

# Une méthode front-tracking 2D conservative pour des écoulements multi-échelles polyphasiques

Mathilde Tavares<sup>a</sup>, Eric Chénier<sup>a</sup>, Stéphane Vincent<sup>a</sup>

a. Université Paris-Est Marne-La-Vallée, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME, UMR 8208 CNRS 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France,  
email :mathilde.tavares@u-pem.fr

## Résumé :

*La compréhension des écoulements polyphasiques est devenue un enjeu scientifique important dans la mesure ils sont présents dans de nombreuses applications industrielles ou environnementales comme la formation de spray ou le déferlement de vagues. Au cours des dernières années, des progrès majeurs ont été réalisés dans ce domaine et plusieurs approches ont été développées à cet effet. Parmi ces approches, on distingue la méthode de front-tracking où une chaîne de marqueurs est utilisée pour représenter l'interface sur une grille eulérienne fixe. Même si la gestion simultanée des grilles lagrangiennes et eulériennes complexifie l'implémentation de la méthode front-tracking, l'interface est explicitement connue à travers la chaîne de marqueurs, même pour des maillages eulériens grossiers. Nous décrivons ici une méthode de front-tracking 2D conservative pour des écoulements multi-échelles polyphasiques. Afin de valider cette méthode, nous avons suivi deux approches. Nous avons effectué une étude de convergence pour deux cas tests analytiques où l'interface est très fortement déformée. Nous avons également réalisé des comparaisons entre notre méthode de front-tracking et d'autres méthodes classiques de la littérature dans le but de montrer l'aptitude de chacune des approches à décrire correctement la dynamique d'une interface mobile.*

## Abstract :

*Understanding the dynamic of multiphase flows is of great scientific importance and remains a challenging task since they are involved in many industrial and environmental application such as spray formation, wave breaking or oil transportation. In past few years, major progress has been achieved in computing multiphase flows. The front-tracking approach is a class of method where a specific mesh of front is used to track explicitly the interface on a Eulerian fixed grid. Despite the difficulty of dealing with two grids, the sharpness of the front is always maintained even for under-resolved Eulerian grid making the front-tracking approach one of the most accurate methods to track interfaces. We describe here a two-dimensional conservative front-tracking method for multi-scale and multiphase flows. In order to validate the proposed front-tracking method, a complete convergence study is realized on two analytical test cases for which the interface is widely stretched and deformed and a comparison between different existing approaches and our front-tracking method is achieved to show its ability to track interfaces even for complex cases. The conservative front-tracking method computed in this work is shown to be able to describe interfaces with high accuracy even for under-resolved Eulerian grids.*

## Mots clefs : Front-tracking, écoulements polyphasiques, multi-échelle, conservation du volume, ordre de convergence

### 1 Introduction

Les écoulements polyphasiques sont présents dans de nombreuses études académiques et applications industrielles et environnementales. Les phénomènes de déferlement de vagues, d'atomisation de jet dans les moteurs ou de crise d'ébullition dans les échangeurs de chaleur sont, par exemple, des problèmes classiques de la mécanique des fluides impliquant la présence d'interfaces.

Même si la littérature sur les écoulements polyphasiques est vaste, leurs modélisations et la compréhension de la physique restent difficiles. De gros progrès ont cependant été réalisés au cours des dernières décennies dans la simulation de ce type d'écoulement. Lorsque le maillage est fixe et structuré (maillage eulérien de résolution des équations de Navier-Stokes), une approche de suivi d'interface consiste à capturer directement le taux de présence d'une phase dans la maille. La méthode Volume Of Fluid (VOF) [12, 7], dans laquelle l'interface est explicitement suivie par une fonction indicatrice dite de couleur, est l'une des méthodes les plus populaires parmi les approches eulériennes. La méthode Level-Set [5, 9] a été développée plus récemment, toujours dans une vision eulérienne : l'interface est représentée par le zéro d'une fonction régulière, dite de distance à l'interface. Ces méthodes ont l'inconvénient d'étaler l'interface et de ne pas tenir compte des structures de l'écoulement dont la taille caractéristique est plus petite ou de l'ordre de celle du maillage.

Les méthodes de suivi lagrangien de l'interface requièrent un maillage de celle-ci, et ont l'avantage d'être très précises même si leur mise en œuvre pour des écoulements tridimensionnels reste complexe. La méthode front-tracking [11, 8] est une classe de méthodes reposant sur le transport d'un ensemble de marqueurs sans masse, connectés entre eux pour former un élément (segment en 2D et triangle en 3D), et advectées de façon lagrangienne. L'un des avantages de cette méthode réside dans la connaissance explicite des chaînes de marqueurs au cours du temps, même lorsque elles engendrent une interface à une échelle inférieure à la maille. Cette approche nécessite de transférer des informations d'une grille à l'autre par des techniques d'interpolation par exemple, et son extension à des écoulements tridimensionnels peut s'avérer délicate.

Nous décrivons ici une méthode front-tracking bidimensionnelle, conservant la masse, pour des écoulements supposés incompressibles, multi-échelles et polyphasiques. Les aspects techniques majeurs de cette méthode seront présentés dans un premier temps. Nous considérerons ensuite deux cas tests analytiques pour lesquels l'interface est fortement étirée et déformée afin de montrer la capacité de la méthode front-tracking à décrire les interfaces même pour des cas complexes. Nous comparerons ensuite notre méthode à d'autres approches publiées dans la littérature.

### 2 Description de la méthode front-tracking

La méthode présentée ici est basée sur les travaux de Grétar Tryggvason et *al.* [11] concernant la méthode front-tracking pour des écoulements polyphasiques isothermes.

Dans notre méthode, l'interface est approchée par un ensemble de segments connectés deux à deux à travers un marqueur commun. Ce choix de discrétisation devrait permettre de préserver l'ordre attendu de 2 du schéma numérique et permet une extension à des surfaces bidimensionnelles définies par des

éléments triangulaires. Contrairement à la méthode front-tracking développée par Shin et Juric [8] dans laquelle chaque élément de la surface front-tracking ne connaît que ses marqueurs, nous avons également choisi de conserver les informations des éléments voisins pour calculer les courbures locales.

## 2.1 Changement de topologie de l'interface

Lorsque l'interface subit d'importantes déformations, les marqueurs tendent à s'éloigner les uns des autres ou à fortement se rapprocher les uns des autres. Pour conserver une bonne résolution de l'interface, nous devons conserver un écart à peu près constant entre les marqueurs au cours du temps. Selon un critère régi par la taille des mailles eulériennes  $\Delta x$ , des éléments sont supprimés ou ajoutés de sorte à conserver de l'ordre de deux à quatre éléments par maille (voir [11]). Ainsi, si la taille  $ds$  d'un élément vérifie  $ds > \Delta x$ , alors il est subdivisé. Inversement, si  $ds < \Delta x/4$ , l'élément doit être supprimé.

Le processus d'ajout d'un élément consiste à insérer un nouveau marqueur au milieu de l'élément de grande taille pour former deux éléments plus petits ; les connexions locales entre éléments doivent être mises à jours.

La suppression d'un élément dépend de sa taille et également de la courbure locale de l'interface. Lorsque les critères de taille et de courbure sont satisfaits, l'élément est supprimé et les connexions locales sont redéfinies.

Une autre difficulté majeure de la méthode de front-tracking est la gestion du changement de topologie qui est rencontrée lors d'une rupture de l'interface (séparation d'une chaîne de marqueurs en deux chaînes distinctes) ou une coalescence entre deux interfaces (fusion de deux chaînes distinctes). Ces changements sont également régis par la taille de la maille eulérienne  $\Delta x$  : si la distance  $ds$  entre deux marqueurs appartenant à deux éléments distincts est inférieure à  $\Delta x/5$  (voir [10]), il y a rupture ou coalescence de l'interface. Ainsi, selon ce critère, une chaîne de marqueur est séparée en deux chaînes distinctes (rupture) ou au contraire deux chaînes très proches sont connectées pour ne plus former qu'une seule chaîne (coalescence).

## 2.2 Transport de la surface front-tracking

Considérons une surface lagrangienne constituée de  $N$  marqueurs de coordonnées  $\mathbf{x}_i$  et de vitesses  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Chaque marqueur est transporté par le champ de vitesse local eulérien  $\mathbf{V}$  selon l'équation de transport classique :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{V}_i \quad (1)$$

La position des marqueurs est solution d'une équation différentielle du premier ordre, résolue avec des variables lagrangiennes. La vitesse  $\mathbf{V}_i$  est évaluée sur les marqueurs par interpolation des vitesses calculées aux nœuds de la grille eulérienne. L'équation (1) est intégrée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, combiné à une méthode d'extrapolation temporelle d'ordre 2 d'Adams-Bashforth,  $\mathbf{V}_i^{n+1} = 2\mathbf{V}_i^n - \mathbf{V}_i^{n-1}$ , pour préserver l'ordre temporel du schéma global. Pour déterminer la vitesse  $\mathbf{V}_i$  du marqueur, nous avons utilisé la méthode PERM (Parabolic Edge Reconstruction Method) [3] permettant de reconstruire une vitesse à divergence nulle aux nœuds à partir des vitesses de la grille eulérienne. Cette méthode est basée sur un calcul de la divergence au centre des mailles eulériennes et sur les nœuds du maillage. La vitesse reconstruite est continue, et ses composantes sont paraboliques par morceaux dans la direction du vecteur vitesse, et linéaires par morceaux dans la direction transverse. Dans une maille donnée, la divergence reconstruite est donc bilinéaire et consistante avec la divergence discrète de la maille des vitesses. Pour un problème à masse volumique constante, la divergence de la vitesse recons-

truite est nulle : le volume de fluide doit être conservé.

## 2.3 Conservation du volume

Comme mentionné précédemment, le volume engendré par les éléments d'une interface doit être conservé dans un écoulement incompressible. Même si le champ de vitesse interpolé par PERM sur les marqueurs est à "divergence nulle", son utilisation dans la méthode de Runge-Kutta ainsi que la représentation linéaire par morceaux de l'interface ne permettent pas de conserver parfaitement le volume délimité par l'interface. Pour préserver le volume initial, la position des marqueurs est très légèrement corrigée après l'étape de transport. Une des méthodes utilisées dans nos travaux est la suivante. En notant  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}'_i$  les positions du marqueur  $i$  avant et après l'étape de transport,  $\mathbf{x}''_i$  sa position corrigée,  $\mathbf{n}_i$  le vecteur directeur de la droite bissectrice entre les deux éléments adjacents au marqueur  $i$  après le transport, normalisé et sortant de l'interface, nous définissons la relation

$$\mathbf{x}''_i - \mathbf{x}'_i = \alpha \mathbf{P}_i \text{ avec } \mathbf{P}_i = ((\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (2)$$

avec  $\alpha$  un paramètre réel à ajuster. La figure (1) illustre le transport et la correction appliquée au marqueur  $i$ . Le coefficient  $\alpha$ , commun à tous les marqueurs d'une même interface, est ajusté en écrivant la

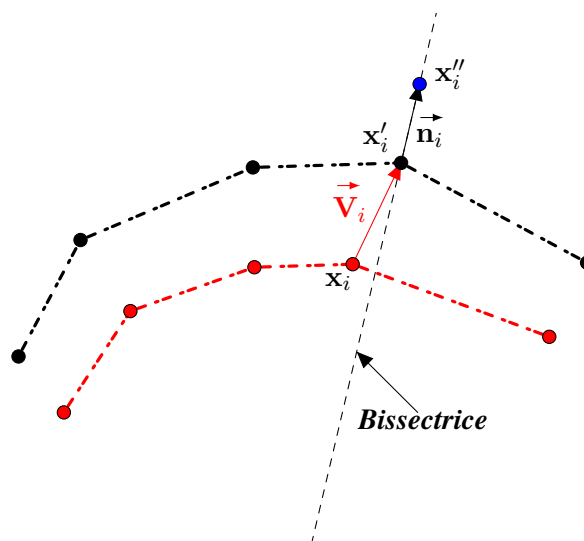


FIGURE 1 – Correction de la surface front-tracking après l'étape de transport pour conserver le volume (le marqueur bleu  $\mathbf{x}''_i$  est obtenu après translation du marqueur noir  $\mathbf{x}'_i$  le long de la droite bissectrice)

conservation du volume entre l'étape corrigée et l'instant initial. L'intérêt de cette méthode est qu'elle corrige la position des marqueurs proportionnellement à leur déplacement physique, produit de la vitesse par le pas de temps.

## 2.4 Calcul de la courbure locale

Pour une surface front-tracking, une estimation de la courbure locale  $\kappa_i$ , au marqueur  $i$ , peut être obtenue en calculant le rayon du cercle  $R_i$ , de centre  $\mathbf{x}_{O_i}$ , passant par  $i$  et les deux marqueurs adjacents. La courbure s'écrit alors simplement  $\kappa_i = \text{signe}[(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{O_i}) \cdot \mathbf{n}_i] \times 1/R_i$ , où  $\text{signe}[x]$  désigne le signe de  $x$ . La figure (2) illustre la détermination du rayon de courbure local dans le cas d'une interface circulaire. Cette méthode a été comparée à l'évaluation de la courbure moyenne sur un élément par le biais du

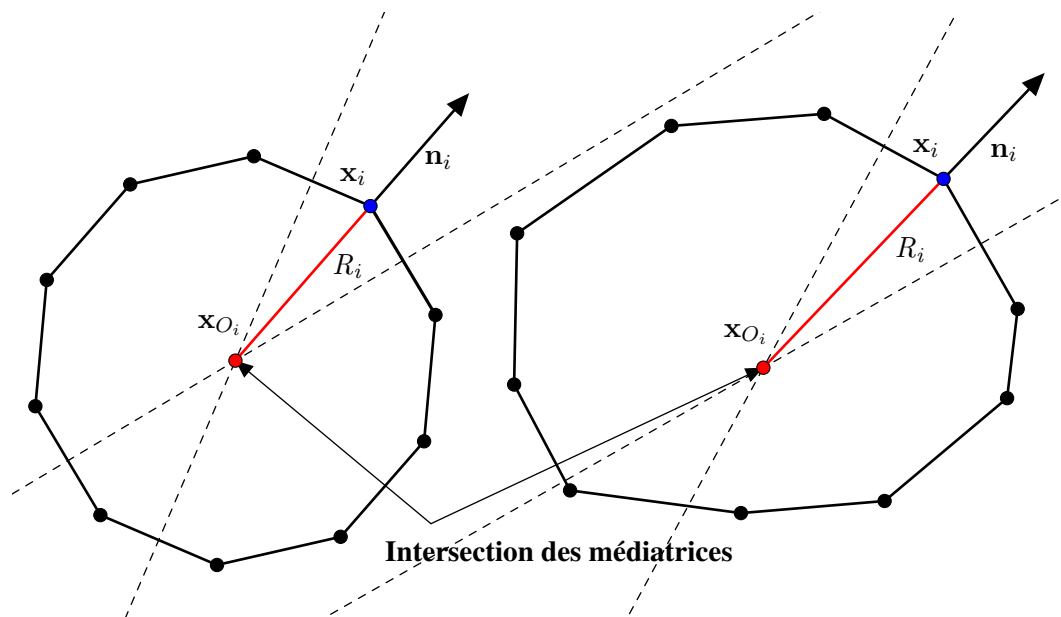


FIGURE 2 – Calcul de la courbure  $\kappa$  : le rayon de courbure locale au marqueur bleu est la distance entre celui-ci et l'intersection entre les deux médiatrices des deux éléments voisins issus de ce marqueur. Dans le cas d'une interface circulaire (à gauche sur la figure), l'intersection est le centre du cercle et le rayon de courbure est donc exact.

théorème de Frenet [8]. Cette technique, qui ne sera pas détaillée ici, semble moins précise et implique que la courbure est recherchée sur l'élément et non sur le marqueur comme nous en avons fait le choix.

### 3 Validation de la méthode front-tracking

Les cas de validation présentés ci-dessous ont pour objectif de montrer l'aptitude de notre méthode front-tracking à décrire correctement l'interface, même lorsque celle-ci est fortement étirée et déformée. Nous comparerons également notre méthode front-tracking à d'autres méthodes de suivi d'interface qui sont connues pour assurer une bonne évaluation de la courbure de l'interface ou pour préserver le volume dans des situations où le maillage eulérien est grossier. Le tableau (1) synthétise les différentes méthodes qui seront étudiées dans cette partie avec leurs références, ainsi que les abréviations utilisées par la suite pour se référer à ces méthodes. Les deux cas tests discutés sont la déformation d'un disque dans un champ tourbillonnaire et l'écoulement potentiel impactant une plaque plane.

Le pas de temps d'intégration de la méthode de Runge-Kutta dépend du pas de maillage eulérien  $\Delta x$ . Dans ce travail nous avons choisi  $\Delta t = \Delta x/2$ .

#### 3.1 Déformation d'un disque par un tourbillon (Serpentin)

Ce problème introduit par Bell, Collela et Glaz [1] consiste à transporter dans un domaine carré  $[0; 1 m] \times [0; 1 m]$ , un cercle de rayon  $0,15 m$ , centré en  $(0,5 m; 0,75 m)$ , par le champ de vitesse :

$$u = -2\sin(\pi x)^2 \cos(\pi y) \sin(\pi y) \quad [u] = m/s \quad (3)$$

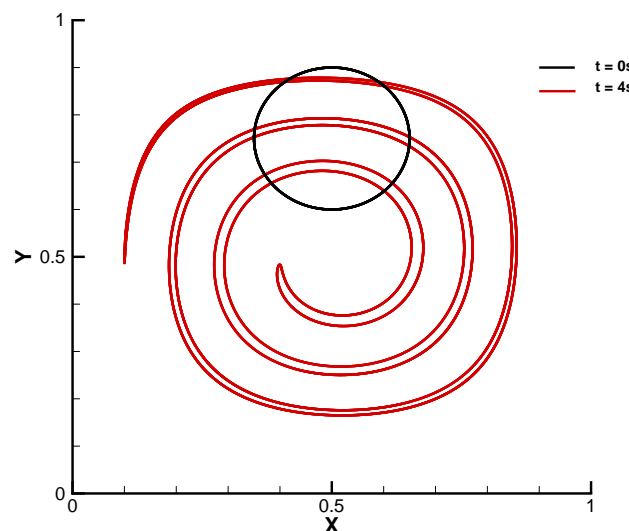
$$v = 2\sin(\pi y)^2 \cos(\pi x) \sin(\pi x) \quad [v] = m/s \quad (4)$$

Ce champ de vitesse possède les caractéristiques d'un tourbillon centré en  $(0,5 m; 0,5 m)$  : il va déformer le cercle initial pour engendrer un filament s'étirant indéfiniment et qualifié de "serpentin". Il s'agit

Méthode	Abréviation	Référence
Méthode Volume of Fluid avec reconstruction PLIC	VOF-PLIC	[12, 7]
Méthode Level-Set avec schéma WENO sous forme conservative (poids optimaux) pour la discrétisation des termes spatiaux dans l'équation d'advection de $\Phi$	LSET-WENO	[5, 4]
Méthode hybride de couplage particules/Level-Set	LSET-PART	[10]
Méthode Front-tracking sans connectivité, avec reconstruction des lignes de niveau	FTR-LCR	[8]
Méthode Front-tracking avec connectivité et méthode PERM pour l'interpolation des vitesses avec schéma temporel RK2	FTR-PERM	Notre méthode

TABLE 1 – Tableau descriptif des méthodes étudiées dans ce chapitre

d'un cas difficile où l'interface subit d'importantes déformations et peut devenir sous-maille (d'épaisseur plus faible que la maille eulérienne). Pour conserver un écart régulier entre les marqueurs de la surface front-tracking, la procédure d'enrichissement en marqueurs est très régulièrement sollicitée. L'interface à l'instant initial et à l'instant  $t = 4 s$  est illustrée sur la figure (3).

FIGURE 3 – Déformation du cercle par le tourbillon (Eqs. 3-4). Solution initiale (noir) et à  $t = 4 s$  (rouge).

Pour évaluer l'erreur commise pour une interface avec une taille d'éléments donnée, une solution de référence a été définie. Elle a été calculée à l'aide d'une intégration temporelle de l'équation (1) par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 avec le champ de vitesse analytique (Eqs. 3-4), un pas de temps  $\Delta t = \Delta x/2$ , pour  $\Delta x = 1/4096$ . Cette petite valeur de  $\Delta x$  conditionne la taille maximale des éléments qui est au plus de  $\Delta x/100$  ( $\Delta x/2$  dans les autres cas). La qualité d'une solution est évaluée en mesu-

rant la distance entre les marqueurs et la front-tracking de référence. L'erreur utilise une norme discrète  $\|\cdot\|_{L_1}$  qui est définie par la somme des distances sur l'ensemble des marqueurs, divisée par le nombre de marqueurs de l'interface.

Le tableau (2) présente les erreurs moyennes spatiales en norme  $\|\cdot\|_{L_1}$  à la référence avec les ordres de convergence respectifs entre deux solutions calculées sur des maillages consécutifs, pour les grilles  $\Delta x = 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256$  et  $1/512$ . Ces erreurs ont été déterminées en utilisant différentes méthodes d'interpolation des vitesses de la grille eulérienne pour évaluer la vitesse des marqueurs : la méthode PERM [3] décrite ci-avant, l'interpolation bilinéaire basée sur les nœuds de la grille eulérienne ou la méthode de Peskin [6], utilisée classiquement dans les approches front-tracking [8, 11]. Pour ces simulations, l'algorithme de conservation du volume n'a pas été activé. Pour chacune des trois méthodes,

$\Delta x$	PERM		BILINEAIRE		PESKIN	
	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre
1/16	8,77E-04	-	4,58E-03	-	7,63E-03	-
1/32	1,88E-04	2,22	1,17E-03	1,97	3,01E-03	1,34
1/64	4,75E-05	1,98	2,94E-04	1,99	7,63E-04	1,98
1/128	1,17E-05	2,02	7,33E-05	2,01	1,90E-04	2,01
1/256	2,87E-06	2,03	1,84E-05	1,99	4,76E-05	1,99
1/512	7,24E-07	1,99	4,61E-06	2,00	1,19E-05	2,00

TABLE 2 – Erreur moyenne sur les positions des sommets pour un calcul front-tracking avec la méthode PERM [3], bilinéaire, ou Peskin [6], pour l'interpolation des vitesses et sans utiliser la méthode de conservation du volume

l'erreur moyenne sur les solutions diminue en fonction de la grille eulérienne à l'ordre 2 en norme  $\|\cdot\|_{L_1}$ , à l'exception de la méthode Peskin sur un maillage grossier. La méthode la plus précise est celle utilisant PERM, puis l'interpolation bilinéaire et enfin Peskin. L'activation de la conservation du volume n'affecte pas les résultats.

En terme de conservation du volume, les méthodes présentées dans le tableau (1) sont comparées sur la figure (4) comme cela fut réalisé précédemment par Trontin *et al.* [10]. La méthode FTR-LCR est strictement conservative lorsque la conservation du volume est utilisée. Sans activation de la conservation du volume, notre méthode FTR-PERM perd moins de 0,1% du volume pour le maillage  $64^2$  à l'instant final de  $t = 3$  s. Les méthodes VOF-PLIC et LSET-PART gagnent respectivement 10% et 4% du volume alors que le volume délimité par l'interface calculée par la méthode LSET-WENO tend à disparaître. La conservation du volume pour notre méthode FTR-PERM est très bonne, même pour des maillages grossiers ; en activant l'algorithme de conservation du volume (Sec. 2.3), celui-ci se conserve évidemment intégralement au cours du temps.

Les figures (5a) et (5b) montrent l'effet de l'activation de la conservation de la masse sur les solutions calculées pour le maillage  $\Delta x = 1/32$  avec les méthodes FTR-LCR et FTR-PERM dans le cas du serpent. Avec la méthode FTR-PERM, les solutions se superposent parfaitement avec ou sans conservation de la masse alors que pour la méthode FTR-LCR, le serpent a tendance à revenir à son état initial circulaire lorsque la conservation de la masse est activée. Même si la méthode FTR-LCR peut conserver parfaitement le volume, comme notre méthode FTR-PERM, la méthode FTR-LCR induit des déformations ou modifications non physiques de l'interface, ce qui n'est pas le cas avec notre approche FTR-PERM.

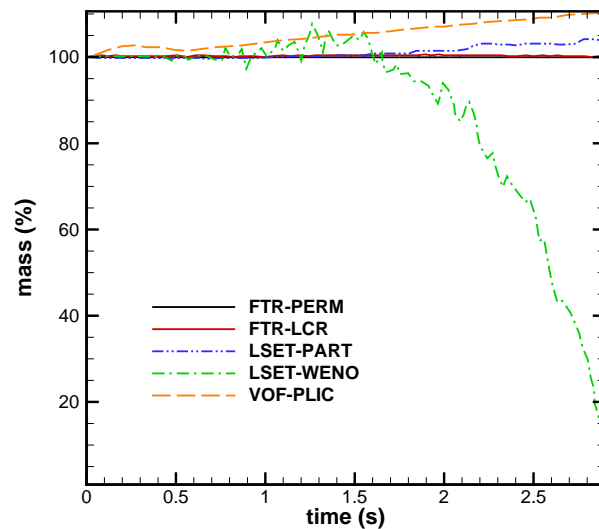


FIGURE 4 – Évolution de la masse (volume) au cours du temps pour le maillage  $\Delta x = 1/64$ . Comparaison des méthodes FTR-PERM, FTR-LCR, LSET-WENO, LSET-PART et VOF-PLIC

### 3.2 Écoulement potentiel impactant une plaque plane

Nous nous intéressons ici à la modification de la topologie de l'interface lors d'un étirement dans une direction de l'espace. Le champ de vitesse correspond à un écoulement potentiel impactant perpendiculairement une surface plane :

$$u(x, y) = 2a(x - x_a) \quad [u] = m/s \quad (5)$$

$$v(x, y) = -2a(y - y_a) \quad [v] = m/s \quad (6)$$

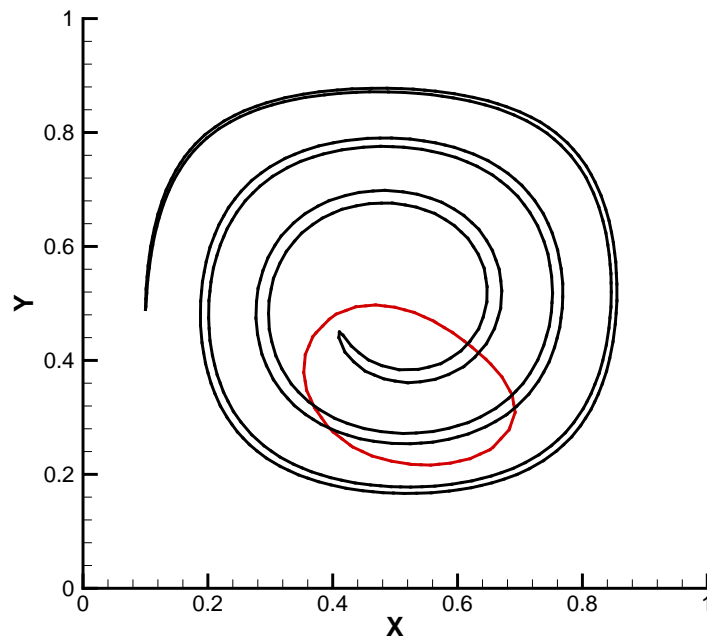
avec  $x_a = 1 \text{ m}$  et  $y_a = 0,75 \text{ m}$  les coordonnées du point d'arrêt et  $a = 1 \text{ s}^{-1}$ . La solution analytique est donnée par la relation suivante :

$$\left( \frac{x(t) - x_a}{R_0 \exp(2at)} \right)^2 + \left( \frac{y(t) - y_c(t)}{R_0 \exp(-2at)} \right)^2 = 1 \quad (7)$$

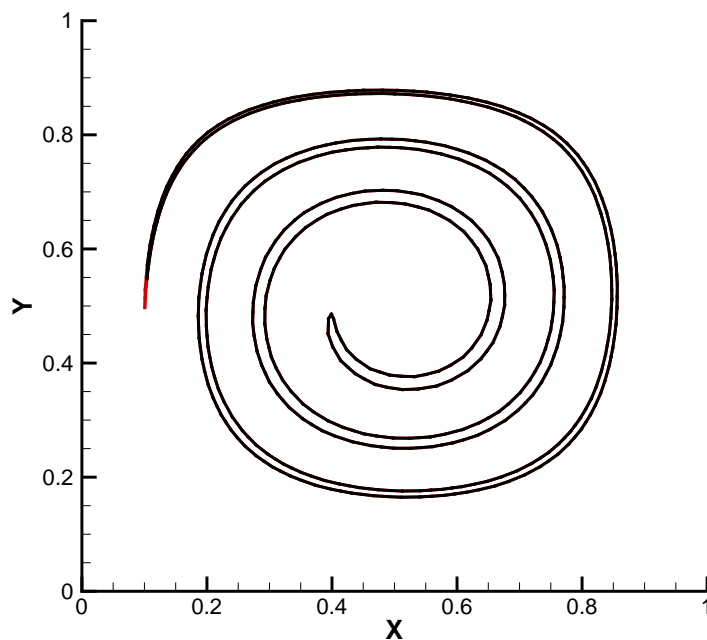
Il s'agit de l'équation d'une ellipse centrée en  $(x_a, y_c(t))$ , de demi grand axe  $R_0 \exp(2at)$  et de demi petit axe  $R_0 \exp(-2at)$ . Une forme circulaire initialement centrée à l'abscisse du point d'arrêt est donc advectée sous la forme d'une ellipse dont l'ordonnée du centre et la longueur des axes sont variables au cours du temps. La figure 6 montre l'évolution d'une interface initialement circulaire dans ce champ potentiel après un temps de  $t = 0,75 \text{ s}$ . L'intérêt de cette étude réside dans la possibilité de comparer les solutions numériques à une solution analytique et d'évaluer l'aptitude de la méthode FTR-PERM à représenter correctement l'interface, principalement dans le cas le plus discriminant où l'ellipse est très aplatie (elle peut devenir sous-maille pour les maillages eulériens les plus grossiers).

La figure (7) présente la solution exacte et les solutions numériques obtenues à l'instant  $t = 0,75 \text{ s}$  avec la méthode FTR-PERM sans conservation du volume, pour différents maillages  $\Delta x$ . Pour rappel, le pas de temps d'intégration du mouvement est  $\Delta t = \Delta x/2$  et la taille maximale d'un élément est  $\Delta x/2$ . Nous constatons que dans les zones de faible courbure, l'écart à la solution analytique est petit,





(a) Serpentin à  $t = 4s$ , méthode FTR-LCR,  $\Delta x = 1/32$ , sans conservation de la masse (noir) et avec conservation de la masse (rouge).



(b) Serpentin à  $t = 4s$ , méthode FTR-PERM,  $\Delta x = 1/32$ , sans conservation de la masse (noir) et avec conservation de la masse (rouge).

FIGURE 5 – Déformation du cercle par un tourbillon "serpentin" (Eqs. 3-4), comparaison des solutions obtenues à  $t = 4s$  avec les méthodes FTR-LCR et FTR-PERM pour le maillage  $\Delta x = 1/32$  avec activation de la conservation de la masse (rouge) ou sans conservation de la masse (noir).

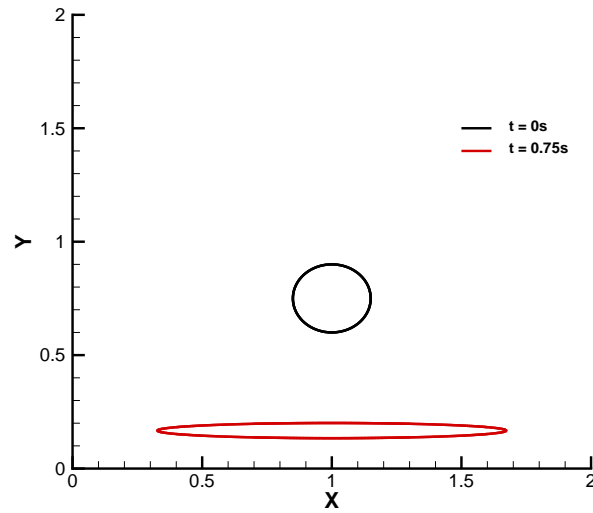


FIGURE 6 – Déformation d'une interface dans un écoulement potentiel impactant une plaque plane (Eqs. 5-6) : interface initiale circulaire en noir et solution à l'instant  $t = 0,75\text{ s}$  en rouge.

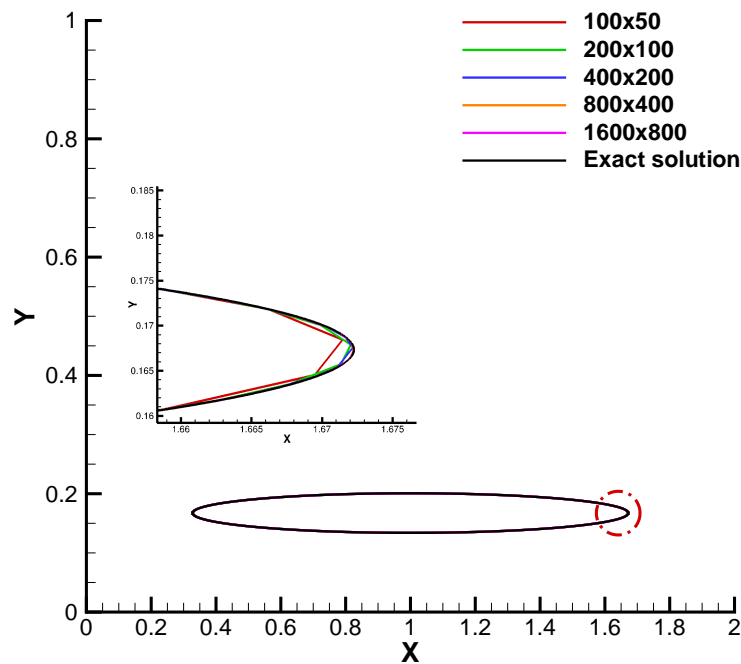


FIGURE 7 – Solution numérique à l'instant  $t = 0,75\text{ s}$  dans le cas de l'impact d'une interface circulaire placée dans l'écoulement (Eqs. 5-6). Solution exacte et solutions numériques pour  $\Delta x = 1/50, 1/100, 1/200, 1/200$  et  $1/800$ . L'algorithme de conservation du volume est désactivé.

même pour le maillage le plus grossier ( $\Delta x = 1/50$ ). Dans les zones de forte courbure, la sensibilité au maillage est plus importante.

Le tableau (3) donne les erreurs pour les positions et les courbures entre la solution analytique et les

Erreur moyenne sur les positions								
Méthode	Sans conservation du volume				Avec conservation du volume			
	FTR-PERM		FTR-LCR		FTR-PERM		FTR-LCR	
$\Delta x$	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre
1/50	1,33E-04	-	1,26E-04	-	1,25E-04	-	1,26E-04	-
1/100	3,34E-05	2,00	3,14E-05	2,01	3,05E-05	2,03	5,92E-04	-2,23
1/200	8,42E-06	1,99	7,91E-06	1,99	7,30E-06	2,06	4,43E-04	0,42
1/400	2,11E-06	2,00	1,97E-06	2,01	1,86E-06	1,97	2,38E-04	0,90
1/800	5,29E-07	1,99	4,91E-07	2,00	4,60E-07	2,02	-	-

Erreur relative entre courbure analytique et courbure calculée								
Méthode	Sans conservation du volume				Avec conservation du volume			
	FTR-PERM		FTR-LCR		FTR-PERM		FTR-LCR	
$\Delta x$	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre	Erreur (L1)	Ordre
1/50	3,02E-01	-	7,43E-01	-	3,02E-01	-	7,43E-01	-
1/100	1,99E-01	0,60	6,14E-01	0,27	1,99E-01	0,60	9,38E-01	-0,34
1/200	1,82E-01	0,13	5,23E-01	0,23	1,82E-01	0,13	9,77E-01	-0,06
1/400	1,03E-01	0,82	4,39E-01	0,25	1,03E-01	0,82	1,10E+00	-0,18
1/800	6,90E-02	0,58	3,89E-01	0,17	6,90E-02	0,58	-	-

TABLE 3 – Comparaison entre les solutions numériques (méthodes FTR-PERM et FTR-LCR) et la solution analytique de l'ellipse pour les positions et les courbures à l'instant  $t = 0,75$  s, et les maillages  $\Delta x = 1/50, 1/100, 1/200, 1/400$  et  $1/800$ , avec ou sans conservation du volume

solutions numériques obtenues avec différents maillages, pour les méthodes FTR-PERM et FTR-LCR avec ou sans activation de la conservation du volume. Sans conservation du volume, les deux méthodes convergent à l'ordre 2 avec des niveaux d'erreur comparables. Si le contrôle du volume est activé, nous constatons que notre méthode FTR-PERM converge toujours à l'ordre 2 avec des niveaux d'erreur aussi bas que dans le cas sans conservation du volume. En revanche, la méthode FTR-LCR converge très difficilement et la précision des résultats en est très affectée. Dans cette dernière méthode, la conservation du volume est obtenue par identification des lignes de niveau [8] ce qui semble fortement augmenter l'erreur sur la position des marqueurs de la surface front-tracking.

En ce qui concerne les courbures moyennes, les niveaux d'erreur sont toujours plus faibles avec notre méthode FTR-PERM qu'avec la méthode FTR-LCR, que la conservation du volume soit activée ou non. Les ordres de convergence sur la courbure sont de l'ordre de 0,5. Ces faibles ordres de convergence sont liés à la mauvaise approximation des très fortes courbures aux extrémités de l'interface du fait d'éléments trop grands. La figure 8 illustre la variation de l'erreur relative de la courbure à la solution exacte, en fonction du rapport entre la taille de l'élément local et le rayon de courbure pour pour 3 marqueurs sélectionnés sur l'ellipse (extrémité gauche, angle de 45° et haut de l'ellipse). La qualité de l'approximation de la courbure n'est pas liée à la taille de l'élément, mais à sa valeur adimensionnée par le rayon de courbure. Plus le rayon de courbure est faible (courbure importante), plus la taille de l'élément doit être petite. Ainsi, notre méthode de calcul de la courbure converge bien à l'ordre 2 dès que l'élément est environ 2 fois plus petit que le rayon de courbure.

## 4 Conclusion

La méthode de front-tracking développée dans ce travail est adaptée pour garantir une bonne description de l'interfaces même dans des cas complexes où celle-ci est fortement déformée et étirée, ou de

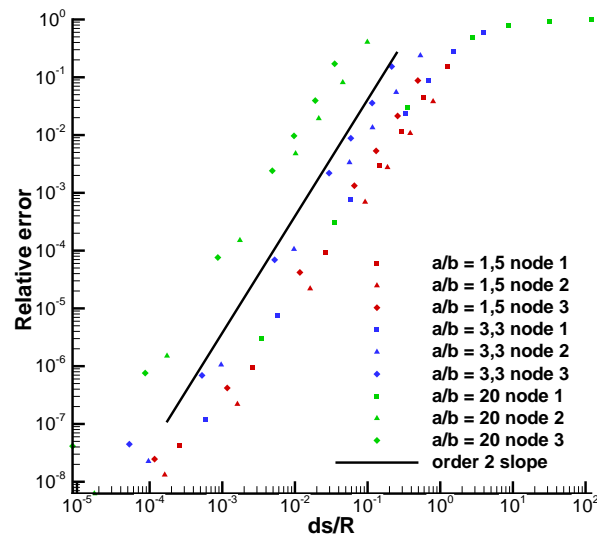


FIGURE 8 – Variation de l’erreur relative à la solution exacte de la courbure en fonction de  $ds/R$ , le rapport entre la taille de l’élément local et le rayon de courbure, pour différentes ellipses définies par leur rapport grand axe sur petit axe ( $a/b$ ) et 3 points particuliers : le point 1 est situé dans l’alignement du grand axe, le point 2 est à  $45^\circ$  et le point 3 est situé dans l’alignement du petit axe

taille inférieure à la maille eulérienne  $\Delta x$ . Nous avons également montré que, contrairement à d’autres méthodes de la littérature, l’ordre de notre méthode ne se dégrade pas lorsque l’algorithme de conservation de la masse est activé. De plus, cet algorithme corrige la position de l’interface sur la base du déplacement physique. Cette condition permet, par exemple, qu’une portion d’une interface de vitesse nulle ne soit pas déplacée par l’algorithme de correction du volume. Enfin dans le cas d’écoulements polyphasiques, une bonne connaissance de la courbure locale est une donnée fondamentale pour évaluer correctement le saut des contraintes normales à l’interface dans l’équation de quantité de mouvement. Pour cela, nous avons montré que notre calcul de la courbure converge bien à l’ordre 2, conformément au reste de l’algorithme.

Bien que la méthode PERM utilisée pour la reconstruction des vitesses des marqueurs s’avère très précise dans un champ de vitesse régulier, elle deviendra probablement moins performante pour les écoulements polyphasiques dans lesquels les variations de la vitesse de part et d’autre de l’interface ne sont plus continues. Pour répondre à cette difficulté, nous travaillons actuellement sur la reconstruction de la vitesse des marqueurs en utilisant les conditions de saut à travers l’interface [2]. L’extension à des interfaces bidimensionnelles et la parallélisation de cette méthode sont également en cours de développement.

## Références

- [1] J. Bell, P. Colella, and H. Glaz. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 85(2) :257 – 283, 1989.
- [2] J.M. Delhayé. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. local instant formulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 1(3) :395 – 409, 1974.
- [3] R. McDermott and S.B. Pope. The parabolic edge reconstruction method (perm) for lagrangian particle advection. *Journal of Computational Physics*, 227(11) :5447 – 5491, 2008.
- [4] S. Osher and R. Fedkiw. Level set methods : An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :463 – 502, 2001.
- [5] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12 – 49, 1988.
- [6] C. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25(3) :220 – 252, 1977.
- [7] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31 :567–603, January 1999.
- [8] S. Shin and D. Juric. Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity. *Journal of Computational Physics*, 180(2) :427 – 470, 2002.
- [9] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1) :146 – 159, 1994.
- [10] P. Trontin, S. Vincent, J.L. Estivalezes, and J.P. Caltagirone. A subgrid computation of the curvature by a particle/level-set method. application to a front-tracking/ghost-fluid method for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 231(20) :6990 – 7010, 2012.
- [11] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :708 – 759, 2001.
- [12] D. Youngs. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical methods for fluid dynamics*, 24(2) :273–285, 1982.