{T}, \qquad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{P}, \hat{\boldsymbol{P}}) = -\boldsymbol{\gamma}(\hat{\boldsymbol{P}}, \boldsymbol{P}) \, .$$

Tenant compte caractère bi-affine et de l'antisymétrie, le co-torseur est représenté dans un repère affine par :

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{P}, \hat{\boldsymbol{P}}) = \gamma(V^\alpha, \hat{V}^\beta) = A_\alpha(V^\alpha - \hat{V}^\alpha) + \Omega_{\alpha\beta} V^\alpha \hat{V}^\beta \, ,$$

avec $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$. Les composantes affines $(A_\alpha, \Omega_{\alpha\beta})$ se transforment suivant la règle :

$$\tilde{\gamma}' = \begin{pmatrix} 0 & -A' \\ A'^T & \Omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C^T \\ 0 & P^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^T & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \tilde{P}^T \tilde{\gamma} \, \tilde{P} \, . \tag{12}$$

Appliquons cette démarche pour décrire la cinématique d'un corps rigide. On peut lui associer un **co-torseur cinématique** représenté par la matrice antisymétrique :

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ -v & -j(\omega) \end{pmatrix} \, , \tag{13}$$

où $v \in \mathbb{R}^3$ est sa **vitesse** et $\omega \in \mathbb{R}^3$ sa **vitesse de rotation**. La règle (12) appliqué à la transformation euclidienne (2) conduit aux relations :

$$v' = v + \omega \wedge C, \quad \omega' = \omega$$

qui décrivent bien la cinématique d'un corps rigide. Torseurs et co-torseurs peuvent être mis en dualité grâce au produit doublement contracté :

$$\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\tau} = Tr(\tilde{\gamma} \, \tilde{\tau})$$

En combinant (6) et (13), il est aisé de vérifier que la puissance totale exercée sur le corps par des efforts de torseur résultant $\boldsymbol{\tau}$ est donnée par :

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\tau} = v \cdot F + \omega \cdot M \, .$$

Le co-torseur cinématique (tenseur covariant) est bien l'objet dual du torseur statique (tenseur contravariant). Torseurs et co-torseurs ne peuvent donc être rangés dans une même classe d'objet comme c'est parfois le cas dans certains ouvrages. Le présent formalisme évite justement ce genre de confusions.

6 Moments

Si l'utilisation à des fins mécanique de tenseurs affines contravariants et covariants est relativement naturelle, celle des tenseurs mixtes est moins évidente mais tout aussi fructueuse. Soit une variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension n et G un sous-groupe de Lie de $\mathbb{A}ff(n)$. Nous appelons (**tenseur**) **moment** une forme bilinéaire $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} : T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M} \times A^*T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M} \to \mathbb{R} : (\overrightarrow{\boldsymbol{V}}, \boldsymbol{\Psi}) \mapsto \boldsymbol{\mu}(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}, \boldsymbol{\Psi})$$

C'est un tenseur affine mixte, 1 fois covariant et 1 fois contravariant. Tenant compte de la bilinéarité, il est représenté dans un repère affine f par :

$$\boldsymbol{\mu}(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}, \boldsymbol{\Psi}) = (\chi\, K_\beta + \Phi_\alpha L^\alpha_\beta)\, V^\beta$$

où K_β et L^α_β sont les composantes de $\boldsymbol{\mu}$ ou, de manière équivalente, le couple $\mu = (K, L)$ du vecteur ligne K collectant les K_β et la matrice (carrée d'ordre n) L d'éléments L^α_β. Tenant compte de la règle tensorielle des vecteurs $V = P\, V'$, à ne pas confondre avec (1), et de celle (4) des formes affines, celle des tenseurs moments est donnée par l'action induite de $\mathbb{A}ff(n)$:

$$K' = K\, P^{-1}, \qquad L' = (P\, L + C\, K)\, P^{-1} \tag{14}$$

Si l'action est restreinte au sous-groupe G, le moment $\boldsymbol{\mu}$ est un G-tenseur.

6.1 Tenseur moment et représentation coadjointe

D'autre part, jetons un coup d'œil à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, c'est-à-dire à l'ensemble des générateurs infinitésimaux $Z = da = (dC, dP)$ avec $a \in G$. Identifions les composantes du moment $\mu = (K, L)$ au dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie grâce au produit de dualité :

$$\mu\, Z = \mu\, da = (K, L)\, (dC, dP) = K\, dC + Tr(L\, dP) \tag{15}$$

Nous savons que le groupe opère sur l'algèbre de Lie par la représentation adjointe :

$$Ad(a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : Z' \mapsto Z = Ad(a)\, Z' = a\, Z'\, a^{-1}\ .$$

Comme G est un groupe de transformations affines, tout générateur infinitésimal Z est représenté par :

$$\tilde{Z} = d\tilde{P} = d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dC & dP \end{pmatrix}\ .$$

Alors $\tilde{Z} = \tilde{P}\, \tilde{Z}'\, \tilde{P}^{-1}$ conduit à :

$$dC = P\, (dC' - dP'\, P^{-1} C), \qquad dP = P\, dP'\, P^{-1}\ . \tag{16}$$

Cette représentation adjointe induit la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ définie par :

$$(Ad^*(a)\, \mu')\, Z = \mu'\, (Ad(a^{-1})\, Z)\ .$$

Vu (15), on trouve que la représentation coadjointe :

$$Ad^*(a) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* : \mu' \mapsto \mu = Ad^*(a)\, \mu'$$

est donnée par :

$$K = K'\, P^{-1}, \qquad L = (P\, L' + C\, K')\, P^{-1} \ .$$

Il vaut la peine d'observer que **la règle tensorielle** (14) **du moment n'est rien d'autre que la représentation coadjointe**.

Toutefois, cette construction mathématique n'est pas pertinente pour toutes les applications à la Mécanique et nous avons besoin de l'étendre en considérant une application θ de G dans $\mathfrak{g}^*$ et une règle tensorielle généralisée :

$$\mu = a \cdot \mu' = Ad^*(a)\, \mu' + \theta(a) \ , \tag{17}$$

où θ dépend éventuellement d'un invariant de l'orbite. Comme on souhaite que le moment soit un tenseur affine, il faut qu'elle soit une représentation affine de G dans $\mathfrak{g}^*$:

$$\forall a, b \in G, \qquad \theta(ab) = \theta(a) + Ad^*(a)\, \theta(b) \tag{18}$$

Remarque : cette action induit une *structure d'espace affine* sur l'ensemble des tenseurs moments. Soit $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ le fibré principal des repères affines, de groupe structural G pour l'action sans point fixe $(a, f) \mapsto f' = a \cdot f$ sur chaque fibre. On peut alors construire le fibré principal :

$$\hat{\pi} : \mathfrak{g}^* \times \mathcal{F} \to (\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F})/G : (\mu, f) \mapsto \boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$$

pour l'action sans point fixe :

$$(a, (\mu, f)) \mapsto (\mu', f') = a \cdot (\mu, f) = (a \cdot \mu, a \cdot f)$$

où l'action sur $\mathfrak{g}^*$ est (17). Clairement, l'orbite $\boldsymbol{\mu} = orb(\mu, f)$ peut être identifiée au G-tenseur moment $\boldsymbol{\mu}$ de composantes μ dans le repère f.

6.2 Tenseur et application moment

Soit $(\mathcal{N}, \omega)$ une variété symplectique (ou pré-symplectique) [4], [5], [7], [8]. Un groupe de Lie G opérant différentiablement à gauche sur $\mathcal{N}$ et préservant la forme symplectique ω est appelée groupe symplectique. Le produit intérieur d'un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}$ et d'une p-forme ω est noté $\iota(\overrightarrow{\boldsymbol{V}})\, \omega$. Une application $\psi : \mathcal{N} \to \mathfrak{g}^*$ telle que :

$$\forall \eta \in \mathcal{N}, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}, \qquad \iota(Z \cdot \eta)\, \omega = -d(\psi(\eta) Z) \ ,$$

est appelée application moment de G. Il s'agit de la quantité intervenant dans le théorème de Noether qui affirme que ψ est constante sur chaque feuille de $\mathcal{N}$. Dans ([7], Théorème (11.17), page 109, ou sa version anglaise [8]), Souriau a prouvé qu'il existe une application lisse θ de G dans $\mathfrak{g}^*$:

$$\theta(a) = \psi(a \cdot \eta) - Ad^*(a)\, \psi(\eta) \ , \tag{19}$$

qui est un cocycle symplectique, c'est-à-dire une application $\theta : G \to \mathfrak{g}$ vérifiant l'identité (18) et telle que $(D\theta)(e)$ est une 2-forme. Un résultat important appelé théorème de Kirillov-Kostant-Souriau révèle la structure symplectique de l'orbite [7] (Théorème (11.34), page 116-118) : soit G un groupe de Lie et une orbite de la représentation coadjointe $orb\,(\mu) \subset \mathfrak{g}^*$; alors, l'orbite $orb\,(\mu)$ est une variété symplectique, G est un groupe symplectique et tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$ est son propre moment.

Remarque 1: remplaçant η par $a^{-1} \cdot \eta$ dans (19), cette formule donne :

$$\psi(\eta) = Ad^*(a)\, \psi'(\eta) + \theta(a) \ ,$$

où $\psi \mapsto \psi' = a \cdot \psi$ est l'action induite par celle de G sur $\mathcal{N}$. Il vaut la peine d'observer que ce n'est rien d'autre que (17) avec $\mu = \psi(\eta)$ et $\mu' = \psi'(\eta)$. Dans ce sens, **les valeurs de l'application moment sont juste les composantes des G-tenseurs moments** (d'où le nom).

6.3 Forme présymplectique factorisée

Toute connexion d'Ehresmann sur le fibré principal $\mathcal{F}$ peut, de manière équivalente, être définie par un champ de 1-formes $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathcal{F}$ à valeur dans $\mathfrak{g}$, verticale, Ad-équivariante et telle que $\tilde{\Gamma}(Z \cdot f) = Z$. En accord avec le produit de dualité (15), on peut mettre moments et connections en dualité :

$$\mu\,\tilde{\Gamma} = K\,\Gamma_A + Tr\,(L\,\Gamma) \ .$$

ce qui suggère d'introduite la 2-forme factorisée :

$$\omega = \frac{1}{2}\, d\mu \wedge \tilde{\Gamma} \ , \tag{20}$$

produit extérieur de la 1-forme $d\mu$ à valeur dans $\mathfrak{g}^*$ et de la 1-form $\tilde{\Gamma}$ à valeur dans $\mathfrak{g}$, donc une 2-forme à valeur scalaire. On montre alors dans [2] que :

- la restriction à l'orbite $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ de la projection $\eta = (\mu, f) \mapsto \mu$ est une submersion,
- sur chaque orbite, ω est l'image réciproque par $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ de la forme symplectique du théorème de Kirillov-Kostant-Souriau et elle est invariante par G,
- $\psi_{\boldsymbol{\mu}}$ est une application-moment et $\psi_{\boldsymbol{\mu}} \circ L_a = Ad^*(a)\, \psi_{\boldsymbol{\mu}} + \theta(a)$,
- Les équations du mouvement sont :

$$d\eta \in Ker(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\nabla}_{dX}\mu = d\,\mu + ad^*(\tilde{\Gamma})\mu - \iota(\tilde{\Gamma})\,(D\theta(e)) = 0 \ , \tag{21}$$

Il est intéressant de remarque que, si le dernier terme est nul, l'équation n'est rien d'autre que l'équation d'Euler-Poincaré [6]. En fait, (21) généralise cette équation quand la classe de cohomologie symplectique du groupe n'est pas nulle, notamment dans le cas important du groupe de Galilée.

6.4 Application à la mécanique classique

Pour le groupe de Galilée, le produit de dualité (15) s'écrit :

$$\mu\, Z = l \cdot d\varpi - q \cdot du + p \cdot dk - e\, d\tau_0 \ .$$

La forme la plus générale de l'action (17) est alors :

$$p = R\,p' + m\,u, \qquad q = R\,(q' - \tau_0\,p') + m\,(k - \tau_0\,u)\;, \tag{22}$$

$$l = R\,l' - u \times (R\,q') + k \times (R\,p') + m\,k \times u\;, \tag{23}$$

$$e = e' + u \cdot (R\,p') + \frac{1}{2}\,m \parallel u \parallel^2\;. \tag{24}$$

où l'invariant de l'orbite m intervenant dans le cocycle symplectique θ est la masse. La règle tensorielle révèle la signification physique des composantes du tenseur moment, la quantité de mouvement p, le passage q, le moment cinétique l et l'énergie e.

Les termes résultant de la classe non nulle de cohomologie symplectique du groupe de Galilée sont absolument nécessaires pour retrouver les équations en accord avec les observations expérimentales. Après quelques simplifications, on obtient touts calculs faits :

$$\dot{e} = g \cdot p, \qquad \dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times v)\;,$$

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{l} + \Omega \times l_0 = x \times\; m\,(g - 2\,\Omega \times v)\;.$$

On retrouve les équations du mouvement (11) sauf pour la conservation de la masse qui est remplacée par celle de l'énergie.

7 Conclusion

En analysant la structure géométrique sous-jacente de la mécanique, nous avons identifié trois types de tenseurs affines pertinents : le torseur (deux fois contravariant), le co-torseur (deux fois covariant), objets naturellement en dualité, et enfin le tenseur moment (une fois covariant et une fois contravariant), en dualité avec les générateurs infinitésimaux de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie.

References

[1] G. De Saxcé, C. Vallée, Affine Tensors in Mechanics of Freely Falling Particles and Rigid Bodies. Mathematics and Mechanics of Solid Journal, 17(4) (2011) 413–430 .

[2] G. de Saxcé, C. Vallée, Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua. Wiley-ISTE (2016)

[3] K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbañski, AV-differential geometry: Poisson and Jacobi structures. Journal of Geometry and Physics, 52 (2004) 398–446.

[4] V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic techniques in physics, Univ. Press:,Cambridge, USA, 1984.

[5] P. Libermann, C.-M. Marle, Symplectic Geometry and Analytical Mechanics, D. Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1987.

[6] H. Poincaré, Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique, C.R. Acad. Sci. Paris, Tome CXXXII, 7, (1901), 369–371.

[7] J.-M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, France, 1970.

[8] J.-M. Souriau, Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics, Birkhäuser Verlag, New York, USA, 1997.

[9] J.-M. Souriau, Milieux continus de dimension 1, 2 ou 3 : statique et dynamique, *Actes du* 13ème *Congrès Français de Mécanique, Poitiers-Futuroscope*, 1997, pp. 41–53.

[10] W. Tulczyjew, P. Urbański, J. Grabowski, A pseudocategory of principal bundles, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, 122 (1988) 66–72.