

Modélisation mathématique des films minces avec applications aux transferts de chaleur

M. CHHAY^a, D. DUTYKH^b, M. GISCLON^b, C. RUYER-QUIL^a

a. LOCIE UMR 5271 Université Savoie Mont Blanc, 73376 Le Bourget-du-lac
ruyerqc@univ-smb.fr, marx.chhay@univ-smb.fr

b. LAMA UMR 5127 Université Savoie Mont Blanc, 73376 Le Bourget-du-lac
Denys.Dutykh@univ-smb.fr, gisclon@univ-smb.fr

Résumé :

Nous présentons un modèle de transfert thermique à travers un film liquide s'écoulant le long d'une paroi verticale. Ce nouveau modèle est formellement obtenu à partir d'un développement asymptotique en introduisant des variables adimensionnées bien choisies. Dans notre étude, le petit paramètre est le rapport épaisseur sur longueur caractéristique des ondes. Une nouvelle solution de Nusselt est obtenue en prenant en compte les variations hydrodynamiques de la surface libre et les contributions des termes provenant des effets de variations de la température. Les transferts de fluide et de chaleur sont couplés à travers l'effet de Marangoni et des effets de viscosité. Même si ces effets ont été considérés avant séparément, un modèle couplé est présenté ici.

Abstract :

We present a model of heat transfer occurring through a liquid film flowing down a vertical wall. This new model is formally derived using the method of asymptotic expansions by introducing appropriately chosen dimensionless variables. In our study, the small parameter, known as the film parameter, is chosen as the ratio of the flow depth to the characteristic wavelength. A new Nusselt-type solution is obtained, taking into account the hydrodynamic free surface variations and the contributions of the higher order terms coming from temperature variation effects. The flow and heat transfer are coupled through Marangoni and temperature dependent viscosity effects. Even if these effects have been considered separately before, here a fully coupled model is proposed.

Mots clefs : Films liquides ; transfert de chaleur ; modèle asymptotique ; équations de Navier-Stokes incompressibles ; système hyperbolique ; solution de Nusselt

1 Introduction

Les écoulements de films liquides minces peuvent être abordés de manière similaire aux problèmes hydrauliques classiques des écoulements à surface libre dans le cadre des formulations de type Saint-Venant [1]. En effet, un film liquide, c'est-à-dire un écoulement laminaire à surface libre et de faible

épaisseur, est sujet à une dynamique ondulatoire avec la formation d'ondes de grandes longueurs par rapport à l'épaisseur du film. Une réduction de la complexité du problème peut être obtenue dans le cadre d'une asymptotique "ondes longues" avec l'introduction de $\epsilon = h/\lambda$, h étant l'épaisseur du film et λ la longueur des ondes. Cette asymptotique est semblable à l'approximation "eau peu profonde".

2 Formulation du problème

Dans cet article, nous nous intéressons à la dynamique des films liquides tombants grâce au développement asymptotique en introduisant un petit paramètre ϵ qui compare la longueur des ondes à l'épaisseur du film. Les coordonnées x , z et le temps t sont des variables lentes *i.e.* $\partial_{x,z,t} \propto \epsilon$, pendant que la variable y est une variable rapide *i.e.* $\partial_y = \mathcal{O}(1)$. Il est ainsi possible d'éliminer la variable rapide y et d'obtenir un modèle réduit d'équations qui décrit l'évolution lente du film dans un domaine spatial dont la dimension est réduite de 3D à 2D.

Le plan du papier est le suivant. Dans la section suivante, les équations adimensionnées sont données. Puis, un nouveau modèle est proposé : ce modèle asymptotique associé préserve la conservativité des équations moyennées. Il prend en compte le couplage entre le transfert de chaleur et l'hydrodynamique en supposant que le coefficient de tension de surface et la viscosité dynamique sont linéairement dépendants de la température du fluide T . A notre connaissance, l'effet de thermocapillarité et la dépendance de la viscosité par rapport à la température ont été considérés séparément mais leur couplage semble avoir été étudié seulement dans [2].

2.1 Le problème

Nous considérons un film liquide anisotherme tombant sur une plaque verticale. Le fluide est supposé être dans un espace à deux dimensions d'espace : l'axe de direction de l'écoulement x et l'axe de direction transverse à l'écoulement z . Le domaine du liquide Ω_t est délimité par un mur vertical $z = 0$ et $h(x, t)$ est l'épaisseur du film, c'est-à-dire $\Omega_t = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < z < h(x, t)\}$.

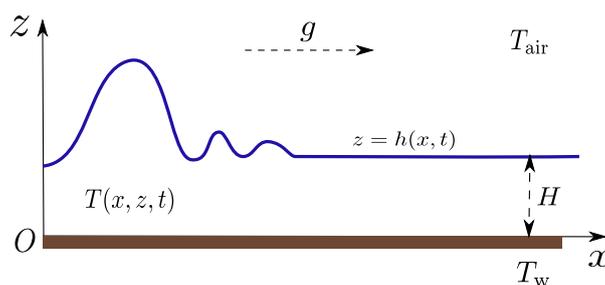


FIGURE 1 – Le domaine 2D

La géométrie spécifique des films tombants est caractérisée par des échelles typiques. L'évolution des instabilités hydrodynamiques et le procédé de diffusion thermique peuvent être décrits à travers ces longueurs typiques :

- L : longueur caractéristique de l'écoulement,
- H : hauteur caractéristique de l'écoulement.

Nous introduisons $\epsilon = \frac{H}{L} \ll 1$ car $H \ll L$. L'écoulement est alors régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles et le transfert de chaleur à travers le domaine du liquide est modélisé par l'équa-

tion de Fourier d'advection-diffusion :

$$\varepsilon \operatorname{Re} \left(\partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u + \frac{2}{\operatorname{Re}} \partial_x p \right) = 2 + (1 - \Pi_\mu T) (\varepsilon^2 \partial_{xx}^2 u + \partial_{zz}^2 u) - \Pi_\mu (\varepsilon^2 \partial_x T \partial_x u + \partial_z u \partial_z T), \quad (1a)$$

$$\varepsilon \operatorname{Re} \left(\partial_t w + u \partial_x w + w \partial_z w + \frac{2}{\varepsilon^2 \operatorname{Re}} \partial_z p \right) = (1 - \Pi_\mu T) (\varepsilon^2 \partial_{xx}^2 w + \partial_{zz}^2 w) - \Pi_\mu (\varepsilon^2 \partial_x T \partial_x w + \partial_z w \partial_z T), \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (1c)$$

$$\partial_t T + u \partial_x T + w \partial_z T = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Pe}} (\varepsilon^2 \partial_{xx}^2 T + \partial_{zz}^2 T). \quad (1d)$$

où $\mathbf{u} = (u, w)$ et p représentent les champs de vitesse et de pression. Les trois nombres sans dimension introduits dans les équations précédentes sont

- le nombre de Reynolds Re qui mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans le fluide
- le nombre de Péclet Pe qui est le rapport entre les mécanismes de transport (si Pe est petit, le transport est diffusif, si Pe est grand, le transport est advectif)
- le taux de changement de la viscosité dynamique

$$\Pi_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_0} (T_{\text{wall}} - T_{\text{air}}).$$

Nous supposons Π_μ d'ordre un.

La température de référence est choisie pour correspondre à la température de l'air notée T_{air} . Les paramètres physiques ρ, ν, μ correspondent à la densité, la viscosité cinématique et la viscosité dynamique. Dans cet article, nous supposons que seulement la tension de surface σ et la viscosité dynamique du liquide $\mu = \rho \nu$ dépendent de la température T par une loi linéaire :

$$\sigma = \sigma(T) = \sigma_0 - m(T - T_0),$$

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 - \mu_1(T - T_{\text{air}})$$

où m et μ_1 sont des constantes positives car la tension de surface et la viscosité décroissent avec la température. Notons que la positivité de la viscosité μ impose $\Pi_\mu < 1$ ([3]).

Sur le mur, une condition de non glissement et une condition aux limites de type Dirichlet pour la température sont imposées :

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0, \quad (1e)$$

$$T|_{z=0} = T_{\text{wall}} = 1. \quad (1f)$$

A l'interface une condition de saut cinématique est imposée :

$$\partial_t h + u|_{z=h} \cdot \partial_x h = w|_{z=h}. \quad (2)$$

La condition de continuité à la surface libre est :

$$p|_h + \varepsilon^2 \left(\text{We} - \frac{1}{2} \text{Ma} T|_{z=h} \right) \frac{\partial_{xx}^2 h}{[1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2]^{3/2}} = -\varepsilon (1 - \Pi_\mu T|_{z=h}) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_x u|_h \quad (3)$$

et

$$(1 - \Pi_\mu T|_{z=h}) \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \left[(1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2) \cdot (\partial_z u|_h + \varepsilon^2 \partial_x w|_h) + 4\varepsilon^2 \partial_x h \partial_z w|_h \right] + \varepsilon \text{Ma} \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \frac{dT(h)}{dx} = 0 \quad (4)$$

où la dérivée totale $\frac{dT(h)}{dx}$ est donnée par :

$$\frac{dT(h)}{dx} = [\partial_x T + \partial_x h \cdot \partial_z T]|_h.$$

Les deux nombres sans dimension introduits dans les équations précédentes sont :

- le nombre de Weber $\text{We} = \frac{\sigma_0}{\rho g H^2}$ qui compare les effets dus à la tension superficielle aux effets inertiels,
- le nombre de Marangoni $\text{Ma} = \frac{2m}{\rho g H^2}$ qui concerne le couplage de la dynamique du fluide avec le transfert de chaleur.

Nous supposons que le nombre de Marangoni Ma est d'ordre un et notons que la positivité de la tension de surface σ impose $\text{Ma} < 2\text{We}$ ([3]).

Le transfert de chaleur à la surface libre entre le liquide chauffé et l'air ambiant est modélisé par un coefficient d'échange thermique supposé rester constant pendant que le champ de température vérifie la loi de Newton à la surface libre :

$$\partial_z T|_h = -\sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x h)^2} \text{Bi} T|_h + \varepsilon^2 \partial_x h \partial_x T|_h$$

où Bi est le nombre de Biot. qui est le rapport entre les mécanismes de transfert de chaleur (si Bi est petit, le transfert est convectif, sinon il est conductif). Dans ce qui suit, nous posons

$$\mathcal{B} = \sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x h)^2} \text{Bi} = \mathcal{O}(\text{Bi}).$$

Nous introduisons $\kappa = \varepsilon^2 \text{We}$ avec l'hypothèse classique $\kappa = \mathcal{O}(1)$ car pour la plupart des liquides le nombre de Weber est grand ([4]).

3 Modèle asymptotique

Dans ce qui suit, nous présentons la formulation du système des équations moyennées en considérant un développement formel de la vitesse, la pression et le champ de température par rapport au paramètre ε :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon u^{(1)}(x, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ w(x, z, t) &= w^{(0)}(x, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(x, z, t) &= p^{(0)}(x, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ T(x, z, t) &= T^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon T^{(1)}(x, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Cette approche asymptotique est différente de l'approche des résidus pondérés ([5]) qui a été appliquée avant à ces problèmes. Les sections suivantes permettent d'exprimer $u^{(0)}$, $w^{(0)}$, $p^{(0)}$ et $T^{(0)}$.

3.1 Dérivation formelle de la température

L'expression à l'ordre principal du profil de température appelé la solution de Nusselt est :

$$T^{(0)}(x, z, t) = 1 - A(x, t) z$$

avec

$$A(x, t) = \frac{\mathcal{B}}{1 + h(x, t) \mathcal{B}}.$$

En effet, la substitution du développement formel précédent dans les équations de Fourier adimensionnées (1d) donne en prenant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\partial_{zz}^2 T^{(0)} = 0. \quad (5)$$

En prenant en compte les conditions aux limites associées

$$T^{(0)} \Big|_{z=0} = 1, \quad \partial_z T^{(0)} \Big|_{z=h} = -\mathcal{B} T^{(0)} \Big|_{z=h},$$

la résolution de (5) donne $T^{(0)}$.

Nous pouvons remarquer que A est une fonction de h et de sa dérivée première par rapport à x . Bien que le calcul soit simple, l'expression de la solution de Nusselt diffère du profil linéaire de température trouvé dans la littérature ([2]).

Remarquons que la solution de Nusselt moyenne $\bar{T}^{(0)} = \frac{1}{h} \int_0^h T^{(0)} dz$ est consistante par rapport aux cas limites de transfert de chaleur. En effet dans le cas adiabatique $\text{Bi} \rightarrow 0$ on a $\bar{T}^{(0)} \rightarrow 1$ et quand $\text{Bi} \rightarrow \infty$, $\bar{T}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

3.2 Dérivation formelle de la vitesse et de la pression

Avec les hypothèses $\Pi_\mu = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\text{We} = \frac{\kappa}{\varepsilon^2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, z, t) &= 2 h(x, t) z - z^2, \\ w^{(0)}(x, z, t) &= -z^2 \partial_x h(x, t), \\ p^{(0)}(x, z, t) &= -\kappa \partial_{xx}^2 h. \end{aligned}$$

En effet, en intégrant (1a) et en utilisant les conditions aux limites (1e), (2) et (4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{2}{\Pi_\mu A} \left(h + \frac{1 - \Pi_\mu}{\Pi_\mu A} \right) (\ln |1 - \Pi_\mu + \Pi_\mu A z| - \ln |1 - \Pi_\mu|) - \frac{2}{\Pi_\mu A} z \\ &\quad \text{si } \Pi_\mu \neq 0 \\ u^{(0)} &= 2 h z - z^2, \quad \text{si } \Pi_\mu = 0 \\ u^{(0)} &= 2 h z - z^2 + \left(2 h z - z^2 - h A z^2 + \frac{2}{3} A z^3 \right) \Pi_\mu + \mathcal{O}(\Pi_\mu^2) \text{ si } \Pi_\mu \ll 1. \end{aligned}$$

Comme $\Pi_\mu = \mathcal{O}(\varepsilon)$, nous introduisons la constante $\varpi = \mathcal{O}(1)$ telle que $\Pi_\mu = \varepsilon \varpi$ et donc

$$u(x, z, t) = 2 h(x, t) z - z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Utilisant la condition de divergence et la condition de non glissement $w|_{z=0} = 0$, la composante transverse de la vitesse w est déterminée par

$$w(x, z, t) = - \int_0^z \partial_x u(x, y, t) dy = -z^2 \partial_x h(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

De plus, l'intégration de (1b) donne

$$2 p|_h - 2 p(z) = \varepsilon \partial_z w|_h - \varepsilon \partial_z w(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

et avec la condition aux limites (3) qui devient

$$p|_h = -\varepsilon^2 \left(\text{We} - \frac{\text{Ma}}{2} T|_h \right) \partial_{xx}^2 h - \varepsilon \partial_x u|_h + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

on obtient avec l'hypothèse $\text{We} = \frac{\kappa}{\varepsilon^2}$:

$$p(z) = -\kappa \partial_{xx}^2 h + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

3.3 La formulation conservative du modèle

Nous donnons dans cette section des équations vérifiées par h, hv, θ où v est la vitesse moyenne et θ la température à la surface libre ce qui permet d'avoir un nouveau modèle sous forme conservative et ainsi des résultats numériques intéressants.

Déjà, l'équation (2) donne

$$\partial_t h + \partial_x (hv) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (6)$$

avec

$$v(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, z, t) dz = \frac{2}{3} h^2(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Nous intégrons ensuite l'équation des moments (1a) en utilisant les conditions aux limites (1e) et (2) et

obtenons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \partial_t \left(\int_0^h u \, dz \right) + \operatorname{Re} \partial_x \left(\int_0^h u^2 \, dz \right) &= \frac{2h}{\varepsilon} - 2 \partial_x \left(\int_0^h p \, dz \right) \\ &+ 2 p|_h \partial_x h + \frac{1 - \varepsilon \varpi T}{\varepsilon} \partial_z u|_h - \frac{1 - \varepsilon \varpi T}{\varepsilon} \partial_z u|_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (7) \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^h u^2 \, dz = \frac{8}{15} h^5 + \mathcal{O}(\varepsilon) = v^2 h + \frac{4}{45} h^5 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Cette équation introduit le flux classique des moments $v^2 h$ des équations de Saint-Venant corrigé avec le terme $\frac{4}{45} h^5$ qui est une fonction seulement de l'épaisseur du film. Suivant [1], où l'analogie des équations de Saint-Venant avec les équations compressibles d'Euler est soulignée, l'épaisseur h étant l'analogie de la densité, la correction $\frac{4}{45} h^5$ est une contribution barotropique de la pression. Les conditions aux limites donnent

$$\frac{1 - \varepsilon \varpi T}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=h} = -\operatorname{Ma} \frac{dT^{(0)}(h)}{dx} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

tandis que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \varepsilon \varpi T}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=0} &= \frac{3}{\varepsilon} \left[1 - \varepsilon \varpi \frac{3 + T^{(0)}(h)}{4} \right] \frac{v}{h} \\ &- \frac{4}{15} \operatorname{Re} h^4 \partial_x h + \frac{1}{2} \frac{dT^{(0)}(h)}{dx} - 2 \kappa h \partial_{xxx}^3 h + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{où } \frac{dT^{(0)}(h)}{dx} = -(h \partial_h A + A) \partial_x h.$$

Cette expression est choisie telle que la dépendance de la viscosité par rapport à la température apparaisse avec une correction comme $\frac{3v}{h}$ qui correspond au profil parabolique classique de Nusselt.

Grâce à

$$-2 \partial_x \left(\int_0^h p \, dz \right) + 2 p|_h \partial_x h = 2 \kappa h \partial_{xxx}^3 h + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

l'équation (7) devient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\partial_t(hv) + \partial_x \left(hv^2 + \frac{8}{225} h^5 \right) \right) &= \\ \frac{1}{\varepsilon} \left\{ 2h - 3 \left[1 - \varepsilon \varpi \frac{3 + T^{(0)}(h)}{4} \right] \frac{v}{h} \right\} \\ &- \frac{3}{2} \operatorname{Ma} \frac{dT^{(0)}(h)}{dx} + 2 \kappa h \partial_{xxx}^3 h + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (8) \end{aligned}$$

qui étend les résultats obtenus dans [1].

Nous donnons maintenant une équation d'évolution pour la température à la surface libre en suivant l'approche "Saint-Venant". Nous introduisons la température à la surface libre :

$$\theta = T|_{z=h}$$

telle que le champ de température peut s'écrire :

$$T = 1 - (1 - \theta) \frac{z}{h} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)} = \tilde{T}^{(0)} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)}$$

où $\tilde{T}^{(1)}$ vérifie $\tilde{T}^{(1)} = T^{(1)} - T^{(1)}|_{z=h} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ donc $\tilde{T}^{(1)}|_{z=h} = 0$.

L'intégration de (1d) donne

$$\partial_t \int_0^h T dz + \partial_x \int_0^h u T dz = -\frac{1}{\varepsilon \text{Pe}} (\mathcal{B} T|_{z=h} + \partial_z T|_{z=0}) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (9)$$

Nous introduisons

$$q = hv = q^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{2}{3}h^3 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

La température moyenne $\frac{1}{h} \int_0^h T dz$ et $\frac{1}{q} \int_0^h u T dz$ peuvent être facilement déduites de la température à la surface libre θ avec

$$\frac{1}{h} \int_0^h T dz = \frac{1+\theta}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et

$$\frac{1}{q} \int_0^h u T dz = \frac{1}{q} \int_0^h u^{(0)} \tilde{T}^{(0)} dz + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{1}{8} (3 + 5\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Ces fermetures dépendent des expressions asymptotiques à la surface libre :

$$\begin{aligned} T|_{z=h} = \theta &= \theta^{(0)} + \varepsilon \theta^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{1+h\mathcal{B}} + \varepsilon \frac{\text{Pe} \mathcal{B} (-15 + 7h\mathcal{B})}{60(1+h\mathcal{B})^3} h^4 \partial_x h + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Le point de vue qui est adopté ci-dessous est d'exprimer les termes convectifs du membre de gauche de (9) comme une fonction de h ($\partial_t \theta + v \partial_x \theta$) = $\partial_t(h\theta) + \partial_x(q\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Ce choix provient de la forme classique des équations de Saint-Venant et du choix de h , hv et θ comme variables du modèle et de la structure hyperbolique des équations d'évolution obtenues. Le membre de droite de (9) est écrit comme une fonction de θ en utilisant

$$\begin{aligned} \mathcal{B} T|_{z=h} + \partial_z T|_{z=0} &= \mathcal{B} \tilde{T}^{(0)}|_{z=h} + \partial_z \tilde{T}^{(0)}|_{z=0} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{1+h\mathcal{B}}{h} (\theta - \theta^{(0)}) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \frac{1+h\mathcal{B}}{h} (\theta - \theta^{(0)}) &= -\left(\frac{3}{16} - \frac{7}{80}h\mathcal{B}\right) \varepsilon \text{Pe} \{\partial_t(h\theta) + \partial_x(q\theta)\} \\ &= -\left(\frac{11}{40} - \frac{7}{80} \frac{1}{\theta^{(0)}}\right) \varepsilon \text{Pe} \{\partial_t(h\theta) + \partial_x(q\theta)\} \\ &= -\varepsilon \text{Pe} \{\partial_t[hg(\theta)] + \partial_x[qg(\theta)]\}, \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{11}{40}\theta - \frac{7}{80}\ln(\theta) \\
&= \frac{11}{20}\left[\theta - 2\ln(\theta) - \frac{1}{2}\theta^{(0)} + \frac{81}{44}\ln(\theta^{(0)})\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \frac{11}{20}\left[\theta - 2\ln(\theta) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\mathcal{B}h} + \frac{81}{44}\ln\left(\frac{1}{1+\mathcal{B}h}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \frac{11}{20}\phi + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{12}$$

3.4 La formulation vectorielle du modèle

La formulation complète de notre système couplé d'équations pour les variables h , $h v$ et θ est donc le système d'équations (6), (8), (11) avec (12) qui peut-être réécrit sous forme vectorielle :

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{N} + \mathcal{S} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

avec

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} h \\ h v \\ h \phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{8}{225} h^5 - \frac{3 \text{Ma}}{\text{Re}} \theta \\ h v \phi \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ 2h - 3 \left[1 - \varepsilon \varpi \left(1 - \frac{\theta}{2} \right) \right] \frac{v}{h} \right\} \\ \frac{1}{h \text{Pe}} \frac{20}{11} \left(1 - (1 + h \mathcal{B}) \theta \right) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2 \kappa}{\text{Re}} h \partial_{xxx}^3 h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne du flux $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{U}}$ possède trois valeurs propres distinctes

$$c, \quad v \pm \frac{2\sqrt{10}}{15} h^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\text{Ma}}{\text{Re}}\right)$$

donc le système est strictement hyperbolique. Cette propriété permet d'utiliser des solveurs numériques performants dans ce cas.

En conclusion, cet article donne une nouvelle formulation conservative qui peut être vue comme une modélisation des films liquides tombants en suivant une procédure proposée par J.-P. Vila [6] basée sur les équations classiques de Saint-Venant obtenues en faisant une moyenne par rapport à la hauteur des équations de Navier-Stokes. Ce nouveau modèle est très intéressant car il respecte l'hyperbolicité du problème posé, et assure que les grandeurs physiques (température et concentration) restent dans un intervalle donné [3]. Le résultat important du modèle proposé d'absence de valeurs négatives de la température a été observée précédemment avec les modèles proposés [7] utilisant la méthode des résidus pondérés.

Références

- [1] M. Boutounet. Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince. Thèse, Université de Toulouse (2013).
- [2] S. D'Alessio, C. Seth, and J. Pascal. The effects of variable fluid properties on thin film stability. *Phys. Fluids*, 26 :122105, (2014).
- [3] M. Chhay, D. Dutykh, M. Gisclon, C. Ruyer-Quil. New asymptotic heat transfer model in thin liquid films" *Applied Mathematical Modelling* (2017).
- [4] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde. *Falling Liquid Films*, volume 176 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer London, London, (2012).
- [5] Ch. Ruyer-Quil, P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 15, (2000), 357–369.
- [6] P. Noble, J.-P. Vila. Thin power law film flow down an inclined plane : consistent shallow water models and stability under large scale perturbations, *J ; Fluid Mech.*, 735 (2013) 29-60.
- [7] P.-M.-J. Trevelyan, B. Scheid, Ch. Ruyer-Quil, S. Kalliadasis. Heated falling films, *Journal of Fluid Mechanics*, 592, (2007), 295–334.